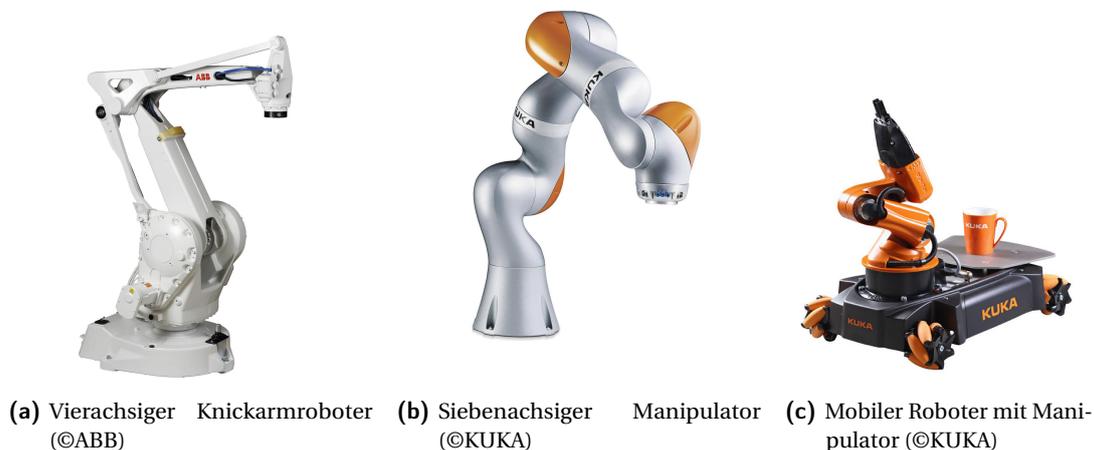


# Einführung in die Modellierung und Regelung von Robotersystemen

In diesem Kapitel werden einführend Konzepte zur mathematischen Beschreibung und Regelung von so genannten *Manipulatoren* zusammengefasst. Man unterscheidet in der Robotik meist zwischen *Manipulatoren*, welche eine feste Basis besitzen, und *mobilen Robotern*, welche sich durch entsprechende Mechanismen im Raum bewegen können. Dabei sei bemerkt, dass mobile Roboter sehr wohl mit Manipulatoren bestückt sein können. Beispiele sind in Abbildung 4.1 aufgeführt. Die weiteren Ausführungen werden sich primär auf Manipulatoren beziehen und sich an den Ausführungen in [1] orientieren.



**Abb. 4.1:** Beispiele für Robotersysteme.

## 4.1 Grundbegriffe

Ein Manipulator besteht mechanisch aus einer Sequenz von Starrkörpern<sup>1</sup> (*Verbindungselemente* bzw. „*Links*“), die durch *Gelenke* bzw. „*Joints*“ miteinander verbunden sind. Diese bilden gemeinsam einen *Arm*, welcher auf einer *Basis* montiert wird. Um tatsächlich Aufgaben lösen zu können, ist am Armende ein so genannter *Endeffektor* montiert, welcher an die Aufgabenstellung (z.B. Greifen, Schrauben, Nieten, Schweißen) angepasst ist. Mechanisch gesehen bildet ein Manipulator im Allgemeinen eine *offene kinematische Kette*, in dem die beiden Enden des Arms durch eine Sequenz von *Links* verbunden sind. Fallen die beiden Enden zusammen, dann spricht man von einer *geschlossenen kinematischen Kette*.

Die Verbindungselemente, im Weiteren als *Gelenke* bezeichnet, ermöglichen die Bewegung des Arms. Hierbei wird zwischen *Drehgelenken* und *Schubgelenken* unterschieden. In einer offenen kinemati-

<sup>1</sup>Im Folgenden wird zur Beschreibung der Verbindungselemente durchgängig der englische Begriff *Links* verwendet. Damit sollen sprachliche Mehrdeutigkeiten, z.B. bei der Nutzung des Begriffs *Achse*, welche als Drehachse interpretiert werden kann, vermieden werden.

schen Kette führt jeder dieser Gelenktypen auf eine Struktur mit einem Freiheitsgrad: einer rotatorischen Relativbewegung zwischen zwei Verbindungselementen im Fall eines Drehgelenks und einer translatorischen Relativbewegung zwischen zwei *Links* im Fall eines Schubgelenks. Typischerweise werden in der Robotik Drehgelenke aufgrund des vorteilhaften Bauraums, der einfachen Bauweise (Motor, Getriebeeinheit und Bremse) und deren Ausfallsicherheit bevorzugt.

Der *Arbeitsraum* eines Manipulator bezeichnet den Teilbereich des  $\mathbb{R}^3$ , den der Endeffektor erreichen kann. Dieser wird offensichtlich durch die mechanische Konfiguration des Manipulators bedingt.

Die Art und Abfolge der Freiheitsgrade erlaubt eine Klassifikation von Manipulatoren (siehe Abbildung 4.2):

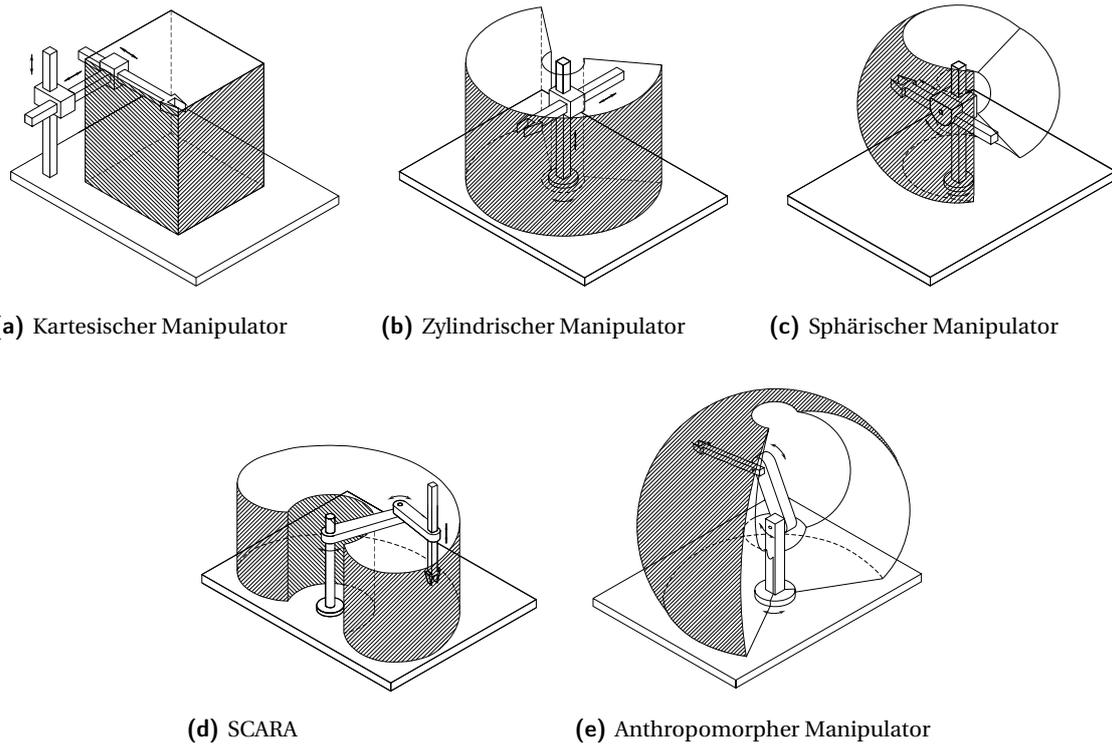
- In *kartesischen Manipulatoren* sind typischerweise drei *Links* durch drei Schubgelenke so miteinander verbunden, dass die drei Raumrichtungen durch die resultierende translatorische Bewegung im Arbeitsraum bedient werden können. Diese Konfiguration erlaubt es beispielsweise hohe Lasten in großen Arbeitsräumen zu bewegen (vergleiche Portalkräne).
- In *zylindrischen Manipulatoren* wird das der Basis nächste Schubgelenk durch ein Drehgelenk ersetzt, so dass sich der Arbeitsraum in der Form eines Zylinders ergibt.
- In *sphärischen Manipulatoren* werden das der Basis nächste sowie das zweite Schubgelenk jeweils durch ein Drehgelenk ersetzt, so dass sich der Arbeitsraum in der Form einer Kugel ergibt.
- Die so genannte *SCARA-Konfiguration* („Selective Compliance Assembly Robot Manipulator“) ist ein Sonderfall der sphärischen Konfiguration. Hier sind die Drehgelenke und das Schubgelenk so angeordnet, dass alle Bewegungsachsen parallel zueinander stehen. Dieser Typ wird auch als *horizontaler Gelenkroboter* bezeichnet.
- In *anthropomorphen Manipulatoren* werden mit mindestens drei Drehgelenken realisiert. Im Fall von drei Gelenken ist die Drehrichtung des ersten, der Basis nächsten Drehgelenks orthogonal zu den Drehrichtungen der beiden folgenden, parallel wirkenden Drehgelenken. Im Gegensatz zu den bereits genannten Manipulator Typen zeichnet sich diese Klasse durch die ausschließliche Nutzung von Drehgelenken aus, wodurch eine hohe Zuverlässigkeit erreicht werden kann.

In Anwendungen und der Industrie ist die anthropomorphe Konfiguration am Häufigsten anzutreffen. Darüber hinaus können auch Manipulatoren mit geschlossenen kinematischen Ketten klassifiziert werden (siehe z.B. [1]).

Analog zu den vorherigen Ausführungen unterscheidet man bei der Modellierung von Manipulatoren zwischen der kinematischen und der kinetischen Beschreibung. Zudem wird zwischen der *Kinematik* und der *differenziellen Kinematik* unterschieden.

Die *Kinematik* von Manipulatoren beschreibt die analytischen Zusammenhänge zwischen den Gelenkpositionen bzw. -winkel und der Endeffektorposition und dessen Orientierung. Dem gegenüber beschreibt die *differenzielle Kinematik* von Manipulatoren die analytischen Zusammenhänge zwischen den Gelenk-Geschwindigkeiten (rotatorisch und translatorisch) und der Endeffektorgeschwindigkeit (rotatorisch und translatorisch) in Abhängigkeit der zugehörigen Manipulator Jacobi-Matrizen.

Hiermit können zwei grundsätzliche Probleme der Robotik analysiert werden. Zum einen ist dies die so genannte *Vorwärtskinematik*, auch *direkte Kinematik* genannt, welche systematische Methoden umfasst, um aus der Gelenkbewegung die Endeffektorbewegung zu ermitteln, wodurch sich der



**Abb. 4.2:** Zur Klassifikation von Manipulatoren mit offener kinematischer Kette (die Abbildungen entstammen [1, S. 5–7]). Die markierten Bereiche stellen den Arbeitsraum des Manipulators dar.

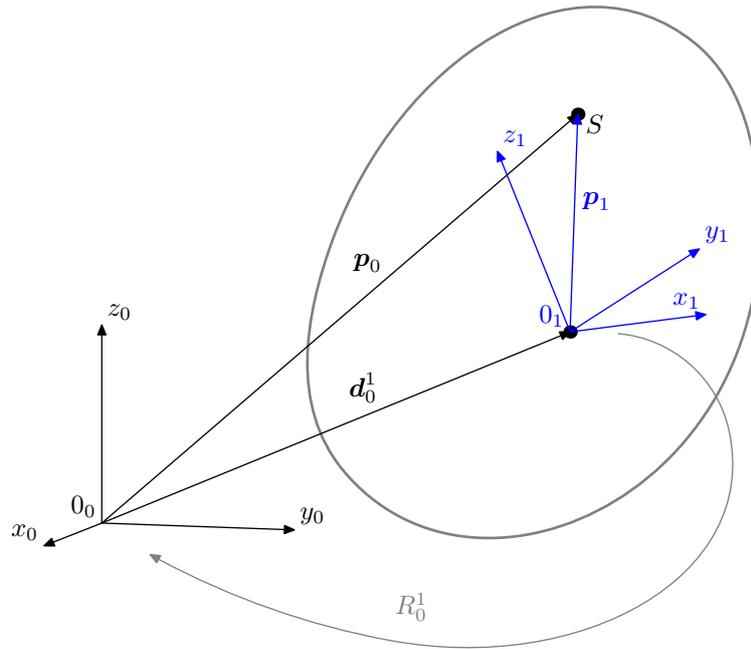
Endpunkt des Werkzeugs bzw. des so genannten „*Tool Center Points*“ ergibt. Zum anderen befasst sich die so genannte *inverse Kinematik* mit dem umgekehrten Zusammenhang, um die Frage zu beantworten, wie aus einer vorgegebenen Endeffektorbewegung bzw. Endeffektortrajektorie die Gelenkbewegung bzw. die Gelenkstrajektorien systematisch ermittelt werden können.

Wie in Kapitel 3 gezeigt wurde, kann unter Berücksichtigung der kinematischen Beziehungen der Einfluss von Kräften und Momenten auf die Bewegung eines Starrkörpers mathematisch erfasst werden, was auf die *kinetische Betrachtung* führt, welche mathematisch in den Bewegungsgleichungen (3.87) mündet.

## 4.2 Direkte und inverse Kinematik

Als Wiederholung sei angemerkt, dass es zur Beschreibung der *Position* und der *Orientierung* eines Starrkörpers ausreichend ist, den Vektor  $\mathbf{d}_0^1$  gegeben im Inertialsystem  $(0_0 x_0 y_0 z_0)$  zu einem Punkt  $0_1$  im bzw. auf dem Starrkörper und die Rotationsmatrix  $R_0^1$  zwischen dem Inertialsystem und dem körperfesten Koordinatensystem  $(0_1 x_1 y_1 z_1)$  zu kennen (siehe Abbildung 4.3). Zudem wird auf Abschnitt 2.5 verwiesen, in welchem kombinierte Translationen und Rotationen analysiert wurden, deren Beschreibung auf so genannte *homogene Transformationen* geführt hat. Mit der homogenen Transformation

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} R_0^1 & \mathbf{d}_0^1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad R_0^1 \in SO(3) \quad (4.1)$$



**Abb. 4.3:** Position und Orientierung eines Starrkörpers.

und

$$\tilde{\mathbf{p}}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

bezüglich des Koordinatensystem  $(0_0 x_0 y_0 z_0)$  sowie

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

bezüglich des Koordinatensystem  $(0_1 x_1 y_1 z_1)$  folgt

$$\tilde{\mathbf{p}}_0 = H_0^1 \tilde{\mathbf{p}}_1. \quad (4.4)$$

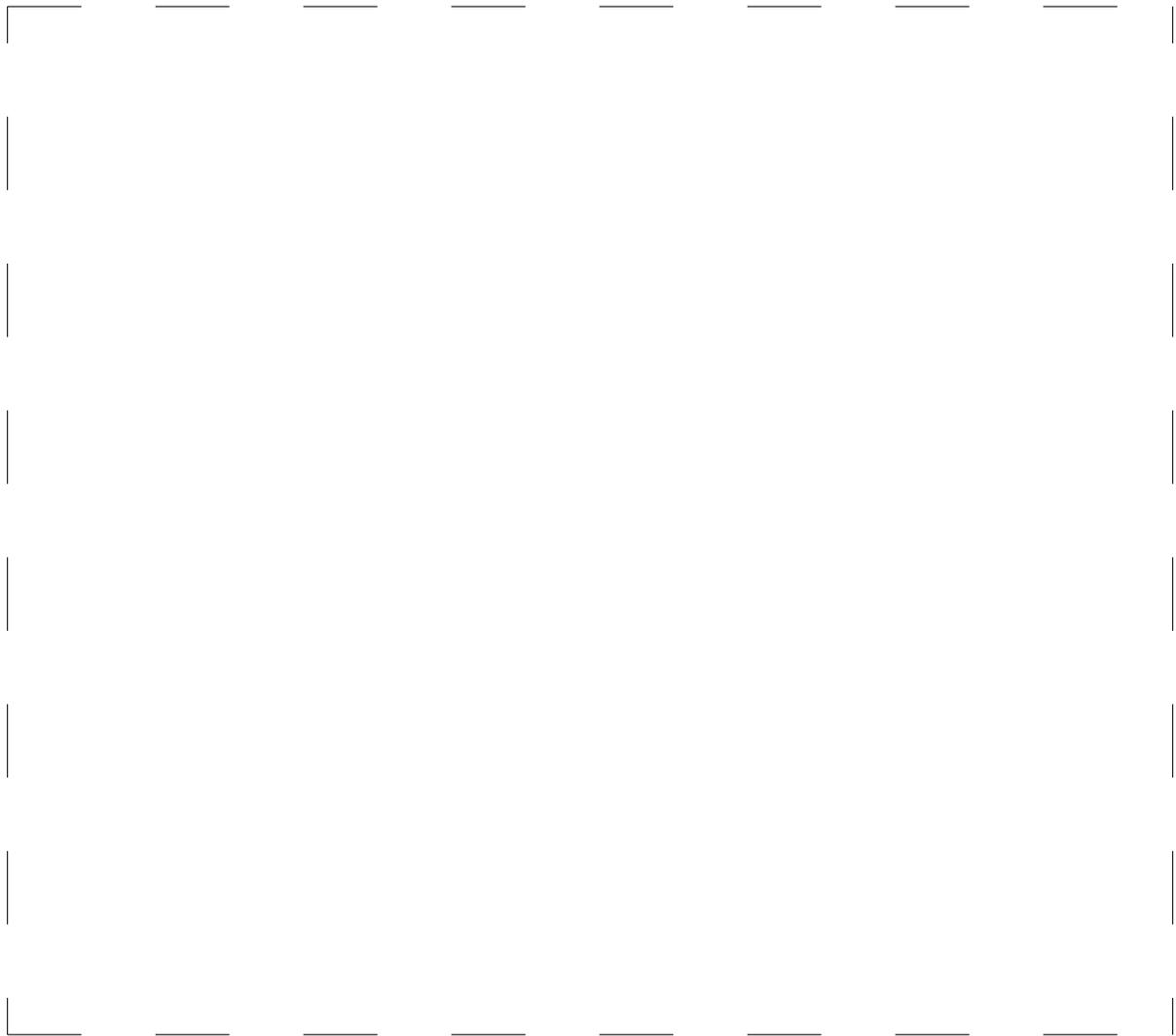
In analoger Weise folgt für eine Sequenz von  $m+1$  Koordinatensystemen, welche jeweils translatorisch und/oder rotatorisch zueinander versetzt sind, die Beziehung

$$\tilde{\mathbf{p}}_0 = H_0^m \tilde{\mathbf{p}}_m = H_0^1 H_1^2 \cdots H_{m-1}^m \tilde{\mathbf{p}}_m. \quad (4.5)$$

### 4.2.1 Direkte Kinematik

Für Manipulatoren, wie die beispielhaft in Abbildung 4.4 gezeigte Konfiguration, werden häufig die Begriffe Basis-Koordinatensystem bzw. „base frame“ (Subskript  $b$ ) und Endeffektor-Koordinatensystem bzw. „end-effector frame“ (Subskript  $e$ ) verwendet. Man spricht dann auch z.T. von Frame-Transformationen, wenn die homogene Transformation (4.5) diese Koordinatensysteme miteinander in Beziehung setzt. Des Weiteren hängen die translatorischen und rotatorischen Anteile von den  $n$  mechanischen Freiheitsgraden ab (vgl. Abschnitt 3.4.2), welche durch die generalisierten Koordinaten  $q_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  bzw.  $\mathbf{q}$  beschrieben werden. Damit ergibt sich für die Konfiguration aus Abbildung 4.4 die homogene Transformation

$$H_b^e(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} R_b^e(\mathbf{q}) & \mathbf{d}_b^e(\mathbf{q}) \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad R_b^e(\cdot) \in SO(3). \quad (4.6)$$



**Abb. 4.4:** Position und Orientierung des Endeffektors.

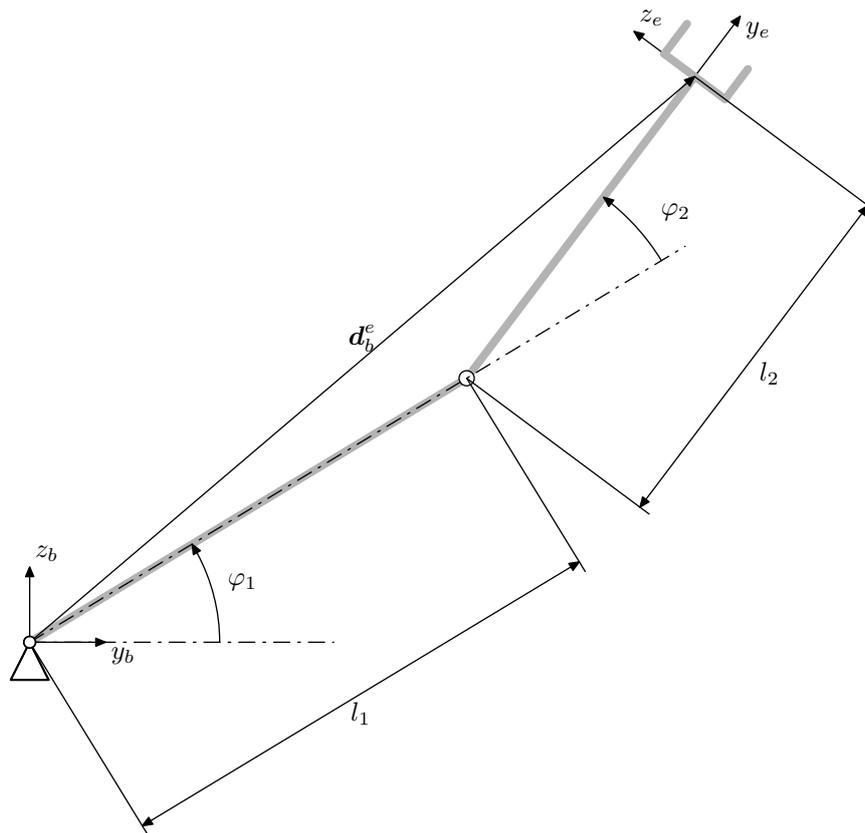
Diese Abbildung zwischen Endeffektor- und Basis-Koordinatensystem liefert eine Darstellung der *direkten Kinematik*.

