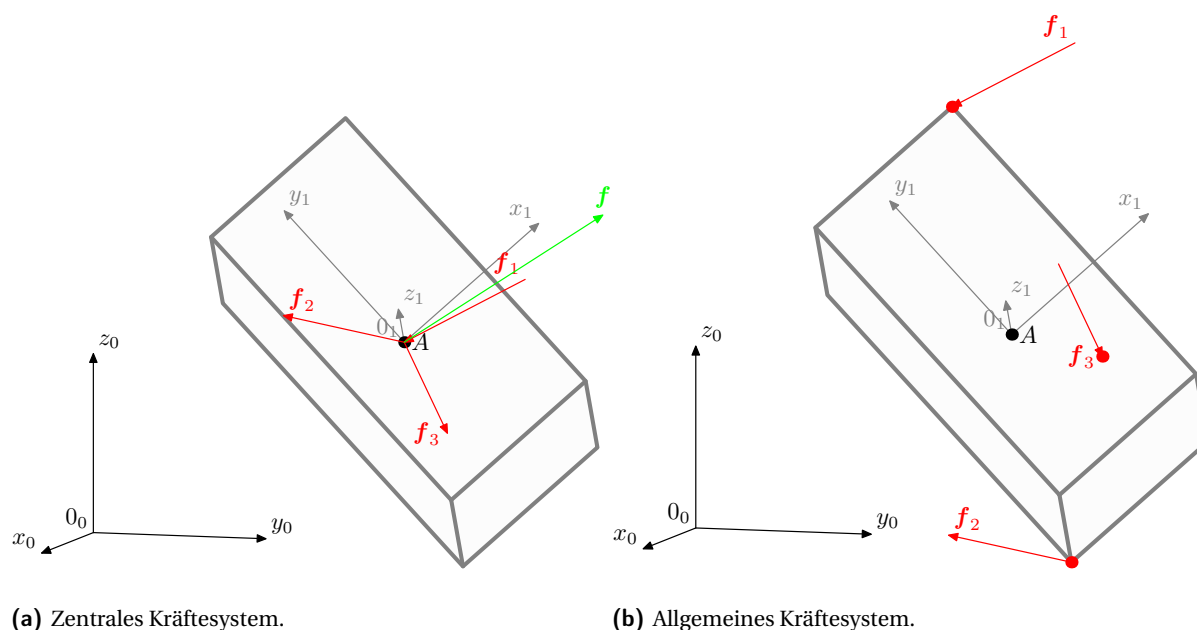


Mechanische Systeme — Starrkörperkinetik

Auf Basis der im vorangegangenen Kapitel eingeführten kinematischen Zusammenhänge wird im Weiteren eine Einführung in die Konzepte der analytischen Mechanik erfolgen, mit dem Ziel, die Bewegungsgleichungen eines Starrkörpersystems systematisch abzuleiten. Ein *Starrkörper* ist dadurch charakterisiert, dass unter der Einwirkung von Kräften der Abstand beliebiger Punkte im Körper immer gleich bleibt. Im Mittelpunkt der Ausführungen stehen dabei die so genannten *Euler-Lagrange-Gleichungen*, deren Formulierung auf der *potenziellen und kinetischen Energie* des Starrkörpersystems beruhen. Dem gegenüber werden einleitend die für die weiteren Betrachtungen relevanten Konzepte der *Newtonschen Mechanik* kompakt zusammengefasst, um einen Vergleich der jeweiligen Zugänge zu erzielen.

3.1 Kräfte und Momente



(a) Zentrales Kräftesystem.

(b) Allgemeines Kräftesystem.

Abb. 3.1: Kräftesysteme bei Starrkörpern.

Betrachtet man die in Abbildung 3.1a dargestellte Konfiguration von Einzelkräften, die an einem zentralen Punkt, dem so genannten *Angriffspunkt*, des Starrkörpers wirken, so ergibt sich die resultierende Kraft \mathbf{f} zu

$$\mathbf{f} = \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_j. \quad (3.1)$$

Dieses *zentrale Kräftesystem*, auch *Kräftegruppe* genannt, ist im *Gleichgewicht*, wenn sich die Summe der am zentralen Punkt A wirkenden Kräfte aufhebt, d.h. wenn $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ ist. Liegt kein Gleichgewicht vor,

d.h. ist $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$, dann bewirken die zentral angreifenden Kräfte u.a. eine translatorische Verschiebung des Starrkörpers [1].