**Anmerkung 4.1: Wahl der Koordinatensysteme**

Das Endeffektor-Koordinatensystem ist abhängig von der Anwendung zu wählen [1]. Im Fall eines Greifers ist das Koordinatensystem  $(0_e x_e y_e z_e)$  so zu platzieren und zu orientieren, dass dessen Ursprung  $0_e$  im Zentrum des Greifers liegt und die Einheitsvektoren  $e_{x_e}$ ,  $e_{y_e}$  und  $e_{z_e}$  ein Rechtshandsystem bilden. Dabei sollte  $e_{z_e}$  in Richtung des zu greifenden Objekts ausgerichtet sein,  $e_{y_e}$  orthogonal zu  $e_{z_e}$  stehen und in die Bewegungsrichtung der Greiferbacken zeigen und  $e_{x_e}$  entsprechend orthogonal zur Ebene stehen, die durch  $e_{z_e}$  und  $e_{y_e}$  aufgespannt wird.

Ein bereits in Kapitel 2 diskutiertes Ergebnis wird zur Illustration dieser Sachverhalte nochmals aufgeführt und angepasst.

**Aufgabe 4.12 (Planarer Zwei-Gelenk-Manipulator).** *Abbildung 4.5 zeigt einen planaren Zwei-Gelenk-Manipulator.*



**Abb. 4.5:** Planarer Zwei-Gelenk-Manipulator.

Bestimmen Sie für die dargestellte Konfiguration die homogene Transformation zwischen Basis-Koordinatensystem  $(0_b x_b y_b z_b)$  und Endeffektor-Koordinatensystem  $(0_e x_e y_e z_e)$ .

**Lösung 4.12.** Die homogene Transformation (4.6) ergibt sich mit den Ausführungen aus Beispiel 2.4 zu

$$H_b^e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\varphi_1+\varphi_2} & -s_{\varphi_1+\varphi_2} & l_1 c_{\varphi_1} + l_2 c_{\varphi_1+\varphi_2} \\ 0 & s_{\varphi_1+\varphi_2} & c_{\varphi_1+\varphi_2} & l_1 s_{\varphi_1} + l_2 s_{\varphi_1+\varphi_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

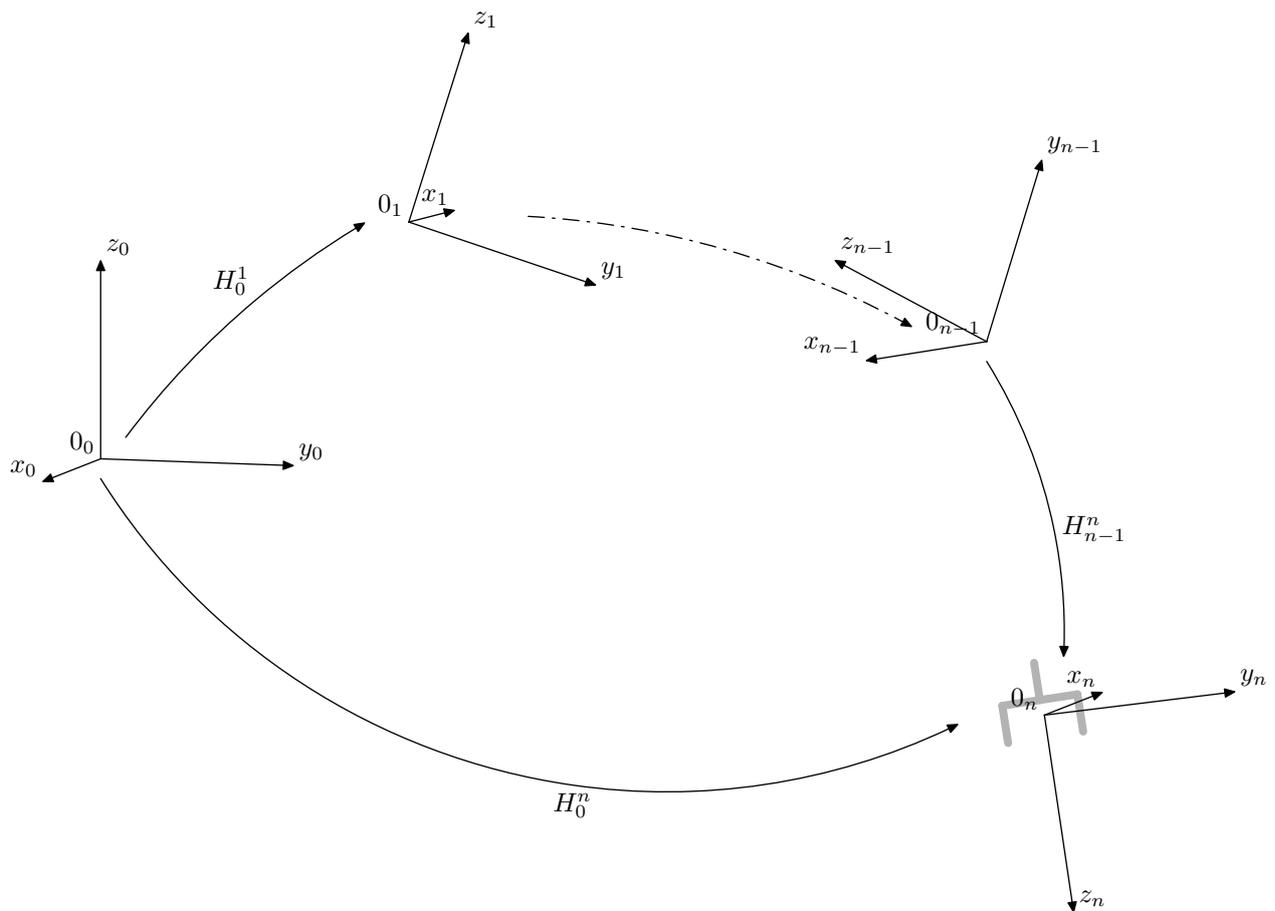
#### 4.2.1.1 Offene kinematische Kette

Im Fall einer *offenen kinematischen Kette*, wie dies in Abbildung 4.6 beispielhaft dargestellt ist, mit  $n$  Gelenken, welche durch  $n + 1$  Links miteinander verbunden sind, führt auf die rekursive Berechnungsvorschrift der direkten Kinematik

$$H_0^j = H_0^1 H_1^2 \cdots H_{j-1}^j = H_0^{j-1} H_{j-1}^j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.7)$$

mit  $H_0^0 = E$ . Sind die Koordinatensysteme  $(0_0 x_0 y_0 z_0)$  bzw.  $(0_n x_n y_n z_n)$  bezüglich dem Basis-Koordinatensystem bzw. dem Endeffektor-Koordinatensystem translatorisch und rotatorisch verschoben, dann folgt

$$H_b^e = H_b^0 H_0^n H_n^e, \quad (4.8)$$



**Abb. 4.6:** Homogene Transformationen für eine offene kinematische Kette.

wobei die einzelnen homogenen Transformationen von den Freiheitsgraden  $\mathbf{q}$  abhängen, d.h.  $H_0^n = H_0^n(\mathbf{q})$ . In Anwendungen werden die Basis- und Endeffektor-Koordinatensystem meist so gewählt, dass  $H_b^0$  und  $H_n^e$  konstant sind.

#### 4.2.1.2 Denavit-Hartenberg-Konvention

Im Allgemeinen kann die Orientierung der Koordinatensysteme, welche in den Gelenken zwischen den *Links* eines Manipulators platziert werden, beliebig sein. Dies kann auf komplizierte und wenig systematische Formulierungen zur Berechnung der direkten Kinematik (4.7) bzw. (4.8) führen. Um dem Rechnung zu tragen, ist es notwendig, gewisse Konventionen zur Orientierung der Gelenk-Koordinatensysteme zu definieren. Sehr häufig wird hierzu die *Denavit-Hartenberg-Konvention*<sup>2</sup> verwendet [3]. Zu deren Illustration wird auf Abbildung 4.7 verwiesen. Die Vorgehensweise gestaltet sich wie folgt (siehe [4, 1]), wobei durchgängig davon ausgegangen wird, dass die eingeführten Koordinatensystem Rechtshandsysteme sind und eine offene<sup>3</sup> kinematische Kette vorliegt:

- (i) Die  $n$  Gelenke zwischen den *Links* bzw. Armelementen werden durchgängig nummeriert. Die  $z_i$ -Achse des Koordinatensystem  $(0_i x_i y_i z_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  ist jeweils in die Drehachse des nachfolgenden  $(i + 1)$ -ten Armelements zu legen.

<sup>2</sup>Es existiert zudem eine modifizierte Denavit-Hartenberg-Konvention, siehe z.B. [2], in der die einzelnen Koordinatensysteme anders platziert werden.

<sup>3</sup>Eine Erweiterung auf geschlossene kinematische Ketten ist möglich, wird jedoch hier nicht weiter verfolgt. Für eine Darstellung der notwendigen Modifikationen wird auf [1] verwiesen.



**Abb. 4.7:** Zur Denavit–Hartenberg–Konvention.

- (ii) Der Ursprung  $0_0$  des ersten Koordinatensystem ist geeignet entlang der  $z_0$ -Achse zu positionieren. Wenn möglich, dann sollte das Koordinatensystem  $(0_0 x_0 y_0 z_0)$  mit dem Basis-Koordinatensystem übereinstimmen.

Die folgenden Schritte sind für  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  zu wiederholen. Die Koordinatensysteme werden immer an der Lage des vorherigen Koordinatensystem ausgerichtet.

- (iii) Der Ursprung  $0_i$  des Koordinatensystem  $(0_i x_i y_i z_i)$  ist in den Schnittpunkt der  $z_i$ -Achse mit der gemeinsamen Normalen<sup>4</sup> der  $z_{i-1}$ - und der  $z_i$ -Achse zu legen. Hierbei sind die beiden Sonderfälle zu berücksichtigen:
  - (a) Wenn sich die  $z_{i-1}$ - und  $z_i$ -Achse schneiden, dann wird der Ursprung  $0_i$  in den Schnittpunkt der beiden Achsen gelegt.
  - (b) Bei parallelen  $z_{i-1}$ - und  $z_i$ -Achsen existieren unendlich viele gemeinsame Normalen. Hier wird im Fall einer Verbindung der Armelemente durch ein Drehgelenk der Ursprung  $0_i$  so

<sup>4</sup>Unter der gemeinsamen Normalen zwischen zwei Linien wird die Linie verstanden, welche die kürzeste Verbindungsstrecke zwischen den beiden Linien beinhaltet.

gelegt, dass für den in (vii) eingeführten Parameter  $d_i = 0$  gilt. Im Fall eines Schubgelenks wird  $0_i$  in eine der translatorischen Begrenzungen gelegt.

(iv) Die  $x_i$ -Achse ist entlang der gemeinsamen Normalen der  $z_{i-1}$ - und der  $z_i$ -Achse auszurichten und zeigt vom Gelenk  $i$  zum Gelenk  $i + 1$ .

(v) Die  $y_i$ -Achse ist so zu bestimmen, dass  $(0_i x_i y_i z_i)$  ein Rechtshandsystem bildet.

Abschließend sind die folgenden Schritte durchzuführen:

(vi) Zur Ausrichtung des Koordinatensystem  $(0_n x_n y_n z_n)$  erfolgt für ein Schubgelenk so, dass die  $z_n$ -Achse mit der  $z_{n-1}$ -Achse ausgerichtet wird. Für ein Drehgelenk kann die  $z_n$ -Achse beliebig gewählt werden.

(vii) Die Ermittlung der homogenen Transformationen, welche die Koordinatensysteme  $(0_i x_i y_i z_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  zueinander in Beziehung setzen, erfolgt anhand der folgenden Gesichtspunkte und Konstruktionsrichtlinien.

(a) Die Position und die Orientierung des Koordinatensystem  $(0_i x_i y_i z_i)$  bezüglich des Koordinatensystem  $(0_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1})$  gemäß Abbildung 4.7 wird durch vier Parameter bestimmt:

- der Distanz  $a_i$  zwischen  $0_i$  und  $0_{i'}$ ;
- der Koordinate  $d_i$  von  $0_{i'}$  entlang der  $z_{i-1}$ -Achse;
- dem Winkel  $\alpha_i$  zwischen der  $z_{i-1}$ - und der  $z_i$ -Achse um die  $x_i$ -Achse;
- dem Winkel  $\vartheta_i$  zwischen der  $x_{i-1}$ - und der  $x_i$ -Achse um die  $z_{i-1}$ -Achse.

Diese Parameter werden auch als *Denavit–Hartenberg–Parameter* bezeichnet. Dabei ist zu beachten, dass  $a_i$  und  $\alpha_i$  immer konstant sind und nur von der Verbindungsgeometrie von Gelenk  $i$  abhängen. Zudem ist nur einer der Parameter  $d_i$  und  $\vartheta_i$  variabel und abhängig von der Art des Gelenks, welches die Armelemente  $i - 1$  und  $i$  verbindet:

- für ein Drehgelenk ist  $q_i = \vartheta_i$  zu berücksichtigen;
- für ein Schubgelenk ist  $q_i = d_i$  die relevante Variable.

(b) Es ist das Koordinatensystem  $(0_{i'} x_{i'} y_{i'} z_{i'})$  entsprechend der Darstellung in Abbildung 4.7 einzuführen. Hierbei ergibt sich  $(0_{i'} x_{i'} y_{i'} z_{i'})$  aus  $(0_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1})$  durch Translation um  $d_i$  entlang der  $z_{i-1}$ -Achse und Rotation um die  $z_{i-1}$ -Achse mit Winkel  $\vartheta_i$ . Dies führt auf die homogene Transformation

$$H_{i-1}^{i'} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

zwischen den Koordinatensystemen  $(0_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1})$  und  $(0_{i'} x_{i'} y_{i'} z_{i'})$ .

- (c) Das Koordinatensystem  $(0_{i'}x_{i'}y_{i'}z_{i'})$  wird translatorisch um  $a_i$  entlang der  $x_{i'}$ -Achse verschoben und mit dem Winkel  $\alpha_i$  um die  $x_{i'}$ -Achse rotiert. Dies führt auf die homogene Transformation

$$H_{i'}^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Damit ergibt sich die homogene Transformation zwischen den Koordinatensystemen  $(0_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1})$  und  $(0_i x_i y_i z_i)$  durch die Hintereinanderausführung von  $H_{i-1}^{i'}$  und  $H_{i'}^i$ , was auf

$$H_{i-1}^i(q_i) = H_{i-1}^{i'} H_{i'}^i = \begin{bmatrix} c\vartheta_i & -s\vartheta_i c\alpha_i & s\vartheta_i s\alpha_i & a_i c\vartheta_i \\ s\vartheta_i & c\vartheta_i c\alpha_i & -c\vartheta_i s\alpha_i & a_i s\vartheta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

führt. Hierbei ist  $H_{i-1}^i(q_i)$  nur von der generalisierten Koordinate  $q_i$  abhängig, welche sich entsprechend der vorherigen Ausführungen für ein Dreh- bzw. Schubgelenk ergibt.

Typischerweise werden die Denavit-Hartenberg-Parameter  $a_i$ ,  $d_i$ ,  $\alpha_i$  und  $\vartheta_i$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  in Tabellenform angegeben, so dass sich (4.11) unmittelbar auswerten lässt.

- (viii) Die homogene Transformation zwischen den Koordinatensystemen  $(0_0x_0y_0z_0)$  und  $(0_nx_ny_nz_n)$  folgt entsprechend (4.7) zu

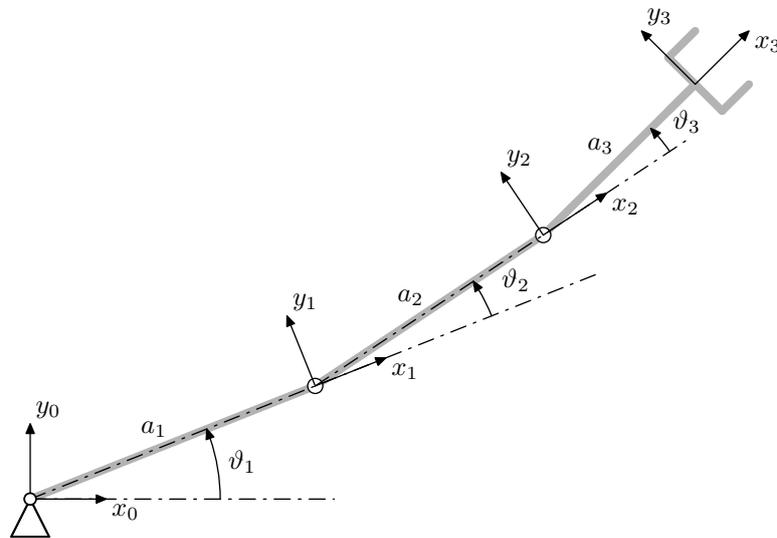
$$H_0^n = H_0^1 H_1^2 \cdots H_{n-1}^n. \quad (4.12)$$

- (ix) Die direkte Kinematik bzw. Vorwärtskinematik des Manipulators mit offener kinematischer Kette ergibt sich aus (4.8) mit (4.12) zu

$$H_b^e = H_b^0 H_0^n H_n^e. \quad (4.13)$$

Die in der Denavit-Hartenberg-Konvention auftretende Wahlfreiheit sollte genutzt werden, um möglichst viele der auftretenden Denavit-Hartenberg-Parameter zu Null zu setzen.

**Beispiel 4.1 (Denavit–Hartenberg–Parameter für einen Drei–Gelenk–Manipulator).** Es wird der in Abbildung dargestellte planare Drei–Gelenk–Manipulator betrachtet. Abweichend von den in Aufgabe 4.12 eingeführten Koordinatensystemen wird im Weiteren der Denavit–Hartenberg–Konvention gefolgt.