Wie in Abbildung 3.1b beispielhaft gezeigt wird, wirken bei einem *allgemeinen Kräftesystem* die einzelnen Kräfte nicht mehr an einem zentralen Punkt, weshalb diese auch nicht mehr *nur* zu einer resultierenden Kraft zusammengefasst werden können. Falls die Kräfte nicht im Gleichgewicht sind, bewirken diese nicht nur eine Translation des Starrkörpers sondern auch eine Rotation. Letztere wird

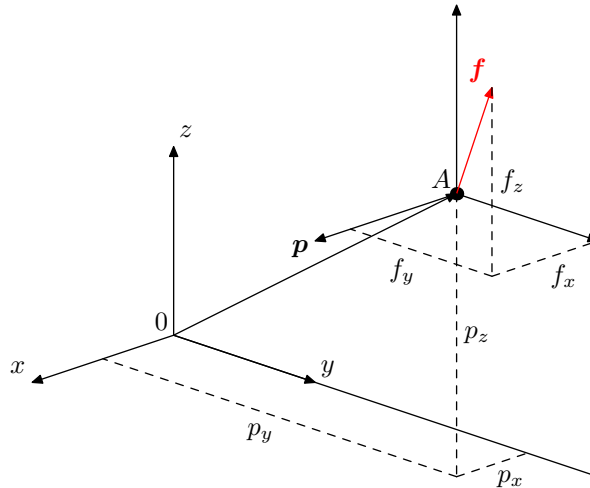


Abb. 3.2: Moment bezüglich des Punkts 0.

durch ein resultierendes *Moment* erzeugt, das sich aus dem Kreuzprodukt zwischen dem Ortsvektor von einem Bezugspunkt (z.B. dem Ursprung des Koordinatensystems) zum Kraftangriffspunkt und dem Richtungsvektor der anliegenden Kraft ergibt. Dies wird anhand der Beispiel-Konfiguration in Abbildung 3.2 deutlich. Mit der dargestellten komponentenweisen Zerlegung ergibt sich das Moment

$$\boldsymbol{\tau}^0 = \tau_x^0 \mathbf{e}_x + \tau_y^0 \mathbf{e}_y + \tau_z^0 \mathbf{e}_z$$

der Kraft

$$\mathbf{f} = f_x \mathbf{e}_x + f_y \mathbf{e}_y + f_z \mathbf{e}_z$$

bezüglich des Ursprungs 0 des Koordinatensystems (0xyz) mit dem Ortsvektor

$$\mathbf{p} = p_x \mathbf{e}_x + p_y \mathbf{e}_y + p_z \mathbf{e}_z$$

von 0 zum Kraftangriffspunkt A zu

$$\tau_x^0 = f_z p_y - f_y p_z, \quad \tau_y^0 = f_x p_z - f_z p_x, \quad \tau_z^0 = f_y p_x - f_x p_y.$$

Dies zeigt, dass sich das Moment $\boldsymbol{\tau}^0$ bezüglich des Bezugspunktes 0 zu

$$\boldsymbol{\tau}^0 = \mathbf{p} \times \mathbf{f} \tag{3.2}$$

ergibt. Dieses Ergebnis kann leicht dadurch motiviert werden, dass das Kreuzprodukt einen Vektor liefert, der senkrecht auf der durch \mathbf{p} und \mathbf{f} aufgespannten Ebene steht.

Anmerkung 3.1

Ein Moment bezüglich der Drehachse wird positiv gezählt, wenn die Wirkung des Moments im Sinne einer Rechtsschraube in Richtung des zur Drehachse gehörenden Richtungsvektors liegt.

Wirken auf einen Starrkörper mehrere Momente bezüglich des selben Bezugspunktes A , dann ergibt sich das resultierende Moment zu

$$\boldsymbol{\tau}^A = \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\tau}_j^A. \quad (3.3)$$

Damit gilt zusammenfassend, dass sich ein allgemeines Kräftesystem gemäß Abbildung 3.1b stets bezüglich eines *beliebigen Bezugspunktes* A in eine resultierende Kraft \boldsymbol{f} am Angriffspunkt A und ein resultierendes Moment $\boldsymbol{\tau}^A$ bezüglich des Punktes A reduzieren lässt. Folglich ist ein allgemeines Kräftesystem im *Gleichgewicht*, wenn $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ und $\boldsymbol{\tau}^A = \mathbf{0}$ gelten.