**Abb. 4.8:** Planarer Drei–Gelenk–Manipulator.

Die Drehachsen aller Gelenke sind in dieser Konfiguration parallel. Um Punkt (iii)(b) zu erfüllen und den Parameter  $d_i = 0$  zu erzielen, werden die Koordinatensysteme wie in der Abbildung gezeigt gewählt. Die entsprechenden Denavit–Hartenberg–Parameter sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

Link	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
1	$a_1$	0	0	$\vartheta_1$
2	$a_2$	0	0	$\vartheta_2$
3	$a_3$	0	0	$\vartheta_3$

**Tab. 4.1:** Denavit–Hartenberg–Parameter für den planaren Drei–Gelenk–Manipulator.

Die Auswertung von (4.11) führt somit unmittelbar auf die homogenen Transformationen

$$H_{i-1}^i = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i} & 0 & a_i c_{\vartheta_i} \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i} & 0 & a_i s_{\vartheta_i} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.14)$$

Die Vorwärtskinematik folgt entsprechend in der Form

$$H_0^3 = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} & -s_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} & 0 & a_1 c_{\vartheta_1} + a_2 c_{\vartheta_1+\vartheta_2} + a_3 c_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} \\ s_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} & c_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} & 0 & a_1 s_{\vartheta_1} + a_2 s_{\vartheta_1+\vartheta_2} + a_3 s_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$





### 4.2.1.3 Gelenkraum und Operational Space

Die Vorwärtskinematik (4.13) liefert unmittelbar die Position und die Orientierung des Endeffektor-Koordinatensystem im Bezug zum Basis-Koordinatensystem bei Vorgabe der einzelnen Gelenksfreiheitsgrade  $\mathbf{q}$ . Sind letztere Funktionen der Zeit  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$  so ergibt sich die entsprechende Trajektorie des Endeffektors.

Für die weiteren Ausführungen wird von der allgemeinen Darstellung der homogenen Transformation

$$H_b^e = \begin{bmatrix} R_b^e & \mathbf{d}_b^e \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Gebrauch gemacht. Diese zeigt, dass die Position des Endeffektors, welche durch  $\mathbf{d}_b^e(\mathbf{q})$  beschrieben wird, unmittelbar ablesbar ist. Für die Orientierung, die sich durch die 9 Einträge in der Rotationsmatrix  $R_b^e$  ergibt, ist dies im Allgemeinen nicht gegeben. Eine Vereinfachung dieser Problematik ergibt sich, wenn beispielsweise Euler-Winkel (siehe Abschnitt 2.3) für die Parametrierung der Rotationen genutzt werden, wobei hier eventuell auftretende Singularitäten zu beachten sind.

Grundsätzlich kann die räumliche Lage bzw. *Pose* des Endeffektors durch den formalen Vektor

$$\mathbf{x}_b^e = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_b^e \\ \boldsymbol{\phi}_b^e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_b^e \in \mathbb{R}^m \quad (4.17)$$

in Basis-Koordinatensystem dargestellt werden. Hier beschreiben  $\mathbf{p}_b^e$  und  $\boldsymbol{\phi}_b^e$  die Position des Orientierung des Endeffektors. Die Dimension  $m \leq 6$  hängt von der Anzahl der zur Beschreibung der Pose des Endeffektors notwendigen Koordinaten ab (z.B. planare oder dreidimensionale Konfiguration). Die Elemente von  $\boldsymbol{\phi}_b^e$  stellen die Euler-Winkel des Endeffektor-Koordinatensystem bezüglich des Basis-Koordinatensystem dar und bestimmen somit die Einträge in der Rotationsmatrix  $R_b^e$  in (4.16). Diese Darstellungsform mit  $\mathbf{x}_b^e$  wird typischerweise als „*Operational Space*“ bezeichnet. Hierbei ist zu beachten, dass  $\boldsymbol{\phi}_b^e$  nicht als Vektor im  $\mathbb{R}^3$  zu betrachten ist.

Die Einträge in  $\mathbf{x}_b^e$  hängen von den generalisierten Koordinaten  $q_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  ab. Dies motiviert die Einführung des so genannten *Gelenkraum* bzw. „*Joint Space*“. Dabei ergeben sich die Elemente des Vektors  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  wie folgt

$$q_j = \begin{cases} \vartheta_j & \text{für ein Drehgelenk} \\ d_j & \text{für ein Schubgelenk} \end{cases} \quad (4.18)$$

Wegen  $H_b^e = H_b^e(\mathbf{q})$  impliziert dies die Beziehung

$$\mathbf{x}_b^e = \mathbf{k}(\mathbf{q}), \quad (4.19)$$

wobei die im Allgemeinen nichtlineare Funktion  $\mathbf{k}(\cdot)$  eine Abbildung zwischen dem Gelenkraum und dem *Operational Space* darstellt. Hierbei ist zu bemerken, dass die Berechnung der Orientierung  $\boldsymbol{\phi}_b^e = \boldsymbol{\phi}_b^e(\mathbf{q})$  meist nicht in geschlossener Form erfolgen kann, sondern die Auswertung der Rotationsmatrix  $R_b^e = R_b^e(\mathbf{q})$  bedingt. Hieraus können die Einträge in  $\boldsymbol{\phi}_b^e$  mit dem in Abschnitt 2.3 diskutierten Verfahren ermittelt werden, falls keine kardalische Blockade auftritt.

#### 4.2.1.4 Arbeitsraum

Als *Arbeitsraum* bezeichnet man den Teilraum des *Operational Space*, der durch das Endeffektor-Koordinatensystem (bzw. den *Tool Center Point*) erreicht werden kann, wenn alle zulässigen Gelenkbewegungen durchgeführt werden. Man unterscheidet zudem zwischen dem *erreichbaren Arbeitsraum* und dem *praktischen Arbeitsraum* (*Dexterous Workspace*), die sich darin unterscheiden, dass im letztgenannten Fall unterschiedliche Orientierungen des Endeffektors in jedem Punkt des Raums möglich sein müssen.

Der Arbeitsraum ergibt sich aus den Gleichungen der direkten Kinematik (4.8) durch die Variation der generalisierten Koordinaten innerhalb der Gelenkgrenzen  $q_j^-, q_j^+$ , d.h.

$$\mathcal{W} = \left\{ \mathbf{p}_b^e(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^3 \mid q_j^- \leq q_j \leq q_j^+, j = 1, \dots, n \right\}. \quad (4.20)$$

Eine Roboter mit weniger als 6 Freiheitsgraden kann folglich nicht jede Pose im Arbeitsraum einnehmen, weshalb hier der praktische Arbeitsraum eine Teilmenge des erreichbaren Arbeitsraum bildet. Für eine Konfiguration mit Dreh- und Schubgelenken (mit jeweils einem Freiheitsgrad) ist leicht ersichtlich, dass sich der Arbeitsraum aus ebenen, zylindrischen, kugelförmigen und toroidalen Flächenelementen zusammensetzt. Aufgrund von Abweichungen zwischen den kinematischen Gleichungen und der realen Roboterkonfiguration, beispielsweise durch Fertigungstoleranzen oder Gelenkspiel, ist im Allgemeinen der berechnete Arbeitsraum nicht identisch zum realen Arbeitsraum des Roboters.

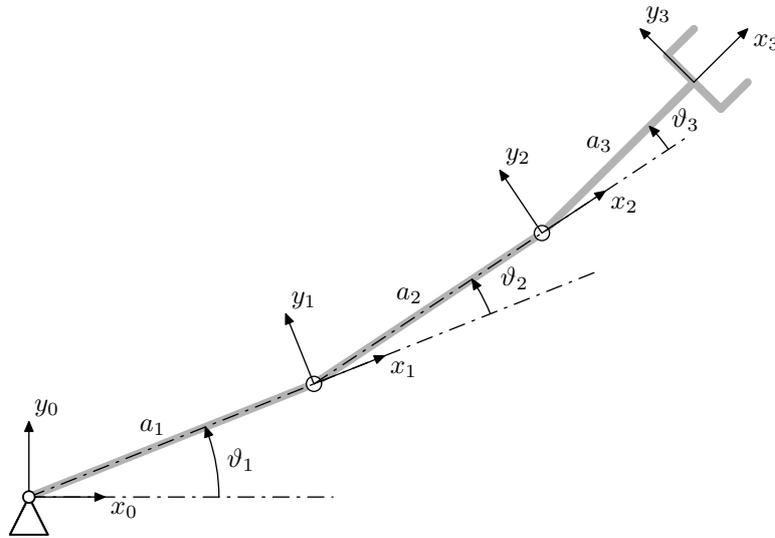
Ein weiterer wichtiger Begriff ist die so genannte *Wiederholgenauigkeit*, welche ein Maß dafür ist, wie genau der Roboter zu einer zuvor erreichte Position zurückkehren kann. Hierzu sind typischerweise Werte in den jeweiligen Datenblättern angegeben. Die Wiederholgenauigkeit unterscheidet sich von der *absoluten Genauigkeit*, welche ca. eine Zehnerpotenz größer ist.

#### 4.2.2 Inverse Kinematik

Während die direkte Kinematik (4.8) bzw. (4.19) eine algebraische Beziehung zwischen den Gelenkkordinaten bzw. den generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q}$  und der Pose des Endeffektors liefert, befasst sich die *inverse Kinematik* mit der Bestimmung der Gelenkkordinaten aus einer gegebenen Pose. Anders ausgedrückt führt die inverse Kinematik auf eine Abbildung aus dem *Operational Space* in den Gelenkraum, was z.B. zur Lösung von Bahnplanungsaufgaben von Interesse ist. Dabei ist zu beachten, dass die Lösung des inversen kinematischen Problem im Vergleich zur direkten Kinematik erschwert ist, da im Allgemeinen ein nichtlineares System algebraischer Gleichungen gelöst werden muss, was auf mehrfache oder unendlich viele Lösungen führen kann. Zudem können Fälle existieren, in denen keine Lösung möglich ist bzw. die Lösung nicht zulässig ist, da geometrische Beschränkungen verletzt werden.

Grundsätzlich gilt, dass eine Lösung des inversen Problems nur dann existiert, wenn die Pose (Position und Orientierung) des Endeffektors Element des erreichbaren Arbeitsraums ist. Des Weiteren kann gezeigt werden, dass nicht nur die Anzahl der Freiheitsgrade für die Lösbarkeit eine Rolle spielt, sondern auch die Anzahl an von Null verschiedenen Denavit–Hartenberg–Parametern [1]. Geschlossene analytische Lösungen der inversen Kinematik sind meist nur für gewisse Konfigurationen bestimmbar, weshalb häufig numerische Lösungsverfahren eingesetzt werden. Im Folgenden wird anhand eines Beispiels exemplarisch ein analytischer Lösungsweg untersucht. Numerische Verfahren werden im Abschnitt 4.3 anhand der differentiellen Kinematik eingeführt.

**Beispiel 4.4 (Inverse Kinematik für einen Drei-Gelenk-Manipulator).** Im Weiteren wird die Bestimmung der inversen Kinematik für den in Beispiel 4.1 betrachteten planaren Drei-Gelenk-Manipulator dargestellt.



**Abb. 4.9:** Planarer Drei-Gelenk-Manipulator.

Mit den dortigen Ausführungen ergibt sich die Vorwärtskinematik zu

$$H_0^3 = \begin{bmatrix} R_0^3 & \mathbf{d}_0^3 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} & -s_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} & 0 & a_1 c_{\vartheta_1} + a_2 c_{\vartheta_1+\vartheta_2} + a_3 c_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} \\ s_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} & c_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} & 0 & a_1 s_{\vartheta_1} + a_2 s_{\vartheta_1+\vartheta_2} + a_3 s_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Die generalisierten Koordinaten entsprechen hierbei den Winkeln der Drehgelenke, d.h.  $q_j = \vartheta_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Aufgrund der planaren Konfiguration erfolgen alle Rotationen um die jeweilige  $z_j$ -Achse. Ein Vergleich der Rotationsmatrix  $R_0^3$  mit einer allgemeinen Rotationsmatrix  $R_{z,\phi}$  zur Beschreibung der Orientierung des Koordinatensystems  $(0_3 x_3 y_3 z_3)$  bzgl.  $(0_0 x_0 y_0 z_0)$  in Abhängigkeit des vorgegebenen Werts  $\phi$  führt auf die algebraische Gleichung

$$\phi = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3. \quad (4.22)$$

Bezeichne  $\mathbf{p}_0^3$  die vorgegebene Position des Ursprungs des Koordinatensystems  $(0_3 x_3 y_3 z_3)$ . Dann gilt

$$\mathbf{p}_0^3 = \mathbf{d}_0^3$$

bzw. mit (4.22)

$$p_{0,x}^3 = a_1 c_{\phi-\vartheta_2-\vartheta_3} + a_2 c_{\phi-\vartheta_3} + a_3 c_{\phi} \quad (4.23)$$

$$p_{0,y}^3 = a_1 s_{\phi-\vartheta_2-\vartheta_3} + a_2 s_{\phi-\vartheta_3} + a_3 s_{\phi}. \quad (4.24)$$

Dies führt mit der Substitution  $\beta = \phi - \vartheta_3$  auf

$$a_1 c_{\beta-\vartheta_2} + a_2 c_{\beta} = p_{0,x}^3 - a_3 c_{\phi} =: \bar{p}_{0,x} \quad (4.25)$$

$$a_1 s_{\beta-\vartheta_2} + a_2 s_{\beta} = p_{0,y}^3 - a_3 s_{\phi} =: \bar{p}_{0,y}. \quad (4.26)$$

Quadrieren der jeweils linken und rechten Seiten der beiden Gleichungen und addieren der resultierenden Terme liefert

$$(a_1)^2 + (a_2)^2 + 2a_1 a_2 c_{\vartheta_2} = (\bar{p}_{0,x})^2 + (\bar{p}_{0,y})^2$$

Auflösen nach  $c_{\vartheta_2}$  führt somit auf

$$c_{\vartheta_2} = \frac{(\bar{p}_{0,x})^2 + (\bar{p}_{0,y})^2 - (a_1)^2 - (a_2)^2}{2a_1 a_2}. \quad (4.27)$$

Als Alternative zur Bildung des arccos kann auch von  $s_{\vartheta_2} = \pm \sqrt{1 - (c_{\vartheta_2})^2}$  Gebrauch gemacht werden, wodurch sich die Beziehung

$$\vartheta_2 = \arctan \frac{s_{\vartheta_2}}{c_{\vartheta_2}} = \arctan \frac{\pm \sqrt{1 - (c_{\vartheta_2})^2}}{c_{\vartheta_2}} \quad (4.28)$$

ergibt, in der  $c_{\vartheta_2}$  durch den Term (4.27) zu ersetzen ist. Hierbei wird  $c_{\vartheta_2} \neq 0$  vorausgesetzt. Die Bestimmung von  $\beta$  bzw.  $\vartheta_3$  erfolgt durch die simultane Lösung des algebraischen Gleichungssystems (4.25) nach  $s_\beta$  und  $\cos(\beta)$ , d.h.

$$s_\beta = \frac{a_1 s_{\vartheta_2} \bar{p}_{0,x} + \bar{p}_{0,y} (a_2 + a_1 c_{\vartheta_2})}{(a_1)^2 + (a_2)^2 + 2a_1 a_2 c_{\vartheta_2}} = \frac{a_1 s_{\vartheta_2} \bar{p}_{0,x} + \bar{p}_{0,y} (a_2 + a_1 c_{\vartheta_2})}{(\bar{p}_{0,x})^2 + (\bar{p}_{0,y})^2} \quad (4.29a)$$

$$c_\beta = \frac{-a_1 s_{\vartheta_2} \bar{p}_{0,y} + \bar{p}_{0,x} (a_2 + a_1 c_{\vartheta_2})}{(a_1)^2 + (a_2)^2 + 2a_1 a_2 c_{\vartheta_2}} = \frac{-a_1 s_{\vartheta_2} \bar{p}_{0,y} + \bar{p}_{0,x} (a_2 + a_1 c_{\vartheta_2})}{(\bar{p}_{0,x})^2 + (\bar{p}_{0,y})^2}. \quad (4.29b)$$

Für  $c_\beta \neq 0$  führt dies auf

$$\vartheta_3 = \phi - \arctan \frac{s_\beta}{c_\beta}, \quad (4.30)$$

wobei die eben ermittelten Ausdrücke einzusetzen sind. Mit der algebraischen Gleichung (4.22) folgt schließlich

$$\vartheta_1 = \phi - \vartheta_2 - \vartheta_3. \quad (4.31)$$

Diese Berechnungen führen auf verschiedene Einschränkungen:

(i) Die Gleichung (4.27) bedingt, dass

$$-1 \leq \frac{(\bar{p}_{0,x})^2 + (\bar{p}_{0,y})^2 - (a_1)^2 - (a_2)^2}{2a_1 a_2} \leq 1,$$

da der Endeffektor sonst außerhalb des Arbeitsraums wäre.

(ii) Die Gleichungen (4.29) setzen voraus, dass

$$-1 \leq \frac{a_1 s_{\vartheta_2} \bar{p}_{0,x} + \bar{p}_{0,y} (a_2 + a_1 c_{\vartheta_2})}{(a_1)^2 + (a_2)^2 + 2a_1 a_2 c_{\vartheta_2}} \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{-a_1 s_{\vartheta_2} \bar{p}_{0,y} + \bar{p}_{0,x} (a_2 + a_1 c_{\vartheta_2})}{(a_1)^2 + (a_2)^2 + 2a_1 a_2 c_{\vartheta_2}} \leq 1.$$

Der Weiteren sind Sonderfälle zu berücksichtigen. Für  $s_{\vartheta_2} = 0$  bzw.  $c_{\vartheta_2} = \pm 1$  ergibt sich  $\vartheta_2 \in \{0, \pm\pi\}$ , was auf eine so genannte kinematische Singularität (vgl. Abschnitt 4.3.2) führt. In diesen Fällen liefert die Auswertung von (4.29) wegen  $(s_{\beta})^2 + (c_{\beta})^2 = 1$  die Bedingungen

$$(\bar{p}_{0,x})^2 + (\bar{p}_{0,y})^2 = (p_{0,x}^3 - a_3 c_{\phi})^2 + (p_{0,y}^3 - a_3 s_{\phi})^2 = \begin{cases} (a_1 + a_2)^2 & \text{für } \vartheta_2 = 0 \\ (a_1 - a_2)^2 & \text{für } \vartheta_2 \in \{-\pi, \pi\} \end{cases}.$$

Diese können so interpretiert werden, dass – wie selbstverständlich – die Position des Endeffektors nicht außerhalb des praktischen Arbeitsraums liegen kann.