Aufgabe 3.7. Bestimmen Sie für das in Abbildung 3.3 dargestellte Kräftesystem die resultierende Kraft und das resultierende Moment für den Bezugspunkt P und geben Sie die Gleichgewichtsbedingungen an.

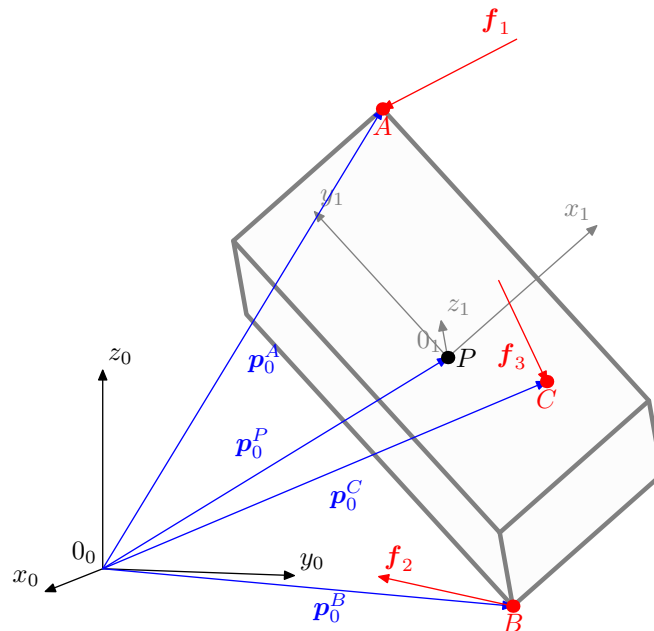


Abb. 3.3: Zur Reduktion eines allgemeinen Kräftesystems.

Lösung 3.7. Die weiteren Ausführungen gehen davon aus, dass die Vektoren \boldsymbol{f}^1 , \boldsymbol{f}^2 und \boldsymbol{f}^3 sowie die Ortsvektoren \boldsymbol{p}_0^A , \boldsymbol{p}_0^B und \boldsymbol{p}_0^C im Koordinatensystem $(0x_0y_0z_0)$ ausgedrückt sind. Ist dies nicht der Fall, so ist eine Transformation entsprechend den Ausführungen aus Kapitel 2 in das Bezugssystem notwendig.

Für die resultierende Kraft am Angriffspunkt P gilt

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3. \quad (3.4)$$

Zur Ermittlung des resultierenden Moments werden zunächst die Ortsvektoren vom Bezugspunkt P zu den Angriffspunkten A , B und C ermittelt, d.h.

$$\mathbf{p}_0^{PA} = \mathbf{p}_0^A - \mathbf{p}_0^P, \quad \mathbf{p}_0^{PB} = \mathbf{p}_0^B - \mathbf{p}_0^P, \quad \mathbf{p}_0^{PC} = \mathbf{p}_0^C - \mathbf{p}_0^P. \quad (3.5)$$

Für den Bezugspunkt P ergeben sich die wirkenden Momente damit zu

$$\boldsymbol{\tau}_1^P = \mathbf{p}_0^{PA} \times \mathbf{f}_1, \quad \boldsymbol{\tau}_2^P = \mathbf{p}_0^{PB} \times \mathbf{f}_2, \quad \boldsymbol{\tau}_3^P = \mathbf{p}_0^{PC} \times \mathbf{f}_3, \quad (3.6)$$

woraus das resultierende Moment

$$\boldsymbol{\tau}^P = \boldsymbol{\tau}_1^P + \boldsymbol{\tau}_2^P + \boldsymbol{\tau}_3^P \quad (3.7)$$

folgt. Das Kräftesystem aus Abbildung 3.3 kann somit auf die resultierende Kraft \mathbf{f} am Angriffspunkt P und das resultierende Moment $\boldsymbol{\tau}^P$ bezüglich des Punktes P reduziert werden. Das Kräftesystem ist im Gleichgewicht, wenn die Bedingungen

$$\mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\tau}^P = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

erfüllt sind.