Eine graphische Darstellung der Lösung der inversen Kinematik für den betrachteten planaren Drei-Gelenk-Manipulator zeigt Abbildung 4.10. Das zur Erzeugung der Graphiken genutzte MATLAB-Script folgt.

```
%Desired position and orientation
%-----
p.x = 1;
p.y = 1;
p.phi = 0;

%Robot parameters
%-----
r.a(1) = 1;
r.a(2) = 0.75;
r.a(3) = 0.5;

%Desired position and orientation
%-----
pb.x = p.x - r.a(3)*cos(p.phi);
pb.y = p.y - r.a(3)*sin(p.phi);

%Use analytical solution of inverse kinematics
%-----

%%Angle vartheta2
cvt2 = ((pb.x)^2+(pb.y)^2-(r.a(1))^2-(r.a(2))^2)/(2.0*r.a(1)* ...
        r.a(2));
if abs(cvt2)>1
    error(sprintf('Not feasible since cos(vt_2)=%1.2f!',cvt2));
end
svt2 = sqrt(1.0-cvt2^2);
vt(2,1) = angle(cvt2+i*svt2); %atan2(svt2,cvt2);
vt(2,2) = -vt(2,1);

%%Angle vartheta3
cvt3 = (-r.a(1)*pb.y*sin(vt(2,:))+pb.x*(r.a(2)+r.a(1)*cos(vt(2,:)))/...
        (r.a(1)^2+r.a(2)^2+2.0*r.a(1)*r.a(2)*cos(vt(2,:)));
svt3 = (r.a(1)*pb.x*sin(vt(2,:))+pb.y*(r.a(2)+r.a(1)*cos(vt(2,:)))/...
        (r.a(1)^2+r.a(2)^2+2.0*r.a(1)*r.a(2)*cos(vt(2,:)));
vt(3,:) = p.phi - angle(cvt3+i*svt3); %atan2(svt3,cvt3)-pi/2;
```

```

%%Angle vartheta1
vt(1,:) = p.phi-vt(2,:)-vt(3,:);

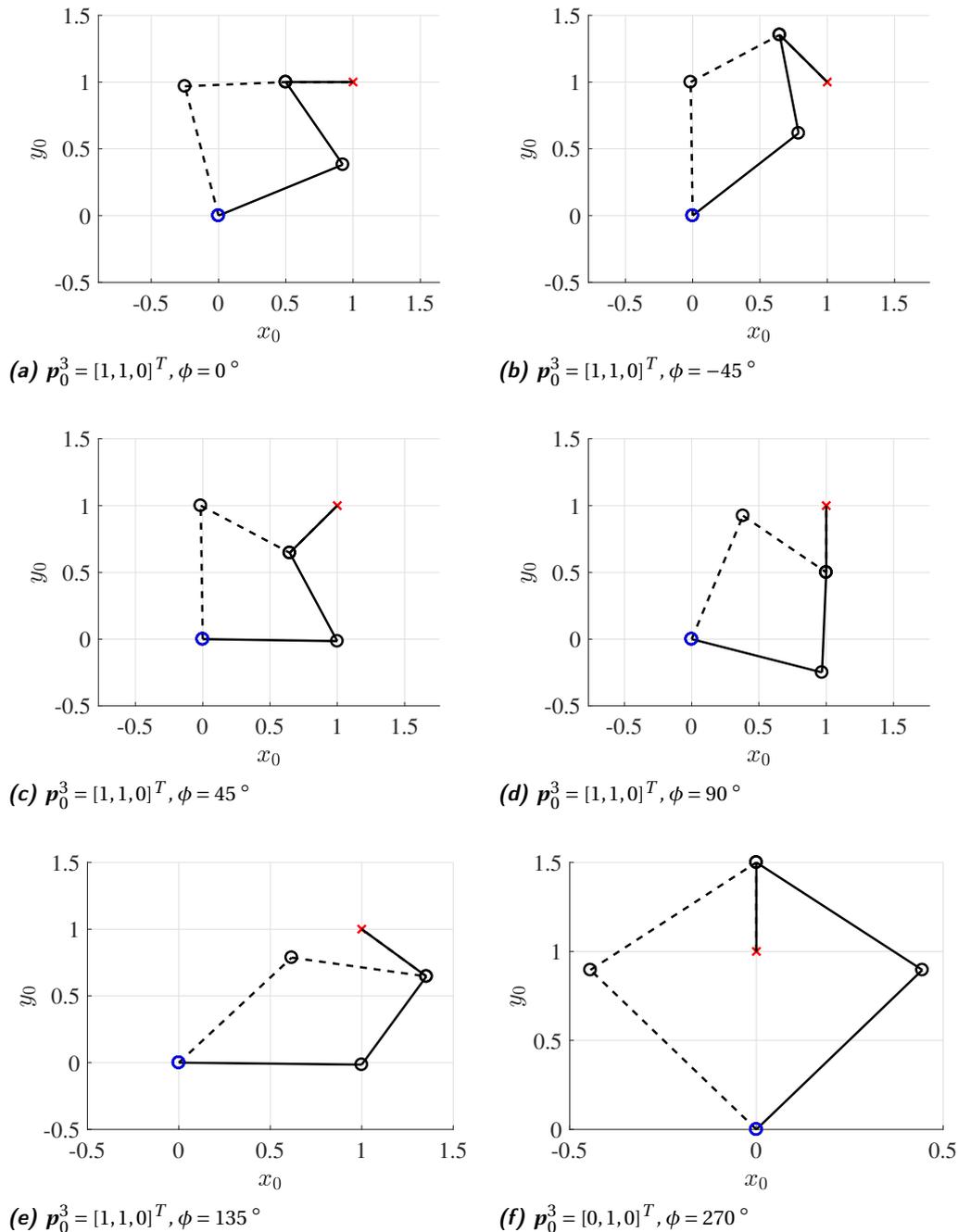
%Build homogeneous transformations
%-----
for j=1:size(vt,1)
    for k=1:size(vt,2)
        H{j,k} = [cos(vt(j,k)), -sin(vt(j,k)), 0, r.a(j)*cos(vt(j,k)); ...
                 sin(vt(j,k)),  cos(vt(j,k)), 0, r.a(j)*sin(vt(j,k)); ...
                 0,0,1,0; ...
                 0,0,0,1];
    end
end

%Determine position and orientation of joints
%-----
J{1,1} = H{1,1};
J{1,2} = H{1,2};
for j=2:size(vt,1)
    for k=1:size(vt,2)
        J{j,k} = J{j-1,k}*H{j,k};
    end
end

%Extract rotation matrix and translatory vector
%-----
for j=1:size(vt,1)
    for k=1:size(vt,2)
        d{j+1,k} = J{j,k}(1:3,end);
        R{j+1,k} = J{j,k}(1:3,1:3);
    end
end

%Build plot
%-----
figure; hold on; grid on;
plot(p.x,p.y,'rx','Markersize',10);
d{1,1} = zeros(3,1); d{1,2} = zeros(3,1);
for j=1:size(vt,1)
    for k=1:size(vt,2)
        if k==1
            plot([d{j,k}(1),d{j+1,k}(1)], [d{j,k}(2),d{j+1,k}(2)], 'k-');
            plot(d{j,k}(1),d{j,k}(2), 'ko', 'Markersize',10);
        else
            plot([d{j,k}(1),d{j+1,k}(1)], [d{j,k}(2),d{j+1,k}(2)], 'k--');
            plot(d{j,k}(1),d{j,k}(2), 'ko', 'Markersize',10);
        end
    end
end
end
plot(0,0,'bo','Markersize',10);

```



**Abb. 4.10:** Lösung der inversen Kinematik für den planaren Drei-Gelenk-Manipulator. Die Position des Endeffektors ist durch  $\times$  und die Basis durch  $\circ$  markiert. Die beiden möglichen Lösungen sind mit der durchgezogenen und der gestrichelten Linie gezeigt.

Weitere Beispiele für unterschiedliche Manipulator-Konfigurationen sind z.B. in [1, Kap. 2.12] zu finden. Das vorherige Beispiel zeigt, dass bereits für einfache planare Konfigurationen Fallunterscheidungen getroffen werden müssen. Des Weiteren sind im Allgemeinen Beschränkungen der Freiheitsgrade zu berücksichtigen, was auch eine numerische Lösung der Gleichungen erschwert.

### 4.3 Differenzielle Kinematik

Unter dem Begriff der *differenziellen Kinematik* versteht man die Beziehung zwischen Gelenksgeschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{q}}$  und der translatorischen Geschwindigkeit sowie der Drehwinkelgeschwindigkeit des Endeffektors in Abhängigkeit von  $\mathbf{q}$ . Diese Abbildung ist durch die so genannte *geometrische (Manipulator) Jacobi-Matrix* gegeben. Des Weiteren existiert die so genannte *analytische (Manipulator) Jacobi-Matrix*, welche sich unter gewissen Voraussetzungen durch die Differenziation der Gleichungen der Vorwärtskinematik nach  $\mathbf{q}$  ergibt. Im Allgemeinen unterscheiden sich diese beiden Jacobi-Matrizen.

#### 4.3.1 Geometrische Manipulator Jacobi-Matrix

Für einen Manipulator mit  $n$  Freiheitsgraden kann die homogene Transformation zwischen Basis- und Endeffektor-Koordinatensystem allgemein in der Form (4.6), d.h.

$$H_b^e(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} R_0^e(\mathbf{q}) & \mathbf{d}_0^e(\mathbf{q}) \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad R_0^e(\cdot) \in SO(3) \quad (4.32)$$

angegeben werden mit  $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$ . In Analogie zu den Ausführungen in Anmerkung 3.4 folgen für die translatorische Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_0^e = \dot{\mathbf{d}}_0^e(\mathbf{q})$  und die Drehwinkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_0^e$  des Endeffektors ausgedrückt im Basis-Koordinatensystem die Beziehungen

$$\mathbf{v}_0^e = J_v^e(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad \boldsymbol{\omega}_0^e = J_\omega^e(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (4.33)$$

bzw.

$$\mathbf{w}_0^e = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0^e \\ \boldsymbol{\omega}_0^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_v^e(\mathbf{q}) \\ J_\omega^e(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = J^e(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (4.34)$$

mit  $J^e(\mathbf{q})$  der *geometrischen Manipulator Jacobi-Matrix* und dem so genannten *Twist*  $\mathbf{w}_0^e(t)$ . Für die weitere Analyse werden zunächst in kompakter Form einige Ergebnisse aus Kapitel 2 zusammengefasst.

##### 4.3.1.1 Rotationsmatrizen und Drehwinkelgeschwindigkeit

Aus der Eigenschaft der Orthogonalität der Rotationsmatrix  $R(t)R^T(t) = E$  kann durch Differenziation bezüglich  $t$  die schiefsymmetrische Matrix

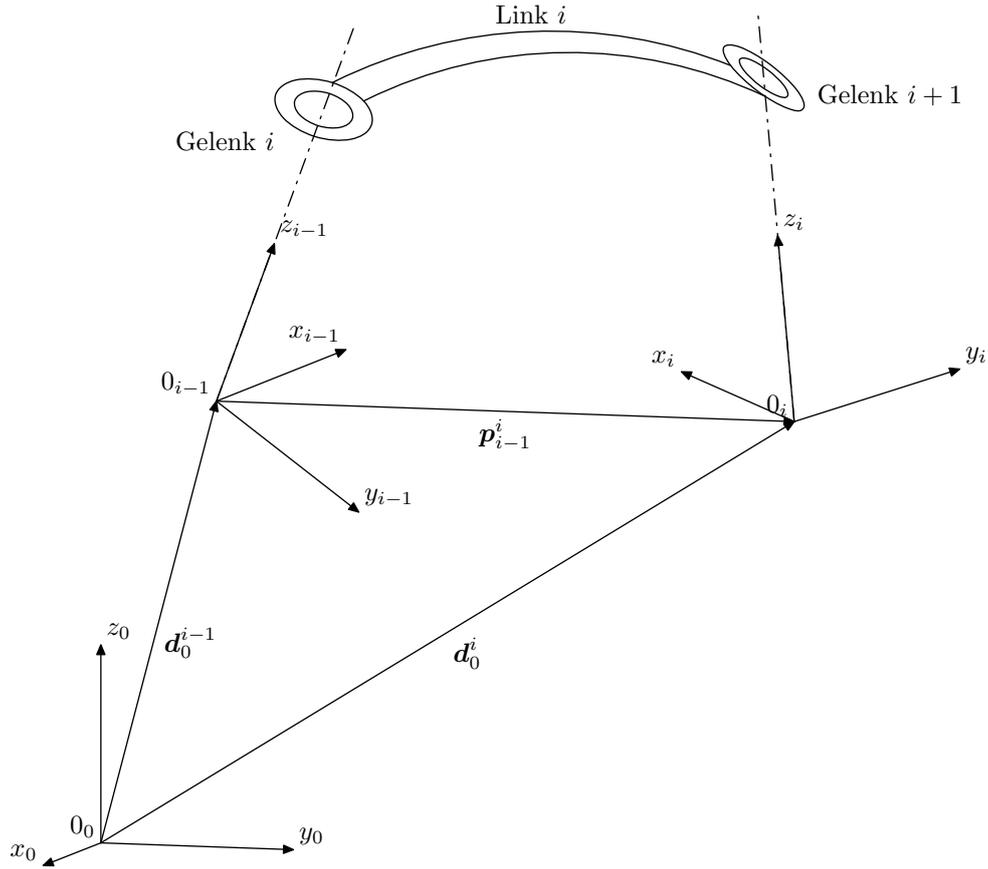
$$S = \dot{R}R^T = -R\dot{R}^T \quad (4.35)$$

identifiziert werden, welche die Gleichung  $S(t) + S^T(t) = 0$  erfüllt. Aufgrund der Schiefsymmetrie kann  $S(t)$  eindeutig durch den Vektor  $\boldsymbol{\omega}(t) = [\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)]^T$  der Drehwinkelgeschwindigkeit ausgedrückt werden

$$S(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Dies führt auf

$$\dot{R} = S(\boldsymbol{\omega})R. \quad (4.37)$$



**Abb. 4.11:** Zur Charakterisierung der Manipulator-Gelenkgeschwindigkeit.

In der in Abbildung 2.11 betrachteten Konfiguration führt das Koordinatensystem  $(0x_1y_1z_1)$  translatorische und rotatorische Bewegungen bezüglich des Inertialsystems  $(0x_0y_0z_0)$  so aus, dass der Vektor  $\mathbf{p}_1$  zum Punkt  $P$  im Koordinatensystem  $(0x_1y_1z_1)$  zeitlich konstant ist, d.h.  $\dot{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{0}$ . Mit  $\mathbf{p}_0(t) = \mathbf{d}_0^1(t) + R_0^1(t)\mathbf{p}_1$  ergibt sich die Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{p}}_0(t)$  bezüglich des Inertialsystems zu

$$\dot{\mathbf{p}}_0 = \dot{\mathbf{d}}_0^1 + \dot{R}_0^1\mathbf{p}_1 + R_0^1\dot{\mathbf{p}}_1 = \dot{\mathbf{d}}_0^1 + S(\boldsymbol{\omega}_0^1)R_0^1\mathbf{p}_1 = \dot{\mathbf{d}}_0^1 + \boldsymbol{\omega}_0^1 \times (R_0^1\mathbf{p}_1). \quad (4.38)$$

Des Weiteren gilt die folgende Beziehung

$$RS(\boldsymbol{\omega})R^T = S(R\boldsymbol{\omega}). \quad (4.39)$$

#### 4.3.1.2 Manipulator-Gelenkgeschwindigkeiten

Die weiteren Ausführungen gehen von der in Abbildung 4.11 gezeigten Konfiguration einer offenen kinematischen Kette aus, wobei die Denavit-Hartenberg-Konvention zur Anordnung der Koordinatensysteme genutzt wird. Dabei werden durch *Link i* die Gelenke  $i$  und  $i+1$  starr verbunden. Der Ursprung des Koordinatensystem bzw. des *Frames*  $(0_ix_iy_iz_i)$  des *Links i* liegt auf der Drehachse des Gelenks  $i+1$ . Analog ist der Ursprung des Koordinatensystem  $(0_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1})$  auf der Drehachse von Gelenk  $i$  platziert. Die Koordinatensysteme sind translatorisch (wie in der Abbildung dargestellt) durch die Vektoren  $\mathbf{d}_0^{i-1}(t)$ ,  $\mathbf{d}_0^i(t)$ ,  $\mathbf{p}_{i-1}^i(t)$  und rotatorisch durch die Rotationsmatrizen  $R_0^{i-1}(t)$ ,  $R_0^i(t)$  und  $R_{i-1}^i(t)$  verbunden. Damit folgt die Beziehung

$$\mathbf{d}_0^i = \mathbf{d}_0^{i-1} + R_0^{i-1}\mathbf{p}_{i-1}^i.$$

Differenziation nach  $t$  führt auf

$$\dot{\mathbf{d}}_0^i = \dot{\mathbf{d}}_0^{i-1} + \underbrace{R_0^{i-1} \dot{\mathbf{p}}_{i-1}^i}_{= \dot{\mathbf{p}}_0^{i-1,i}} + \boldsymbol{\omega}_0^{i-1} \times \underbrace{(R_0^{i-1} \mathbf{p}_{i-1}^i)}_{= \mathbf{p}_0^{i-1,i}} = \dot{\mathbf{d}}_0^{i-1} + \dot{\mathbf{p}}_0^{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_0^{i-1} \times \mathbf{p}_0^{i-1,i}. \quad (4.40)$$

Die Rotationsmatrizen hängen über die Beziehung

$$R_0^i = R_0^{i-1} R_{i-1}^i$$

zusammen. Eine Übertragung des Vorgehens in Abschnitt 2.6 liefert den Zusammenhang zwischen den Drehwinkelgeschwindigkeiten  $\boldsymbol{\omega}_0^{i-1}(t)$ ,  $\boldsymbol{\omega}_0^i(t)$  und  $\boldsymbol{\omega}_{i-1}^i(t)$ , welcher sich gemäß (2.47) zu

$$\boldsymbol{\omega}_0^i = \boldsymbol{\omega}_0^{i-1} + R_0^{i-1} \boldsymbol{\omega}_{i-1}^i. \quad (4.41)$$

ergibt. Abhängig vom Gelenkstyp (Schubgelenk oder Drehgelenk) können die folgenden Zusammenhänge ermittelt werden:

- (i) Bei einem *Schubgelenk* bleibt die Orientierung des Koordinatensystems  $(0_i x_i y_i z_i)$  bezüglich des Koordinatensystems  $(0_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1})$  bei einer Bewegung des Gelenks  $i$  unverändert. Entsprechend der Denavit–Hartenberg–Konvention erfolgt die translatorische Bewegung entlang der  $\mathbf{e}_{z_{i-1}}$ -Achse mit dem Denavit–Hartenberg–Parameter  $d_i(t)$ . Dies führt auf

$$\boldsymbol{\omega}_{i-1}^i = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{p}}_0^{i-1,i} = \dot{d}_i \mathbf{e}_{z_{i-1}}. \quad (4.42)$$

Damit ergeben sich aus (4.40) und (4.41) die folgenden Beziehungen

$$\dot{\mathbf{d}}_0^i = \dot{\mathbf{d}}_0^{i-1} + \dot{d}_i \mathbf{e}_{z_{i-1}} + \boldsymbol{\omega}_0^{i-1} \times \mathbf{p}_0^{i-1,i} \quad (4.43a)$$

$$\boldsymbol{\omega}_0^i = \boldsymbol{\omega}_0^{i-1}. \quad (4.43b)$$

- (ii) Für ein *Drehgelenk* führt die Denavit–Hartenberg–Konvention mit dem Denavit–Hartenberg–Parameter  $\vartheta_i(t)$  auf

$$R_0^{i-1} \boldsymbol{\omega}_{i-1}^i = \dot{\vartheta}_i \mathbf{e}_{z_{i-1}}. \quad (4.44)$$

Zudem gilt

$$\dot{\mathbf{p}}_0^{i-1,i} = (R_0^{i-1} \boldsymbol{\omega}_{i-1}^i) \times (R_0^{i-1} \mathbf{p}_{i-1}^i) = (R_0^{i-1} \boldsymbol{\omega}_{i-1}^i) \times \mathbf{p}_0^{i-1,i} \quad (4.45)$$

Die Auswertung von (4.40) und (4.41) liefert die Beziehungen

$$\dot{\mathbf{d}}_0^i = \dot{\mathbf{d}}_0^{i-1} + (\boldsymbol{\omega}_0^{i-1} + R_0^{i-1} \boldsymbol{\omega}_{i-1}^i) \times \mathbf{p}_0^{i-1,i} = \dot{\mathbf{d}}_0^{i-1} + \boldsymbol{\omega}_0^i \times \mathbf{p}_0^{i-1,i} \quad (4.46a)$$

$$\boldsymbol{\omega}_0^i = \boldsymbol{\omega}_0^{i-1} + \dot{\vartheta}_i \mathbf{e}_{z_{i-1}}. \quad (4.46b)$$

#### 4.3.1.3 Berechnung der geometrischen Manipulator Jacobi–Matrix

Unter Berücksichtigung der im vorherigen Abschnitt ermittelten Darstellungen für die translatorische Geschwindigkeit und Drehwinkelgeschwindigkeit für ein einzelnes Gelenk wird im Folgenden die geometrische Manipulator Jacobi–Matrix für eine Gesamtstruktur abgeleitet.

Die Beiträge der einzelnen generalisierten Geschwindigkeitskomponenten  $\dot{q}_i(t)$  zum translatorischen Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}_0^e(t)$  folgen aus Kettenregel in der Form

$$\mathbf{v}_0^e = \frac{d\mathbf{d}_0^e(\mathbf{q})}{dt} = \frac{\partial \mathbf{d}_0^e(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{d}_0^e(\mathbf{q})}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (4.47)$$

Hierbei bilden die Vektoren  $\frac{\partial \mathbf{d}_0^e(\mathbf{q})}{\partial q_i}$  die einzelnen Spalten der entsprechenden Manipulator Jacobi-Matrix, d.h.

$$\mathbf{J}_v^e(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_{1,v}^e(\mathbf{q}) & \mathbf{j}_{2,v}^e(\mathbf{q}) & \cdots & \mathbf{j}_{n,v}^e(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{d}_0^e(\mathbf{q})}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{d}_0^e(\mathbf{q})}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{d}_0^e(\mathbf{q})}{\partial q_n} \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

Die Beiträge zum Vektor der Drehwinkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_0^e(t)$  folgen aus (4.41) bzw. (2.47) in der Form

$$\boldsymbol{\omega}_0^e = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega}_0^i = \sum_{i=1}^n \mathbf{j}_{i,\omega}^e \dot{q}_i, \quad (4.49)$$

woraus sich die entsprechende Manipulator Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J}_\omega^e = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_{1,\omega}^e & \mathbf{j}_{2,\omega}^e & \cdots & \mathbf{j}_{n,\omega}^e \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

spaltenweise ableiten lässt.

Dabei ergeben sich die einzelnen Beiträge abhängig von der Art des Gelenks:

- (i) Für ein *Schubgelenk* mit dem Freiheitsgrad  $q_i(t) = d_i(t)$  folgt aus (4.43a) der translatorische Anteil

$$\mathbf{j}_{i,v}^e(\mathbf{q}) = \mathbf{e}_{z_{i-1}}. \quad (4.51a)$$

Dies ist leicht ersichtlich, da in (4.43a) durch  $\mathbf{d}_0^{i-1}$  bzw.  $\boldsymbol{\omega}_0^{i-1}$  zwar Abhängigkeiten zu den generalisierten Koordinaten  $q_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, i-1$  induziert werden, jedoch nur  $\dot{d}_i \mathbf{e}_{z_{i-1}}$  von  $q_i(t) = d_i(t)$  abhängt. In analoger Weise lässt der rotatorische Anteil

$$\mathbf{j}_{i,\omega}^e(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (4.51b)$$

begründen. Der entsprechende  $i$ -te Spaltenvektor der geometrischen Manipulator Jacobi-Matrix (4.34) ergibt sich zusammenfassend zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_{i,v}^e(\mathbf{q}) \\ \mathbf{j}_{i,\omega}^e(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{z_{i-1}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

- (ii) Im Fall eines *Drehgelenks* sind die Ausführungen etwas komplizierter, da zunächst der Bezug zum Endeffektor geschaffen werden muss. Die sukzessive, rekursive Auswertung von (4.46b) unter Berücksichtigung von (4.41) führt auf

$$\mathbf{d}_0^n = \sum_{k=1}^n \left\{ \left( R_0^{k-1} \boldsymbol{\omega}_{k-1}^k \right) \times \left( \sum_{j=k}^n \mathbf{p}_0^{j-1,j} \right) \right\}, \quad (4.53)$$

woraus sich durch Extraktion des Summanden  $k = i$  der Ausdruck

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{d}}_0^n = \sum_{k=1}^{i-1} \left\{ \left( R_0^{k-1} \boldsymbol{\omega}_{k-1}^k \right) \times \left( \sum_{j=k}^n \mathbf{p}_0^{j-1,j} \right) \right\} + \left( R_0^{i-1} \boldsymbol{\omega}_{i-1}^i \right) \times \left( \sum_{j=i}^n \mathbf{p}_0^{j-1,j} \right) \\ + \sum_{k=i+1}^n \left\{ \left( R_0^{k-1} \boldsymbol{\omega}_{k-1}^k \right) \times \left( \sum_{j=k}^n \mathbf{p}_0^{j-1,j} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.54)$$

ergibt. Mit (4.44), d.h.  $R_0^{i-1} \boldsymbol{\omega}_{i-1}^i = \dot{\vartheta}_i \mathbf{e}_{z_{i-1}}$  folgt somit

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{d}}_0^n = \sum_{k=1}^{i-1} \left\{ \left( \dot{\vartheta}_k \mathbf{e}_{z_{k-1}} \right) \times \left( \sum_{j=k}^n \mathbf{p}_0^{j-1,j} \right) \right\} + \left( \dot{\vartheta}_i \mathbf{e}_{z_{i-1}} \right) \times \left( \sum_{j=i}^n \mathbf{p}_0^{j-1,j} \right) \\ + \sum_{k=i+1}^n \left\{ \left( \dot{\vartheta}_k \mathbf{e}_{z_{k-1}} \right) \times \left( \sum_{j=k}^n \mathbf{p}_0^{j-1,j} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Zur weiteren Vereinfachung kann von der Beziehung

$$\sum_{j=i}^n \mathbf{p}_0^{j-1,j} = \mathbf{d}_0^n - \mathbf{d}_0^{i-1}$$

für  $i = 1, 2, \dots, n-1$  zwischen der Position des Endeffektors  $\mathbf{d}_0^n$  bzw. des Ursprungs des Endeffektor-Koordinatensystem und der Position des Ursprungs des Koordinatensystems  $(0_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1})$  Gebrauch gemacht werden, was auf

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{d}}_0^n = \sum_{k=1}^{i-1} \left\{ \left( \dot{\vartheta}_k \mathbf{e}_{z_{k-1}} \right) \times \left( \mathbf{d}_0^n - \mathbf{d}_0^{k-1} \right) \right\} + \left( \dot{\vartheta}_i \mathbf{e}_{z_{i-1}} \right) \times \left( \mathbf{d}_0^n - \mathbf{d}_0^{i-1} \right) \\ + \sum_{k=i+1}^n \left\{ \left( \dot{\vartheta}_k \mathbf{e}_{z_{k-1}} \right) \times \left( \mathbf{d}_0^n - \mathbf{d}_0^{k-1} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.56)$$

führt. Hieraus wird leicht die Abhängigkeit vom Freiheitsgrad  $q_i(t) = \vartheta_i(t)$  sichtbar, so dass sich der translatorische Anteil durch Differenziation nach  $\vartheta_i$  zu

$$\mathbf{j}_{i,v}^e(\mathbf{q}) = \mathbf{e}_{z_{i-1}} \times \left( \mathbf{d}_0^n - \mathbf{d}_0^{i-1} \right) \quad (4.57a)$$

ergibt. Der rotatorische Anteil ist entsprechend

$$\mathbf{j}_{i,\omega}^e = \mathbf{e}_{z_{i-1}}, \quad (4.57b)$$

was zusammenfassend auf den  $i$ -ten Spaltenvektor der geometrischen Manipulator Jacobi-Matrix (4.34) führt, d.h.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_{i,v}^e(\mathbf{q}) \\ \mathbf{j}_{i,\omega}^e(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{z_{i-1}} \times \left( \mathbf{d}_0^n - \mathbf{d}_0^{i-1} \right) \\ \mathbf{e}_{z_{i-1}} \end{bmatrix}. \quad (4.58)$$

Für die Auswertung der ermittelten Ausdrücke (4.52) bzw. (4.58) ist die folgende Anmerkung zu berücksichtigen.

#### Anmerkung 4.2

Die Terme der einzelnen Spaltenvektoren der geometrischen Manipulator Jacobi-Matrix sind von den generalisierten Koordinaten, d.h. den Gelenkskoordinaten  $\mathbf{q}$  abhängig. Insbesondere gilt, dass  $\mathbf{e}_{z_{i-1}}$  der 3. Spaltenvektor der Rotationsmatrix  $R_0^{i-1}$  ist, d.h.

$$\mathbf{e}_{z_{i-1}} = R_0^1 R_1^2 \cdots R_{i-2}^{i-1} \mathbf{e}_z = R_0^{i-1} \mathbf{e}_z \quad (4.59)$$

mit  $\mathbf{e}_z = [0, 0, 1]^T$ . Die Rotationsmatrix  $R_0^{i-1}$  kann direkt aus der homogenen Transformation  $H_0^{i-1}$  abgelesen werden.

**Beispiel 4.5 (Geometrische Manipulator Jacobi-Matrix für einen Drei-Gelenk-Manipulator).** Für den in Abbildung 4.9 dargestellten Drei-Gelenk-Manipulator soll die geometrische Manipulator Jacobi-Matrix bestimmt werden. Da die Konfiguration nur drei Drehgelenke in einer offenen kinematischen Kette umfasst, folgt mit (4.58) die Matrix

$$\mathbf{J}^e(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{z_0} \times (\mathbf{d}_0^3 - \mathbf{d}_0^0) & \mathbf{e}_{z_1} \times (\mathbf{d}_0^3 - \mathbf{d}_0^1) & \mathbf{e}_{z_2} \times (\mathbf{d}_0^3 - \mathbf{d}_0^2) \\ \mathbf{e}_{z_0} & \mathbf{e}_{z_1} & \mathbf{e}_{z_2} \end{bmatrix}.$$

Mit den Positionsvektoren der Drehgelenke (vgl. Beispiel 4.1)

$$\mathbf{d}_0^0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{d}_0^1 = \begin{bmatrix} a_1 c_{\vartheta_1} \\ a_1 s_{\vartheta_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_0^2 = \begin{bmatrix} a_1 c_{\vartheta_1} + a_2 c_{\vartheta_1 + \vartheta_2} \\ a_1 s_{\vartheta_1} + a_2 s_{\vartheta_1 + \vartheta_2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.60)$$

$$\mathbf{d}_0^3 = \begin{bmatrix} a_1 c_{\vartheta_1} + a_2 c_{\vartheta_1 + \vartheta_2} + a_3 c_{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3} \\ a_1 s_{\vartheta_1} + a_2 s_{\vartheta_1 + \vartheta_2} + a_3 s_{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

folgen

$$\mathbf{d}_0^3 - \mathbf{d}_0^0 = \begin{bmatrix} a_1 c_{\vartheta_1} + a_2 c_{\vartheta_1 + \vartheta_2} + a_3 c_{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3} \\ a_1 s_{\vartheta_1} + a_2 s_{\vartheta_1 + \vartheta_2} + a_3 s_{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_0^3 - \mathbf{d}_0^1 = \begin{bmatrix} a_2 c_{\vartheta_1 + \vartheta_2} + a_3 c_{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3} \\ a_2 s_{\vartheta_1 + \vartheta_2} + a_3 s_{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$$\mathbf{d}_0^3 - \mathbf{d}_0^2 = \begin{bmatrix} a_3 c_{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3} \\ a_3 s_{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die Vektoren  $\mathbf{e}_{z_{i-1}}$ ,  $i = 0, 1, 2$  ergeben sich zu

$$\mathbf{e}_{z_0} = \mathbf{e}_{z_1} = \mathbf{e}_{z_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.62)$$

da sämtliche Rotationen um die jeweiligen  $z_{i-1}$ -Achse erfolgen. Auswerten der Kreuzprodukte in  $J^e(\mathbf{q})$  liefert

$$J^e(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_{\vartheta_1} - a_2 s_{\vartheta_1+\vartheta_2} - a_3 s_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} & -a_2 s_{\vartheta_1+\vartheta_2} - a_3 s_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} & -a_3 s_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} \\ a_1 c_{\vartheta_1} + a_2 c_{\vartheta_1+\vartheta_2} + a_3 c_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} & a_2 c_{\vartheta_1+\vartheta_2} + a_3 c_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} & a_3 c_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.63)$$

Da der Manipulator als planar angenommen wurde ( $m = 3$ ), ist es möglich die reduzierte Darstellung

$$\begin{bmatrix} v_{0,x}^e \\ v_{0,y}^e \\ \omega_{0,z}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 s_{\vartheta_1} - a_2 s_{\vartheta_1+\vartheta_2} - a_3 s_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} & -a_2 s_{\vartheta_1+\vartheta_2} - a_3 s_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} & -a_3 s_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} \\ a_1 c_{\vartheta_1} + a_2 c_{\vartheta_1+\vartheta_2} + a_3 c_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} & a_2 c_{\vartheta_1+\vartheta_2} + a_3 c_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} & a_3 c_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.64)$$

abzugeben, so dass  $n = m = 3$ , welches dem maximalen Rang von  $J^e(\mathbf{q})$  entspricht.

### 4.3.2 Kinematische Singularitäten

Gleichung (4.34), d.h.

$$\mathbf{w}_0^e = \begin{bmatrix} v_0^e \\ \omega_0^e \end{bmatrix} = J^e(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (4.65)$$

stellt eine Abbildung zwischen den Gelenksgeschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  und dem Geschwindigkeitsvektor (Twist) des Endeffektors  $\mathbf{w}_0^e$  dar, welche von der momentanen Gelenkskonfiguration  $\mathbf{q}(t)$  abhängig ist. Diejenigen Konfigurationen  $\mathbf{q}_s$ , welche in  $J^e(\mathbf{q}_s)$  einen Rangabfall erzeugen, werden als *kinematische Singularitäten* bezeichnet. Deren Bestimmung ist u.a. aufgrund der folgenden Argumente von Interesse [1].

- An kinematischen Singularitäten ist die Bewegungsfähigkeit des Manipulators eingeschränkt, da nicht jede Pose des Endeffektors eingenommen werden kann.
- In einer kinematischen Singularität besitzt die inverse Kinematik unendlich viele Lösungen.
- In der Umgebung einer kinematischen Singularität können geringe Geschwindigkeiten im *Operational Space* auf große Geschwindigkeiten im Gelenkraum führen.

**Beispiel 4.6 (Kinematische Singularitäten für einen Drei-Gelenk-Manipulator).** Die kinematischen Singularitäten des in Abbildung 4.9 gezeigten Drei-Gelenk-Manipulator können durch die Analyse des Rangs der geometrischen Manipulator Jacobi-Matrix ermittelt werden. Der maximale Rang von  $J^e(\mathbf{q})$  entspricht dem Spaltenrang, welcher sich maximal zu 3 ergibt.

Aus (4.63) kann leicht der translatorische Anteil extrahiert werden

$$J_v^e(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_{\vartheta_1} - a_2 s_{\vartheta_1+\vartheta_2} - a_3 s_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} & -a_2 s_{\vartheta_1+\vartheta_2} - a_3 s_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} & -a_3 s_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} \\ a_1 c_{\vartheta_1} + a_2 c_{\vartheta_1+\vartheta_2} + a_3 c_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} & a_2 c_{\vartheta_1+\vartheta_2} + a_3 c_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} & a_3 c_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

dessen Rang maximal den Wert 2 einnehmen kann. Der maximale Rang von  $J^e(\mathbf{q})$  wird durch die letzte Zeile der Matrix induziert, falls  $J_v^e(\mathbf{q})$  den Rang 2 besitzt. Eine kinematische Singularität

wird somit dann erzeugt, wenn  $J_v^e(\mathbf{q})$  den Rang 1 aufweist. Dies wird beispielsweise für  $\vartheta_2 = \vartheta_3 = 0$  erreicht. Eine kinematische Singularität ergibt sich somit für

$$\mathbf{q}_s = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

was einem vollständig gestreckten Manipulator entspricht.

Der in Beispiel 4.6 dargestellte Fall definiert eine so genannte *Rand-Singularität*, in welcher der Manipulator entweder vollständig gestreckt oder zusammengezogen ist. Es ist leicht einsichtig, dass Rand-Singularitäten in praktischen Anwendungen einfach vermeidbar sind.

Dem gegenüber existieren so genannte *interne Singularitäten*, welche innerhalb des erreichbaren Arbeitsraum auftreten. Im Gegensatz zu Rand-Singularitäten stellen diese eine nicht unerhebliche Problematik dar, da die entsprechenden Konfigurationen in jeglicher Situation zu vermeiden sind.

#### Anmerkung 4.3

Die Berechnung der kinematischen Singularitäten kann durch eine Entkopplung der Arm-Singularitäten (der ersten drei oder mehr *Links*) und der Handgelenk-Singularitäten (*Wrist Singularities*) vereinfacht werden. Der Leser wird hierzu auf [1, Kap. 3.3.1] verwiesen.

### 4.3.3 Inverse differenzielle Kinematik

Im Gegensatz zur inversen Kinematik (siehe Abschnitt 4.2.2), welche die Lösung eines nichtlinearen Systems algebraischer Gleichungen erfordert, vereinfacht sich die Analyse im Fall der *inversen differenziellen Kinematik*. Dies ist dadurch begründet, dass (4.34) bzw.

$$\mathbf{w}_0^e = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0^e \\ \boldsymbol{\omega}_0^e \end{bmatrix} = J^e(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (4.67)$$

eine *lineare Abbildung* zwischen  $\dot{\mathbf{q}}(\cdot)$  und  $\mathbf{w}_0^e(\cdot)$  definiert, die von der aktuellen Konfiguration  $\mathbf{q}(\cdot)$  abhängig ist. Zur Lösung der Inversionsaufgabe werden im Weiteren zwei Fälle unterschieden:  $r = n$  und  $r < n$  mit  $n = \dim \dot{\mathbf{q}}$  und  $r = \dim \mathbf{w}_0^e \leq m$  mit  $m = 6$  (räumliche Konfiguration) oder  $m = 3$  (planare Konfiguration). Anders ausgedrückt repräsentieren  $n$  die Anzahl der mechanischen Freiheitsgrade bzw. der Gelenke,  $m$  die Dimension des *Operational Space* und  $r$  die Anzahl der linear unabhängigen Variablen im *Operational Space*, die notwendig ist, um eine Aufgabe (Pose) zu spezifizieren. Der Fall  $r = n$  wird als *nicht redundant* und der Fall  $r < n$  als *redundant* bezeichnet.

#### 4.3.3.1 Nicht-redundante Konfiguration

Für  $r = n$  ist die geometrische Manipulator Jacobi-Matrix  $J^e(\mathbf{q})$  quadratisch und somit außerhalb von kinematischen Singularitäten invertierbar. Dies führt auf

$$\dot{\mathbf{q}} = (J^e(\mathbf{q}))^{-1} \mathbf{w}_0^e. \quad (4.68)$$

Durch Vorgabe einer Geschwindigkeitstrajektorie  ${}^* \mathbf{w}_0^e(t)$  für den Endeffektor kann durch Lösen der Differenzialgleichung

$${}^* \dot{\mathbf{q}} = (J^e({}^* \mathbf{q}))^{-1} {}^* \mathbf{w}_0^e. \quad (4.69)$$

der entsprechende zeitliche Verlauf der Gelenkbewegung ( ${}^* \mathbf{q}(t), {}^* \dot{\mathbf{q}}(t)$ ) ermittelt werden.

#### 4.3.3.2 Redundante Konfiguration

Für  $r < n$  besitzt die geometrische Manipulator Jacobi-Matrix  $J^e(\mathbf{q})$  weniger Zeilen als Spalten, weshalb (4.67) unendlich viele Lösungen besitzt. Die Lösung der inversen differentiellen Kinematik bedingt deshalb die Nutzung anderer Verfahren. Dazu kann ein (beschränktes) Optimierungsproblems formuliert werden. Im Folgenden wird nur ein Ansatz zur Illustration des prinzipiellen Vorgehens zusammengefasst.

##### Anmerkung 4.4: Pseudoinverse

Die so genannte *Pseudoinverse* einer nicht-quadratischen Matrix  $J \in \mathbb{R}^{r \times n}$  mit  $r > n$  wird mit  $J^\dagger$  bezeichnet und ist definiert durch

$$J^\dagger = (J^T J)^{-1} J^T. \quad (4.70)$$

Die Pseudoinverse ist Lösung des statischen, quadratischen Optimierungsproblems

$$\min_{\mathbf{p}} \|\mathbf{y} - J\mathbf{p}\|_2^2 \quad (4.71)$$

für gegebenes  $\mathbf{y}$ . Die Auswertung der notwendigen Optimalitätsbedingung erster Ordnung (vgl. [5])

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} (\mathbf{y} - J\mathbf{p})^T (\mathbf{y} - J\mathbf{p}) = \mathbf{0}^T$$

führt auf  $J^\dagger$  und damit auf die optimale Lösung von  $\mathbf{y} = J\mathbf{p}$  im Sinne der quadratischen Minimierungsaufgabe (4.71). Da

$$J^\dagger J = E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

gilt, wird  $J^\dagger$  auch als *Links-Pseudoinverse* bezeichnet.

Für den Fall  $J \in \mathbb{R}^{r \times n}$  mit  $r < n$  lässt sich die *Rechts-Pseudoinverse*

$$J^\ddagger = J^T (J J^T)^{-1} \quad (4.72)$$

definieren, die die Beziehung

$$J J^\ddagger = E_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$$

erfüllt. Im Fall  $r < n$  existieren unendlich viele Lösungen  $\mathbf{p}$  des Gleichungssystems  $\mathbf{y} = J\mathbf{p}$ , die sich in der Form

$$\mathbf{p} = J^\ddagger \mathbf{y} + (E - J^\ddagger J) \mathbf{s} \quad (4.73)$$

für beliebige  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$  angeben lassen.

Mit den Ausführungen in Anmerkung 4.4 folgen die Lösungen der inversen differentiellen Kinematik zu

$$\dot{\mathbf{q}} = (J^e(\mathbf{q}))^\dagger \mathbf{w}_0^e + [E - (J^e(\mathbf{q}))^\dagger J^e(\mathbf{q})] \mathbf{s} \quad (4.74)$$

mit beliebigem Vektor  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ . Hierbei folgt der erste Term aus der Lösung einer Minimierungsaufgabe (vgl. Anmerkung 4.4) und der zweite Term stellt den Anteil dar, der durch  $J^e(\mathbf{q})$  auf  $\mathbf{0}$  abgebildet wird, also Element des Nullraums von  $J^e(\mathbf{q})$  ist. Zur Angabe des Vektors  $\mathbf{s}$  wird oftmals ein Ansatz der Form

$$\mathbf{s} = s_0 (\nabla_{\mathbf{q}} f)(\mathbf{q}) \quad (4.75)$$

gewählt, wobei  $s_0 > 0$  und  $f(\mathbf{q})$  eine geeignete Zielfunktion definiert und abhängig von der betrachteten Aufgabenstellung gewählt wird [1]. Mit dem Ziel, die so genannte *Manipulierbarkeit* zu verbessern, kann die Maximierung des Terms

$$f(\mathbf{q}) = \sqrt{\det[J^e(\mathbf{q})(J^e(\mathbf{q}))^T]} \quad (4.76)$$

betrachtet werden. Aufgrund der Determinantenbildung sollen kinematische Singularitäten vermieden werden. Weitere Beispiele für die Wahl von  $f(\mathbf{q})$  können der einschlägigen Literatur, beispielsweise [6, 7], entnommen werden.

#### 4.3.3.3 Kinematische Singularitäten

Nicht nur in einer kinematischen Singularität  $\mathbf{q}_s$ , sondern schon in der Umgebung einer solchen kann die Invertierbarkeit von (4.67) erschwert sein.

In einer kinematischen Singularität sind nur noch diejenigen Konfigurationen möglich, die im Bild der Matrix  $J^e(\mathbf{q}_s)$  liegen, d.h. für  $\mathbf{w}_0^e \in \text{ran} J^e(\mathbf{q}_s)$ . Bei numerischen Schwierigkeiten in der Lösungsfindung in der Umgebung einer kinematischen Singularität kann beispielsweise die *Singularwert-Zerlegung* von  $J^e(\mathbf{q})$  eine verbesserte und numerisch robustere Lösung erzeugen.

#### 4.3.4 Analytische Manipulator Jacobi-Matrix

Die *analytische Manipulator Jacobi-Matrix* basiert auf der Formulierung (4.17) in der die Pose des Endeffektors durch einen minimalen Satz an Variablen des *Operational Space* angegeben wird, d.h.

$$\mathbf{x}_b^e(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_b^e(\mathbf{q}) \\ \boldsymbol{\phi}_b^e(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_b^e \in \mathbb{R}^m.$$

Formal ergeben sich hieraus durch zeitliche Differenziation die Beziehungen

$$\dot{\mathbf{p}}_b^e = J_p^e(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad J_p^e(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{p}_b^e(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.77a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_b^e = J_\phi^e(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad J_\phi^e(\mathbf{q}) = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_b^e(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.77b)$$

und damit die Gleichung der entsprechenden differenziellen Kinematik

$$\dot{\mathbf{x}}_b^e = J_x^e(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad J_x^e(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} J_p^e(\mathbf{q}) \\ J_\phi^e(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \stackrel{(4.19)}{=} \frac{\partial \mathbf{k}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}. \quad (4.78)$$

Hier definiert  $J_x^e(\mathbf{q})$  die *analytische Manipulator Jacobi-Matrix*, welche sich von der geometrischen Manipulator Jacobi-Matrix dadurch unterscheidet, dass die Drehwinkelgeschwindigkeit  $\omega_0^e = \omega_b^e$  des Endeffektors bezüglich des Basis-Koordinatensystems nicht  $\dot{\phi}_b^e$  entspricht. Der Zusammenhang zwischen beiden kann für eine gegebene Parametrierung der Rotation ermittelt werden.

**Beispiel 4.7.** Für die Verwendung von Euler-Winkeln zur Parametrierung der Rotation eines Starrkörpers folgt gemäß Abschnitt 2.3.1, dass hierbei drei aufeinanderfolgende Drehungen durchgeführt werden, ausgehend von einem Inertialsystem  $(0x_0y_0z_0)$ :

- (i) um den Winkel  $\varphi$  bezüglich der  $z_0$ -Achse,
- (ii) um den Winkel  $\theta$  bezüglich der gedrehten, momentanen  $y$ -Achse ( $y'$ ) und
- (iii) um den Winkel  $\psi$  bezüglich der gedrehten, momentanen  $z$ -Achse ( $z''$ ).

Mit (4.46b) folgt daraus

$$\begin{aligned} \omega_b^e &= R_{z,\varphi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + R_{z,\varphi} R_{y,\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_{z,\varphi} R_{y,\theta} R_{z,\psi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} c_\varphi s_\theta - \dot{\theta} s_\varphi \\ \dot{\theta} c_\varphi + \dot{\psi} s_\theta s_\varphi \\ \dot{\psi} c_\theta + \dot{\varphi} \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -s_\varphi & c_\varphi s_\theta \\ 0 & c_\varphi & s_\theta s_\varphi \\ 1 & 0 & c_\theta \end{bmatrix}}_{= V(\phi_b^e)} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}}_{= \dot{\phi}_b^e} = V(\phi_b^e) \dot{\phi}_b^e. \end{aligned}$$

Wegen  $\det V(\phi_b^e) = -s_\theta = 0$  für  $\theta \in \{0, \pm\pi\}$  kann die ermittelte Beziehung für diese Elemente der Orientierung  $\phi_b^e$  nicht invertiert werden. Mit Verweis auf Abschnitt 2.3.1 sei bemerkt, dass diese Winkel der Singularität der Euler-Winkel entsprechen. Man bezeichnet diese Singularität in Zusammenhang mit der analytischen Manipulator Jacobi-Matrix auch als *Darstellungs-Singularität*.

Für einen bekannten Zusammenhang zwischen  $\omega_b^e$  und  $\dot{\phi}_b^e$ , d.h.  $\omega_b^e = V(\phi_b^e) \dot{\phi}_b^e$  ergibt sich unmittelbar die folgende Beziehung zwischen der analytischen Manipulator Jacobi-Matrix und der geometrischen Manipulator Jacobi-Matrix

$$\mathbf{w}_b^e = T(\phi_b^e) \dot{\mathbf{x}}_b^e, \quad T(\phi_b^e) = \begin{bmatrix} E & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & V(\phi_b^e) \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

bzw.

$$J^e(\mathbf{q}) = T(\phi_b^e) J_x^e(\mathbf{q}). \quad (4.80)$$

Im Allgemeinen sind  $J^e(\mathbf{q})$  und  $J_x^e(\mathbf{q})$  somit nicht identisch.

### 4.3.5 Numerische Lösungsverfahren für die inverse differenzielle Kinematik

Für den nicht-redundanten Fall stellt (4.68), d.h.

$$\dot{\mathbf{q}} = (J^e(\mathbf{q}))^{-1} \mathbf{w}_0^e, \quad (4.81)$$

das Differentialgleichungssystem dar, dessen Lösung durch Vorgabe des zeitlichen Verlaufs des *Twist*  $\mathbf{w}_0^e(t)$  und der Anfangsbedingung  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}^0$  den zeitlichen Verlauf der Gelenkbewegung  $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$  liefert. Im einfachsten Fall kann zur numerischen Lösung das explizite Euler-Verfahren verwendet werden, welches auf

$$\mathbf{q}(t_{k+1}) = \mathbf{q}(t_k) + \Delta t (J^e(\mathbf{q}(t_k)))^{-1} \mathbf{w}_0^e(t_k), \quad \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}^0$$

führt. Hierbei stellt  $\Delta t$  die zeitliche Diskretisierungsschrittweite dar. Dieses Verfahren ist jedoch aufgrund der eingeschränkten numerischen Stabilität nur bedingt anwendbar, so dass andere numerische Verfahren zur Lösung, beispielsweise Runge-Kutta-Verfahren oder implizite Verfahren, genutzt werden sollten. Des Weiteren treten durch die Diskretisierung Abweichungen auf, so dass nach der numerischen Lösung der stückweise konstante, zeitdiskrete Lösungsvektor  $\mathbf{q}(t_{k+1})$  und der zeitkontinuierliche Lösungsvektor  $\mathbf{q}(t)$  voneinander abweichen. Dies wird auch als *Drift* bezeichnet.

Für die weitere Analyse wird von der Vorgabe einer Pose des Endeffektors im *Operational Space* ausgegangen, so dass (4.17) mit (4.19) betrachtet wird. Für die entsprechenden Geschwindigkeiten führt dies gemäß (4.78) auf die Beschreibung der linearen Abbildung zwischen  $\dot{\mathbf{x}}_b^e(t)$  und  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  durch die analytische Manipulator Jacobi-Matrix  $J_x^e(\mathbf{q})$ . Sei  ${}^* \mathbf{x}_b^e(t)$  eine Solltrajektorie für die Pose  $\mathbf{x}_b^e(t)$  und bezeichne

$$\Delta \mathbf{x}_b^e = {}^* \mathbf{x}_b^e - \mathbf{x}_b^e$$

die Abweichung zwischen beiden. Die entsprechende zeitliche Änderung folgt mit (4.78) zu

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_b^e = {}^* \dot{\mathbf{x}}_b^e - \dot{\mathbf{x}}_b^e = {}^* \dot{\mathbf{x}}_b^e - J_x^e(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (4.82)$$

Die im Folgenden kurz zusammengefassten numerischen Lösungsverfahren für die inverse differenzielle Kinematik basieren auf der geeigneten Umformung von (4.82) und sind z.B. in [1] zu finden.

#### 4.3.5.1 Ansatz über die inverse analytische Manipulator Jacobi-Matrix

Abhängig vom Rang der analytischen Manipulator Jacobi-Matrix in (4.82) werden zwei Fälle unterschieden.

- Falls  $J_x^e$  vollen Rang besitzt und damit invertierbar ist, dann führt (4.82) auf

$$\dot{\mathbf{q}} = (J_x^e(\mathbf{q}))^{-1} [{}^* \dot{\mathbf{x}}_b^e - \Delta \dot{\mathbf{x}}_b^e].$$

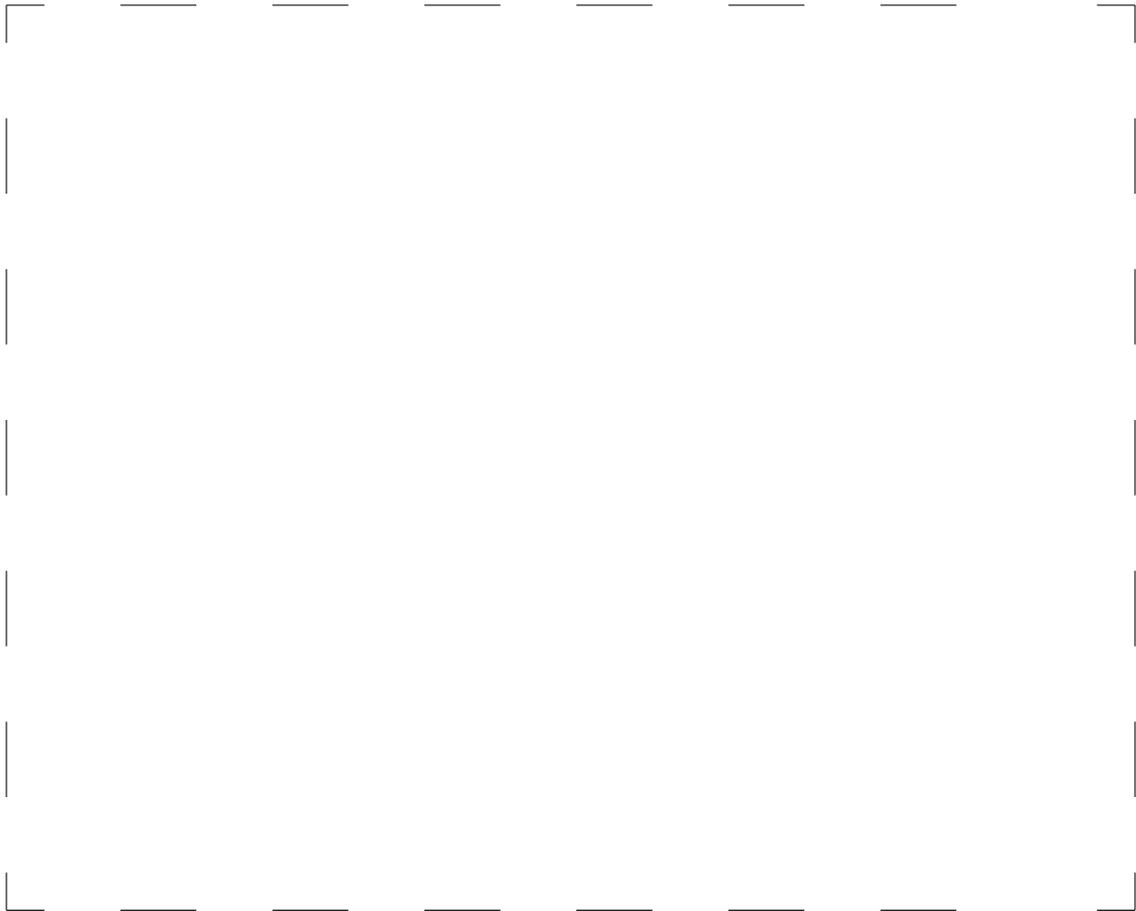
Mit der Wahl

$$\dot{\mathbf{q}} = (J_x^e(\mathbf{q}))^{-1} [{}^* \dot{\mathbf{x}}_b^e + K \Delta \dot{\mathbf{x}}_b^e], \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}^0 \quad (4.83a)$$

ergibt sich

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_b^e = -K \Delta \dot{\mathbf{x}}_b^e. \quad (4.83b)$$

Hierbei muss  $K$  eine positiv definite Matrix sein (d.h.  $K = K^T$  und alle Eigenwerte von  $K$  besitzen strikt negativen Realteil), so dass das Teilsystem (4.83b) asymptotisch stabil ist. Das zugehörige Blockdiagramm zeigt die folgende Abbildung.



**Abb. 4.12:** Blockdiagramm des Ansatzes (4.83a).

- Falls  $J_x^e$  *nicht vollen Rang* besitzt, d.h. eine redundante Konfiguration vorliegt, dann kann (4.83) unter Berücksichtigung von Anmerkung 4.4 bzw. (4.74) verallgemeinert werden durch

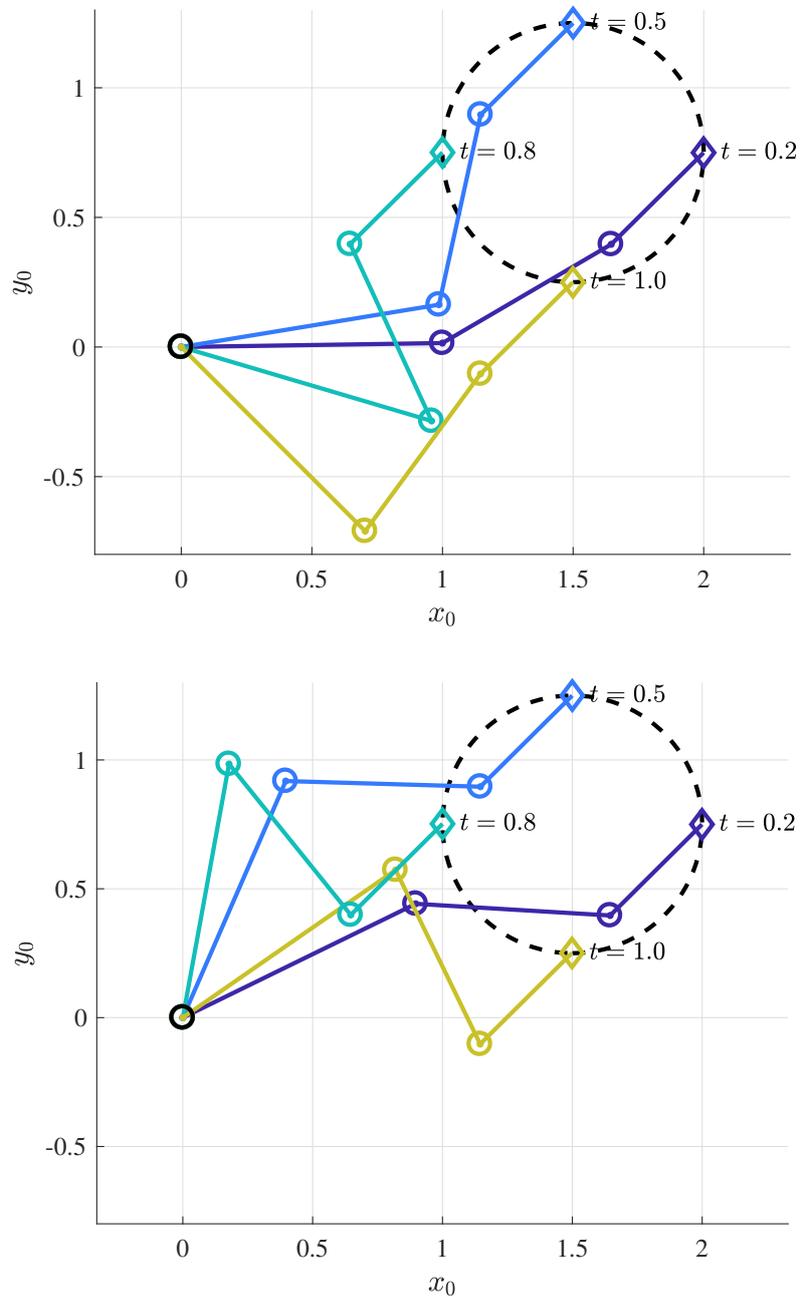
$$\dot{\mathbf{q}} = (J_x^e(\mathbf{q}))^\dagger [{}^* \dot{\mathbf{x}}_b^e + K \Delta \mathbf{x}_b^e] + [E - (J_x^e(\mathbf{q}))^\dagger J_x^e(\mathbf{q})] \mathbf{s}, \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}^0 \quad (4.84a)$$

mit der *Rechts-Pseudoinversen*  $(J_x^e(\mathbf{q}))^\dagger$  von  $J_x^e(\mathbf{q})$ , was wiederum auf die Fehlerdynamik

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_b^e = -K \Delta \mathbf{x}_b^e \quad (4.84b)$$

führt.

**Beispiel 4.8 (Lösung der inversen differentiellen Kinematik für den planaren Zwei-Gelenk-Manipulator).** Abbildung 4.13 zeigt die numerische Lösung der inversen differentiellen Kinematik mittels (4.83a) für den planaren Zwei-Gelenk-Manipulator.



**Abb. 4.13:** Numerische Ergebnisse zur Lösung der inversen differentiellen Kinematik mittels (4.83a) für den planaren Zwei-Gelenk-Manipulator.

Die beiden Lösungen unterscheiden sich rein in der Wahl des Anfangszustandes  $\mathbf{q}^0$ , welcher durch die Lösung der inversen Kinematik (vgl. Beispiel 4.4 mit den für eine Endeffektor-Konfiguration erhaltenen beiden Lösungen) bestimmt wird. Als Pose wird hierbei

$${}^* \mathbf{x}_b^e = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sin(2\pi t) \\ \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cos(2\pi t) \\ 45^\circ \end{bmatrix}$$

vorgegeben. Konsistente Anfangszustände zur Lösung von (4.83a) ergeben sich somit aus der Lösung des nichtlinearen algebraischen Gleichungssystems  $\mathbf{q}^0 = \mathbf{k}^{-1}({}^* \mathbf{x}_b^e(0))$ . Eine entsprechende Implementierung in MATLAB folgt untenstehend.

```
function out = threedof_inverse_differential_kinematics(r)
%
% -----
%Robot parameters
r.a(1) = 1;
r.a(2) = 0.75;
r.a(3) = 0.5;

%Time
t = linspace(0.0,1.0,101);
pb.t = t;

% -----
%Desired pose and velocity
pb.om = 2.0*pi;
pb.A = 0.5;
pb.x = 1.5+pb.A*sin(pb.om*t);
pb.y = 0.75-pb.A*cos(pb.om*t);
pb.p = 45*pi/180*ones(size(t));
pb.xe = [pb.x;pb.y;pb.p];

pb.xdot = pb.A*pb.om*cos(pb.om*t);
pb.ydot = pb.A*pb.om*sin(pb.om*t);
pb.pdot = zeros(size(t));
pb.xedot = [pb.xdot;pb.ydot;pb.pdot];

%Matrix K
pb.K = 1*eye(3);

% -----
%Solve ODE system for case 'inverse analytic Jacobian'

%% Initial stat -> assign consistent IC
q0 = fsolve(@(x)algsys_ic(x,pb.xe(:,1),r),randn(3,1));
x0 = q0;
[ty,y] = ode15s(@(t,x)ode_inv_anaJac(t,x,r,pb),t,x0);
y = y';
```

```

%% Compare with forward kinematics
fk = zeros(size(y));
for j=1:length(ty)
    fk(:,j) = forward_kinematics(y(:,j),r);
end

% -----
%Output
out.t = ty;
out.q = y;
out.fk = fk;

% -----
%Plotting

vt = y;

%%Build homogeneous transformations
for j=1:size(vt,1) %generalized coords q_1, q_2, q_3
    for k=1:size(vt,2) %time
        H{j,k} = [cos(vt(j,k)), -sin(vt(j,k)), 0, r.a(j)*cos(vt(j,k));...
                 sin(vt(j,k)),  cos(vt(j,k)), 0, r.a(j)*sin(vt(j,k));...
                 0, 0, 1, 0;...
                 0, 0, 0, 1];
    end
end

%%Determine position and orientation of joints
for k=1:size(vt,2) %time
    J{1,k} = H{1,k};
    J{2,k} = H{2,k};
    J{3,k} = H{3,k};
    for j=2:size(vt,1) %generalized coords q_1, q_2, q_3
        J{j,k} = J{j-1,k}*H{j,k};
    end
end

%%Extract rotation matrix and translatory vector
for k=1:size(vt,2) %time
    d{1,k} = zeros(3,1);
    d{1,k} = zeros(3,1);
    for j=1:size(vt,1) %generalized coords q_1, q_2, q_3
        d{j+1,k} = J{j,k}(1:3,end);
        R{j+1,k} = J{j,k}(1:3,1:3);
    end
end

%%Build plot
tt = [0.25,0.5,0.75,1.0];
for j=1:length(tt)

```

```

    dummy = find(ty>=tt(j));
    time_selected(j) = dummy(1);
end

col = colormap(parula(length(tt)+1));
figure; hold on; grid on;
plot(pb.x,pb.y,'k--');
for j=1:size(vt,1)
    m=1;
    for k=time_selected
        if k==time_selected(1)
            plot([d{j,k}(1),d{j+1,k}(1)], [d{j,k}(2),d{j+1,k}(2)] , '- ', ...
                'color',col(m,:));
            plot(d{j,k}(1),d{j,k}(2), 'o', 'Markersize',10, 'color',col(m,:));
            plot(d{j,k}(1),d{j,k}(2), '. ', 'Markersize',10, 'color',col(m,:));
        else
            plot([d{j,k}(1),d{j+1,k}(1)], [d{j,k}(2),d{j+1,k}(2)] , '- ', ...
                'color',col(m,:));
            plot(d{j,k}(1),d{j,k}(2), 'ko', 'Markersize',10, 'color',col(m,:));
            plot(d{j,k}(1),d{j,k}(2), 'k. ', 'Markersize',10, 'color',col(m,:));
        end
        m=m+1;
    end
end
m=1;
for k=time_selected
    plot(d{4,k}(1),d{4,k}(2), 'd', 'Markersize',10, 'color',col(m,:));
    text(d{4,k}(1),d{4,k}(2), sprintf('$\sim t=%1.1f$', ty(k)), ...
        'Interpreter', 'latex', 'fontsize',12);
    m=m+1;
end
plot(0,0, 'ko', 'Markersize',10);
axis equal;

% =====
% Subfunctions

function out = ode_inv_anaJac(t,x,r,pb)
%
q = x;
J = anaJac(q,r);
xed = interp1(pb.t,pb.xe',t)';
xedotd = interp1(pb.t,pb.xedot',t)';
xe = forward_kinematics(q,r);
err = xed-xe;
out = J\xededotd+pb.K*err);

% -----

function out = forward_kinematics(q,r)

```

```

%
%Reduced version
%
out = [r.a(1)*cos(q(1))+r.a(2)*cos(q(1)+q(2))+r.a(3)*cos(sum(q));
       r.a(1)*sin(q(1))+r.a(2)*sin(q(1)+q(2))+r.a(3)*sin(sum(q))
       sum(q)];

% -----

function out = geoJac(q,r)
%
%Reduced version
%
out = [-r.a(1)*sin(q(1))-r.a(2)*sin(q(1)+q(2))-r.a(3)*sin(sum(q)),...
       -r.a(2)*sin(q(1)+q(2))-r.a(3)*sin(sum(q)),...
       -r.a(3)*sin(sum(q));...
       r.a(1)*cos(q(1))+r.a(2)*cos(q(1)+q(2))+r.a(3)*cos(sum(q)),...
       r.a(2)*cos(q(1)+q(2))+r.a(3)*cos(sum(q)),...
       r.a(3)*cos(sum(q));...
       ones(1,3)];

% -----

function out = anaJac(q,r)
%
%Reduced version
%
%Recall that the 3DOF manipulator corresponds to a single
%orientation around the z_0-axis with an angle corresponding to the
%sum of the \vartheta_j angles.
%
%=> analytic and gemetric Jacobian match in this case
%
out = geoJac(q,r);

% -----

function out = algsys_ic(q,des,r)
%
f = zeros(size(q));
f(1) = r.a(1)*cos(q(1))+r.a(2)*cos(q(1)+q(2))+r.a(3)*cos(sum(q));
f(2) = r.a(1)*sin(q(1))+r.a(2)*sin(q(1)+q(2))+r.a(3)*sin(sum(q));
f(3) = sum(q);
%
out = f-des;

```

#### 4.3.5.2 Ansatz über die transponierte analytische Manipulator Jacobi-Matrix

Ein alternativer und im Allgemeinen rechnerisch effizienterer Ansatz basiert auf der Verwendung der transponierten analytischen Manipulator Jacobi-Matrix. Sei  $K$  eine positiv definite Matrix, dann erfolgt hierbei die Berechnung des Gelenkgeschwindigkeitsvektor gemäß

$$\dot{\mathbf{q}} = (J_x^e(\mathbf{q}))^T K \Delta \mathbf{x}_b^e. \tag{4.85}$$

Die Formulierung dieses Differenzialgleichungssystems basiert auf der Verwendung der Lyapunovschen Stabilitätstheorie und ist Gegenstand von Aufgabe 4.13.

**Aufgabe 4.13.** Zeigen Sie, dass die zeitliche Änderung von  $V(\Delta \mathbf{x}_b^e) = \frac{1}{2}(\Delta \mathbf{x}_b^e)^T K \Delta \mathbf{x}_b^e$  mit der positiv definiten Matrix  $K$  unter Berücksichtigung von (4.85) auf

$$\dot{V} = (\Delta \mathbf{x}_b^e)^T K^* \dot{\mathbf{x}}_b^e - (\Delta \mathbf{x}_b^e)^T K J_x^e(\mathbf{q})(J_x^e(\mathbf{q}))^T K \Delta \mathbf{x}_b^e$$

führt. Zeigen Sie damit für den Fall  $^* \dot{\mathbf{x}}_b^e = \mathbf{0}$  bzw.  $^* \mathbf{x}_b^e$  konstant, dass die rechte Seite die Bedingungen  $\dot{V} < 0$  für alle  $\Delta \mathbf{x}_b^e \neq \mathbf{0}$  erfüllt. Hieraus folgt wegen  $V(\Delta \mathbf{x}_b^e) > 0$  für alle  $\Delta \mathbf{x}_b^e \neq \mathbf{0}$  und  $V(\mathbf{0}) = 0$  die asymptotische Konvergenz der Lösung zu  $\Delta \mathbf{x}_b^e = \mathbf{0}$ .

Im Sonderfall eines nicht-leeren Nullraums  $\ker(J_x^e(\mathbf{q}))^T \neq \emptyset$ , ist mit  $^* \dot{\mathbf{x}}_b^e = \mathbf{0}$  die Matrix  $K J_x^e(\mathbf{q})(J_x^e(\mathbf{q}))^T K$  nur negativ semi-definit, so dass ein  $\Delta \mathbf{x}_b^e \neq \mathbf{0}$  existiert, für das gilt  $\dot{V} = 0$ . Das bedeutet, dass die Lösung von (4.85) auf  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  bei nicht verschwindenden Fehler  $\Delta \mathbf{x}_b^e \neq \mathbf{0}$  führt. Nach [1] tritt dieser Fall jedoch nur auf, wenn die vorgegebene Pose nicht von der momentanen Konfiguration aus erreichbar ist.

Das zu (4.85) gehörige Blockdiagramm zeigt die folgende Abbildung.



**Abb. 4.14:** Blockdiagramm des Ansatzes (4.85).

#### Anmerkung 4.5

Neben den beiden genannten Algorithmen existiert eine Vielzahl anderer Ansätze, die an Stelle der Gelenkgeschwindigkeiten bzw. der differentiellen Kinematik eine Darstellung in Form der Gelenkbeschleunigungen nutzen. Zudem können so genannte Quaternionen in die Formulierung integriert werden, wodurch Singularitäten vermieden werden. Der interessierte Leser sei hierzu auf [1] verwiesen.

## 4.4 Kinetik von Robotersystemen

Zur Beschreibung der zeitlichen Dynamik eines Robotersystems, welches Kräften und Momenten (z.B. durch die Antriebsmotoren) unterliegt, werden im Folgenden die Euler–Lagrange–Gleichungen bzw. die Lagrangeschen Gleichungen 2. Art herangezogen, welche in Abschnitt 3.4 bereits eingeführt wurden.

### 4.4.1 Euler–Lagrange–Gleichungen

Aufgrund der in Kapitel 3 bereits erfolgten detaillierten Darstellung der Konzepte, werden nachfolgend nur die wesentlichen Schritte nochmals aufgegriffen und in den Kontext der vorangegangenen kinematischen Analyse von Robotersystemen gesetzt. Mit der *Lagrange-Funktion*  $L = W_{\text{kin}} - W_{\text{pot}}$  folgen die *Bewegungsgleichungen im Gelenkraum* unmittelbar aus den Lagrangeschen Gleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L - \frac{\partial}{\partial q_j} L = Q_j^{nc}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.86)$$

In Kapitel 3 wurde für die kinetische Energie des Systems gemäß (3.86) der Ausdruck

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left( \sum_{j=1}^N \left\{ m_j \left( (J_v)_0^{S,j}(\mathbf{q}) \right)^T (J_v)_0^{S,j}(\mathbf{q}) + \left( (J_\omega)_0^j(\mathbf{q}) \right)^T I_j (J_\omega)_0^j(\mathbf{q}) \right\} \right) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.87)$$

ermittelt, wobei die folgenden Beziehungen für die translatorische Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_0^{S,j}$  des Starrkörperschwerpunkts

$$\mathbf{v}_0^{S,j} = (J_v)_0^{S,j}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.88)$$

und für die Drehwinkelgeschwindigkeit

$$\boldsymbol{\omega}_0^j = (J_\omega)_0^j(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.89)$$

in Abhängigkeit der jeweiligen Manipulator Jacobi–Matrizen und den generalisierten Koordinaten ermittelt wurden. Deren Übertragung auf die in diesem Kapitel eingeführte Beschreibung mit der *Denavit–Hartenberg–Konvention* ist Gegenstand der folgenden Ausführungen, so dass vorausgesetzt wird, dass *sämtliche eingeführten Koordinatensysteme dieser Konvention entsprechen*.

Für einen Roboterarm, der aus einer Sequenz von  $n$  starren *Links* besteht, welche durch Schub– und Drehgelenke verbunden sind, können mit (4.52) bzw. (4.58) die einzelnen Beiträge zur geometrischen Manipulator Jacobi–Matrix zwischen Basis– und Endeffektor–Koordinatensystem bestimmt werden. In analoger Weise kann die geometrische Manipulator Jacobi–Matrix vom Basis–Koordinatensystem zum Koordinatensystem  $(0_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1})$  des  $i$ -ten *Links* ermittelt werden, was auf

$$J^i(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} J_v^i(\mathbf{q}) \\ J_\omega^i(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_{1,v}^i(\mathbf{q}) & \mathbf{j}_{2,v}^i(\mathbf{q}) & \dots & \mathbf{j}_{i,v}^i(\mathbf{q}) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{j}_{1,\omega}^i(\mathbf{q}) & \mathbf{j}_{2,\omega}^i(\mathbf{q}) & \dots & \mathbf{j}_{i,\omega}^i(\mathbf{q}) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

führt, mit den Spaltenvektoren

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_{l,v}^i(\mathbf{q}) \\ \mathbf{j}_{l,\omega}^i(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{z_{l-1}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.91)$$

für ein *Schubgelenk* bzw.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_{l,v}^i(\mathbf{q}) \\ \mathbf{j}_{l,\omega}^i(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{z_{l-1}} \times (\mathbf{p}_0^{S,i} - \mathbf{d}_0^{l-1}) \\ \mathbf{e}_{z_{l-1}} \end{bmatrix}. \quad (4.92)$$

für ein *Drehgelenk*. Hier ist  $\mathbf{p}_0^{S,i}$  der Vektor zum Schwerpunkt des  $i$ -ten Links. Mit der translatorischen Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_0^{S,i}$  des Schwerpunkts von *Link*  $i$  und der Drehwinkelgeschwindigkeit  $\omega_0^i$  ausgedrückt durch den entsprechenden Anteil der geometrischen Manipulator Jacobi-Matrix

$$\mathbf{v}_0^{S,i} = J_v^i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.93)$$

$$\omega_0^i = J_\omega^i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.94)$$

ergibt sich der Anteil des  $i$ -ten Links an der kinetischen Energie des Gesamtsystems zu

$$W_{\text{kin}}^i = \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{q}}^T (J_v^i(\mathbf{q}))^T J_v^i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T (J_\omega^i(\mathbf{q}))^T R_0^i(\mathbf{q}) I_i^0(\mathbf{q}) J_\omega^i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (4.95)$$

Hierbei bezeichnet  $m_i$  die Masse des  $i$ -ten Links,  $R_0^i$  die Rotationsmatrix zum Inertial- bzw. Basis-Koordinatensystem  $(0_0x_0y_0z_0)$  und  $I_i^i$  den Trägheitstensor des  $i$ -ten Links in dessen lokalem Koordinatensystem. Die kinetische Energie des Gesamtsystems folgt entsprechend zu

$$W_{\text{kin}} = \sum_{i=1}^n W_{\text{kin}}^i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \underbrace{\sum_{i=1}^n \left( m_i (J_v^i(\mathbf{q}))^T J_v^i(\mathbf{q}) + (J_\omega^i(\mathbf{q}))^T R_0^i(\mathbf{q}) I_i^0(\mathbf{q}) J_\omega^i(\mathbf{q}) \right)}_{= M(\mathbf{q})} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.96)$$

Die potenzielle Energie umfasst die Anteil infolge der Gravitationskraft, welche sich gemäß (3.82) zu

$$W_{\text{pot}} = \sum_{i=1}^n W_{\text{pot}}^i = \sum_{i=1}^n [0 \quad 0 \quad g] \mathbf{p}_0^{S,i} m_i. \quad (4.97)$$

ergeben, wenn die Gravitationskraft in Richtung der negativen  $z_0$ -Achse wirkt.

#### Anmerkung 4.6: Berücksichtigung von Antrieben

Die Antriebe der Gelenke können verschiedenartig in die mathematische Beschreibung integriert werden. Ein Ansatz besteht darin, deren Anteile an der kinetischen und der potenziellen Energie zu berücksichtigen. Dabei ist die spezielle Konfiguration und Montage der Antriebe sowie das Vorhandensein von Getrieben zu beachten. Grundsätzlich werden deren Anteile an der kinetischen und potenziellen Energie analog zu den vorherigen Ausführungen beschrieben,

wobei Anteile (z.B. Stator) auch der Masse  $m_i$  sowie dem Trägheitstensor  $I_i^i$  des *Links* zugeordnet werden können. Diesbezügliche Beispiele sind [1] zu entnehmen. Im Weiteren werden Antriebe in der Form von nicht-konservativen generalisierten Kräften (und Momenten)  $Q_i^{nc}$  in den Modellgleichungen berücksichtigt.

#### Anmerkung 4.7: Berücksichtigung des Endeffektors

Wenn der Endeffektor mit der Umgebung interagiert, d.h. durch den Endeffektor oder auf Endeffektor Kräfte und Momente wirken, dann können diese ebenfalls den nicht-konservativen generalisierten Kräften hinzugefügt werden. Bezeichne  $f_0^e$  die wirkenden Kräfte und Momente, dann gilt

$$Q^{nc,e} = (J^e(q))^T f_0^e \quad (4.98)$$

mit der geometrischen Manipulator Jacobi-Matrix des Endeffektors.

Die *Bewegungsgleichungen* ergeben sich aus der Auswertung von (4.86), was auf

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = Q - Q^{nc,e} \quad (4.99)$$

bzw. in Komponentenschreibweise

$$\sum_{j=1}^n M_{i,j}(q)\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n H_{i,j,l}(q, \dot{q})\dot{q}_l\dot{q}_j + g_i(q) = Q_i - Q_i^{nc,e}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.100)$$

führt. Für eine weitere Interpretation und eine Darstellung mit den *Christoffel-Symbolen erster Art* wird auf Abschnitt 3.4.4 verwiesen.

**Beispiel 4.9 (Bewegungsgleichungen des planaren Drei-Gelenk-Manipulators).** Wie in Abbildung 4.15 gezeigt wird, sollen die Schwerpunkte  $S_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  der einzelnen Links des planaren Drei-Gelenk-Manipulators jeweils mittig in der Verbindung zwischen den Gelenken liegen.

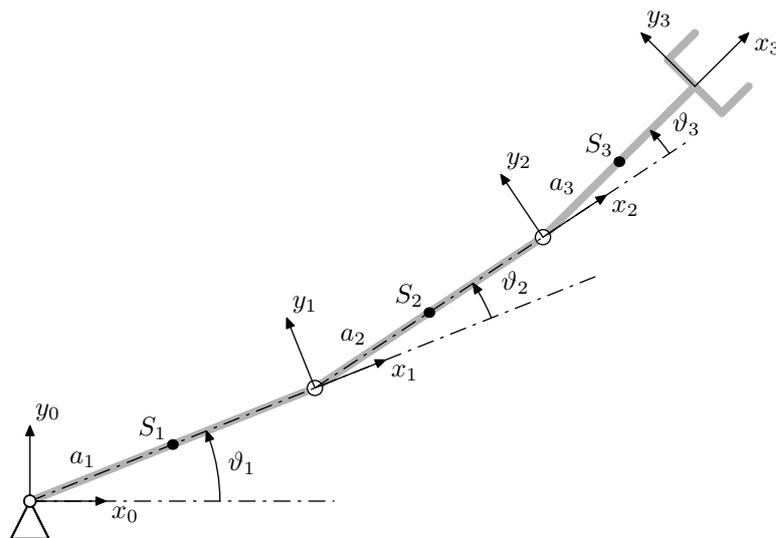


Abb. 4.15: Planarer Drei-Gelenk-Manipulator.

Mit den Ausführungen aus Beispiel 4.5, den Vektoren zu den Schwerpunkten der Links

$$\mathbf{p}_0^{S,1} = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{2} c_{\vartheta_1} \\ \frac{a_1}{2} s_{\vartheta_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_0^{S,2} = \begin{bmatrix} a_1 c_{\vartheta_1} + \frac{a_2}{2} c_{\vartheta_1+\vartheta_2} \\ a_1 s_{\vartheta_1} + \frac{a_2}{2} s_{\vartheta_1+\vartheta_2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{p}_0^{S,3} = \begin{bmatrix} a_1 c_{\vartheta_1} + a_2 c_{\vartheta_1+\vartheta_2} + \frac{a_3}{2} c_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} \\ a_1 s_{\vartheta_1} + a_2 s_{\vartheta_1+\vartheta_2} + \frac{a_3}{2} s_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

und den Vektoren  $\mathbf{d}_0^{l-1}$ ,  $l = 1, 2, 3$  gemäß (4.60) zu den Ursprüngen der Koordinatensysteme, folgen die geometrischen Manipulator Jacobi-Matrizen zu

$$J^1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} J_v^1(\mathbf{q}) \\ J_\omega^1(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{2} s_{\vartheta_1} & 0 & 0 \\ \frac{a_1}{2} c_{\vartheta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J^2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} J_v^2(\mathbf{q}) \\ J_\omega^2(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 s_{\vartheta_1} - \frac{a_2}{2} s_{\vartheta_1+\vartheta_2} & -\frac{a_2}{2} s_{\vartheta_2} & 0 \\ a_1 c_{\vartheta_1} + \frac{a_2}{2} c_{\vartheta_1+\vartheta_2} & \frac{a_2}{2} c_{\vartheta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J^3(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} J_v^3(\mathbf{q}) \\ J_\omega^3(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 s_{\vartheta_1} - a_2 s_{\vartheta_1+\vartheta_2} - \frac{a_3}{2} s_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} & -a_2 s_{\vartheta_1+\vartheta_2} - \frac{a_3}{2} s_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} & -\frac{a_3}{2} s_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} \\ a_1 c_{\vartheta_1} + a_2 c_{\vartheta_1+\vartheta_2} + \frac{a_3}{2} c_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} & a_2 c_{\vartheta_1+\vartheta_2} + \frac{a_3}{2} c_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} & \frac{a_3}{2} c_{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mit den Rotationsmatrizen

$$R_0^i = \begin{bmatrix} c_{\varphi_i} & -s_{\varphi_i} & 0 \\ s_{\varphi_i} & c_{\varphi_i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3$$

für  $\varphi_i = \sum_{l=1}^i \vartheta_l$  und der Hauptachsen-Eigenschaft der Koordinatensysteme, welche auf eine Diagonalform von  $I_i^i$  führt, ergibt sich die kinetische Energie des planaren Drei-Gelenk-Manipulators zu

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \left( M_v(\mathbf{q}) + M_\omega(\mathbf{q}) \right) \dot{\mathbf{q}} \quad (4.101)$$

mit dem ersten Anteil der Massenmatrix

$$M_v(\mathbf{q}) = M_v^1(\mathbf{q}) + M_v^2(\mathbf{q}) + M_v^3(\mathbf{q}),$$

wobei für die einzelnen Terme die folgenden Beziehungen gelten

$$M_v^1(\mathbf{q}) = m_1 (J_v^1(\mathbf{q}))^T J_v^1(\mathbf{q}) = m_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} a_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_v^2(\mathbf{q}) = m_2 (J_v^2(\mathbf{q}))^T J_v^2(\mathbf{q}) = m_2 \begin{bmatrix} a_1^2 + a_2 c_{\vartheta_2} a_1 + \frac{a_2^2}{4} & \frac{1}{4} a_2 (a_2 + 2a_1 c_{\vartheta_2}) & 0 \\ \frac{1}{4} a_2 (a_2 + 2a_1 c_{\vartheta_2}) & \frac{a_2^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_v^3(\mathbf{q}) = m_3 (J_v^3(\mathbf{q}))^T J_v^3(\mathbf{q}) = m_3 \begin{bmatrix} M_{1,1}^3 & M_{1,2}^3 & M_{1,3}^3 \\ M_{1,2}^3 & a_2^2 + a_3 c_{\vartheta_3} a_2 + \frac{a_3^2}{4} & \frac{1}{4} a_3 (a_3 + 2a_2 c_{\vartheta_3}) \\ \frac{1}{4} a_3 (a_3 + 2a_2 c_{\vartheta_3} + 2a_1 c_{\vartheta_2 + \vartheta_3}) & \frac{1}{4} a_3 (a_3 + 2a_2 c_{\vartheta_3}) & \frac{a_3^2}{4} \end{bmatrix}$$

mit

$$M_{1,1}^3 = a_1^2 + (2a_2 c_{\vartheta_2} + a_3 c_{\vartheta_2 + \vartheta_3}) a_1 + a_2^2 + \frac{a_3^2}{4} + a_2 a_3 c_{\vartheta_3}$$

$$M_{1,2}^3 = a_2^2 + a_3 c_{\vartheta_3} a_2 + \frac{a_3^2}{4} + a_1 \left( a_2 c_{\vartheta_2} + \frac{1}{2} a_3 c_{\vartheta_2 + \vartheta_3} \right)$$

$$M_{1,3}^3 = \frac{1}{4} a_3 (a_3 + 2a_2 c_{\vartheta_3} + 2a_1 c_{\vartheta_2 + \vartheta_3}).$$

Der zweite Anteil der Massenmatrix ergibt sich zu

$$M_\omega(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^3 (J_\omega^i(\mathbf{q}))^T R_0^i I_i^0 R_i^0 J_\omega^i(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} I_{1,zz} + I_{2,zz} + I_{3,zz} & I_{2,zz} + I_{3,zz} & I_{3,zz} \\ I_{2,zz} + I_{3,zz} & I_{2,zz} + I_{3,zz} & I_{3,zz} \\ I_{3,zz} & I_{3,zz} & I_{3,zz} \end{bmatrix},$$

wobei für einen Stab  $I_{i,zz} = m_i \frac{(a_i)^2}{12}$  gilt. Offensichtlich ist  $M(\mathbf{q})$  symmetrisch.

Die Auswertung von (4.97) liefert (hierbei ist zu beachten, dass in der Aufgabe das Schwerfeld in Richtung der negativen  $\mathbf{e}_{y_0}$ -Achse wirkt) die potenzielle Energie

$$W_{pot} = m_1 g \frac{a_1}{2} s_{\vartheta_1} + m_2 g \left( a_1 s_{\vartheta_1} + \frac{a_2}{2} s_{\vartheta_1 + \vartheta_2} \right) + m_3 g \left( a_1 s_{\vartheta_1} + a_2 s_{\vartheta_1 + \vartheta_2} + \frac{a_3}{2} s_{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3} \right). \quad (4.102)$$

Die Antriebe in den Gelenken werden als externe Drehmomente  $\tau_i$  um die jeweiligen  $z_{i-1}$ -Achsen angesetzt, was auf die nicht-konservativen generalisierten Kräfte (siehe Anmerkung 3.4)

$$\mathbf{Q}^{nc} = \mathbf{Q} = (J_\omega^1(\mathbf{q}))^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_1 - \tau_2 \end{bmatrix} + (J_\omega^2(\mathbf{q}))^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_2 - \tau_3 \end{bmatrix} + (J_\omega^3(\mathbf{q}))^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

führt. Hierbei wurde angenommen, dass der Antrieb im Gelenk 2 (3) starr mit Link 1 (2) verbunden ist. Mit diesen Vorbereitungen liefert die Auswertung der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art (4.86) die Bewegungsgleichungen des Manipulators, welche aufgrund der Übersichtlichkeit im Weiteren

nicht angegeben werden. Für die eigentliche Berechnung ist es empfehlenswert von den Christoffel-Symbolen Gebrauch zu machen.

#### 4.4.2 Direkte und inverse Dynamik

Der Begriff der *direkten Dynamik* bezieht sich auf die Bestimmung der Vektoren der Gelenkbeschleunigung  $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ , der Gelenkgeschwindigkeit  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  und der Gelenkposition  $\mathbf{q}(t)$  bei der Vorgabe der wirkenden Momente bzw. Kräfte  $\mathbf{Q}(t)$  für bekannte Anfangsbedingungen  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}^0$  und  $\dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}^1$ . Dies ist insbesondere für die *Simulation* des Manipulators und dessen dynamischer Analyse von Bedeutung. Hierzu ist offensichtlich (siehe auch Anmerkung 3.7) die numerische Lösung des nichtlinearen Systems von gekoppelten Differenzialgleichungen (4.99) notwendig, wozu geeignete numerische Verfahren genutzt werden müssen. Diese basieren zum einen auf der Einführung von Zustandsvariablen und der Überführung des Systems von  $n$  gewöhnlichen Differenzialgleichungen 2. Ordnung in ein System von  $2n$  gewöhnlichen Differenzialgleichungen 1. Ordnung (siehe Anmerkung 3.7). Zum anderen existieren spezielle numerische Lösungsverfahren, welche direkt auf das Differenzialgleichungssystem 2. Ordnung angewendet werden können. Dies umfasst beispielsweise den Newmark-Algorithmus [8] und dessen Varianten oder auch so genannte symplektische Integratoren, die für konservative Systeme die Eigenschaft der Energieerhaltung auch in der numerischen Lösung beibehalten.

Dem gegenüber betrifft die Problemstellung der *inversen Dynamik* die Frage der Berechnung der wirkenden Momente bzw. Kräfte  $\mathbf{Q}(t)$ , die notwendig sind, um einen gewünschten Verlauf der Gelenkbeschleunigung  $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ , der Gelenkgeschwindigkeit  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  und der Gelenkposition  $\mathbf{q}(t)$  zu erzielen. Hierbei sind zudem auf Endeffektor wirkende Kräfte  $\mathbf{Q}^{nc,e}(t)$  und deren zeitlicher Verlauf zu berücksichtigen. Die Verbindung zur *inversen Kinematik* bzw. zur *inversen differenziellen Kinematik* sind dadurch gegeben, dass  $\mathbf{q}(t)$  bzw.  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  durch die entsprechenden Verfahren ermittelt werden können, um einen entsprechenden Verlauf der Pose im *Operational Space* zu erzeugen. Deren weitere Differenziation führt auf  $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ , wobei eine ausreichende Differenzierbarkeit der Trajektorien vorausgesetzt bzw. garantiert werden muss. Im einfachsten Fall eines so genannten *vollaktuierten Manipulators*, bei dem jeder Freiheitsgrad  $q_i$  durch eine Kraft  $Q_i$  beeinflusst werden kann, ist es möglich unmittelbar die Lösung der inversen Dynamik anzugeben

$$\mathbf{Q} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{Q}^{nc,e}. \quad (4.104)$$

#### 4.4.3 Darstellung im Operational Space

Wie in [1, Kap. 7.8] dargestellt wird, liefert die Verwendung der Euler-Lagrange-Gleichungen eine vollständige Beschreibung der Manipulator-Dynamik nur für den *nicht-redundanten Fall* (vgl. Abschnitt 4.3.3.1). Für einen *redundanten* Manipulator können interne Bewegungen auftreten, welche durch die generalisierten Kräfte hervorgerufen werden, die nicht die Bewegung des Endeffektors beeinflussen. Ziel dieses Abschnitts ist die Ermittlung eines mathematischen Modells, welches die Beziehung zwischen den wirkenden generalisierten Kräften und der Pose des Endeffektors im *Operational Space* für nicht-redundante und redundante Manipulatoren beschreibt<sup>5</sup>.

Bezeichne im Weiteren

$$\mathbf{x}_b^e(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_b^e(\mathbf{q}) \\ \boldsymbol{\phi}_b^e(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \mathbf{k}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{x}_b^e \in \mathbb{R}^m$$

<sup>5</sup>Im Weiteren werden die Bezeichnungen für das Basis-Koordinatensystem (Subskript  $b$ ) und das Inertialsystem (Subskript 0) wiederum redundant verwendet.

die Pose den Endeffektors, d.h. einen minimalen Satz an Variablen des *Operational Space*. Mit der in Abschnitt 4.3.4 definierten analytischen Manipulator Jacobi-Matrix  $J_x^e(\mathbf{q})$  gilt für dessen zeitliche Änderung

$$\dot{\mathbf{x}}_b^e = J_x^e(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad J_x^e(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} J_p^e(\mathbf{q}) \\ J_\phi^e(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{k}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}.$$

Die entsprechende Beschleunigung erhält man durch nochmalige Differenziation

$$\ddot{\mathbf{x}}_b^e = J_x^e(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{J}_x^e(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}. \quad (4.105)$$

Mit den Bewegungsgleichungen im Gelenkraum (4.99) aufgelöst nach dem Beschleunigungsterm

$$\ddot{\mathbf{q}} = -M^{-1}(\mathbf{q})C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - M^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{g}(\mathbf{q}) + M^{-1}(\mathbf{q})(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^{nc,e})$$

folgt somit

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}_b^e = & -J_x^e(\mathbf{q})M^{-1}(\mathbf{q})C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - J_x^e(\mathbf{q})M^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{g}(\mathbf{q}) \\ & + J_x^e(\mathbf{q})M^{-1}(\mathbf{q})(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^{nc,e}) + \dot{J}_x^e(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Durch die inverse (algebraische) Kinematik und die inverse differenzielle Kinematik können  $\mathbf{q}$  und  $\dot{\mathbf{q}}$  durch  $\mathbf{x}_b^e$  und  $\dot{\mathbf{x}}_b^e$  ausgedrückt werden, was für die weiteren Ausführungen vereinfachend schematisch durch  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}_b^e)$  und  $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_b^e, \dot{\mathbf{x}}_b^e)$  ausgedrückt wird. Seien

$$M_x(\mathbf{x}_b^e) = \left( J_x^e(\mathbf{q})M^{-1}(\mathbf{q})(J_x^e(\mathbf{q}))^T \right)^{-1} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(\mathbf{x}_b^e), \dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_b^e, \dot{\mathbf{x}}_b^e)} \quad (4.107a)$$

$$C_x(\mathbf{x}_b^e, \dot{\mathbf{x}}_b^e)\dot{\mathbf{x}}_b^e = M_x(\mathbf{x}_b^e) \left( J_x^e(\mathbf{q})M^{-1}(\mathbf{q})C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \dot{J}_x^e(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \right) \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(\mathbf{x}_b^e), \dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_b^e, \dot{\mathbf{x}}_b^e)} \quad (4.107b)$$

$$\mathbf{g}_x(\mathbf{x}_b^e) = M_x(\mathbf{x}_b^e) \left( J_x^e(\mathbf{q})M^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{g}(\mathbf{q}) \right) \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(\mathbf{x}_b^e), \dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_b^e, \dot{\mathbf{x}}_b^e)} \quad (4.107c)$$

$$\mathbf{Q}_x - \mathbf{Q}_x^{nc,e} = M_x(\mathbf{x}_b^e) \left( J_x^e(\mathbf{q})M^{-1}(\mathbf{q}) \right) \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(\mathbf{x}_b^e), \dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_b^e, \dot{\mathbf{x}}_b^e)} (\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^{nc,e}), \quad (4.107d)$$

dann ergibt sich aus (4.106) die Darstellung

$$M_x(\mathbf{x}_b^e)\ddot{\mathbf{x}}_b^e + C_x(\mathbf{x}_b^e, \dot{\mathbf{x}}_b^e)\dot{\mathbf{x}}_b^e + \mathbf{g}_x(\mathbf{x}_b^e) = \mathbf{Q}_x - \mathbf{Q}_x^{nc,e}. \quad (4.108)$$

Hierbei ist zu beachten, dass  $J_x^e(\mathbf{q})M^{-1}(\mathbf{q})(J_x^e(\mathbf{q}))^T$  genau dann invertierbar ist, wenn  $J_x^e(\mathbf{q})$  vollen Rang besitzt und damit kinematische Singularitäten sowie Darstellungs-Singularitäten ausgeschlossen sind. Unter dieser Bedingung gilt (4.108) sowohl für nicht-redundante als auch redundante Manipulatoren. Im Fall eines nicht-redundanten Manipulators vereinfachen sich die eingeführten Matrizen zu

$$C_x(\mathbf{x}_b^e, \dot{\mathbf{x}}_b^e)\dot{\mathbf{x}}_b^e = \left( (J_x^e(\mathbf{q}))^{-T} C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - M_x(\mathbf{x}_b^e) \dot{J}_x^e(\mathbf{q}) \right) \dot{\mathbf{q}} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(\mathbf{x}_b^e), \dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_b^e, \dot{\mathbf{x}}_b^e)} \quad (4.109a)$$

$$\mathbf{g}_x(\mathbf{x}_b^e) = (J_x^e(\mathbf{q}))^{-T} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(\mathbf{x}_b^e), \dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_b^e, \dot{\mathbf{x}}_b^e)} \quad (4.109b)$$

$$\mathbf{Q}_x - \mathbf{Q}_x^{nc,e} = (J_x^e(\mathbf{q}))^{-T} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(\mathbf{x}_b^e), \dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_b^e, \dot{\mathbf{x}}_b^e)} (\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^{nc,e}). \quad (4.109c)$$

## Literatur

- [1] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani und G. Oriolo. *Robotics: Modelling, Planning and Control*. London: Springer-Verlag, 2010 (zitiert auf den Seiten 69–71, 73, 75, 83, 88, 95, 96, 98, 100, 107, 108, 110, 113).
- [2] P. Corke. *Robotics, Vision and Control: Fundamental Algorithms in MATLAB*. Springer Tracts in Advanced Robotics. Springer Berlin Heidelberg, 2011 (zitiert auf Seite 75).
- [3] J. Denavit und R. S. Hartenberg. „A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices“. In: *Journal of Applied Mechanics* (1955), S. 215–221 (zitiert auf Seite 75).
- [4] M. Spong und M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control*. New York: John Wiley & Sons, 1989 (zitiert auf Seite 75).
- [5] T. Meurer. *Optimization and Optimal Control*. Skriptum zur Vorlesung. <http://www.control.tf.uni-kiel.de/en/teaching/winter-term/optimization-and-optimal-control/optimization-and-optimal-control-etit-522>. Lehrstuhl für Regelungstechnik, Christian-Albrechts-Universität Kiel, 2019 (zitiert auf Seite 97).
- [6] Y.C. Chen und I.D. Walker. „A consistent null-space based approach to inverse kinematics of redundant robots“. In: *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation* (1993), S. 374–381 (zitiert auf Seite 98).
- [7] C. Ott. *Cartesian Impedance Control of Redundant and Flexible-Joint Robots*. Springer Tracts in Advanced Robotics. Springer Berlin Heidelberg, 2008 (zitiert auf Seite 98).
- [8] N.M. Newmark. „A Method of Computation for Structural Dynamics“. In: *J. Eng. Mech. Div. (ASCE)* 85 (1959), S. 67–94 (zitiert auf Seite 113).