3.2 Schwerpunkt

Zur Definition des Schwerpunktes wird die in Abbildung 3.4 dargestellte Konfiguration einer masselosen, starren Stange betrachtet, die durch parallel wirkende Kräfte $\mathbf{f}_j = f_j \mathbf{e}_z = -m_j g \mathbf{e}_z$ (Punktmassen) belastet wird [1]. Entsprechend den obigen Ausführungen kann das Kräftesystem durch eine re-

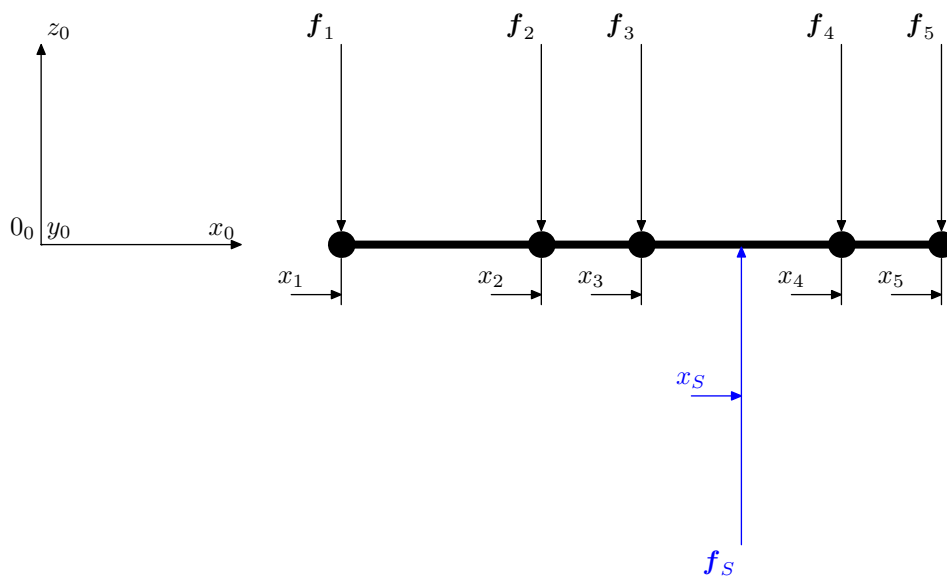


Abb. 3.4: Masselose Stange mit Punktmassen.

sultierende Kraft \mathbf{f} an einem Bezugspunkt A und ein resultierendes Moment $\boldsymbol{\tau}^A$ bezüglich dieses Bezugspunktes ersetzt werden. Als *Schwerpunkt* S bezeichnet man den Punkt, an dem das resultierende Moment $\boldsymbol{\tau}^S$ verschwindet und das System allein durch die Kraft \mathbf{f}_S im Gleichgewicht gehalten werden kann. Damit ergeben sich für die ebene Konfiguration im Gleichgewicht die Bedingungen

$$\tau_y^S = 0 = \sum_j x_j f_j - x_S f_S = \sum_j x_j m_j g - x_S f_S \quad \text{und} \quad f_S = \sum_j f_j = \sum_j m_j g.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$x_S = \frac{\sum_j x_j m_j}{\sum_j m_j}. \quad (3.9)$$

Dieses Ergebnis kann leicht auf ein System aus n starr gekoppelten Punktmassen m_j mit den Ortsvektoren \mathbf{p}_0^j vom Ursprung 0 des Koordinatensystems $(0x_0y_0z_0)$ verallgemeinert werden. Hierbei ergibt sich der Ortsvektor \mathbf{p}_0^S zum Schwerpunkt zu

$$\mathbf{p}_0^S = \frac{\sum_j m_j \mathbf{p}_0^j}{\sum_j m_j}. \quad (3.10)$$

Eine weitere Verallgemeinerung wird durch die Analyse eines allgemeinen Starrkörpers mit Volumen V und ortsabhängiger Dichte $\rho(x, y, z)$ erzielt. Bekannterweise ergibt sich die Masse des Starrkörpers zu

$$m = \int_V \rho dV. \quad (3.11)$$

Es wird angenommen, dass der Körper nur dem Einfluss des Gravitationsfeldes unterliegt, dessen Wirkungsrichtung bezüglich des betrachteten Koordinatensystems mit \mathbf{e}_g bezeichnet wird. Als *Schwerpunkt* S wird der Punkt bezeichnet, an dem der Körper aufgehängt bzw. die Haltekraft \mathbf{f}_S in Richtung \mathbf{e}_g angesetzt werden müsste, so dass sich der Körper unabhängig von \mathbf{e}_g im Gleichgewicht befindet. Entsprechend Abbildung 3.5 wirkt auf ein Volumenelement dV die Gravitationskraft $g\rho(x, y, z)dV\mathbf{e}_g$

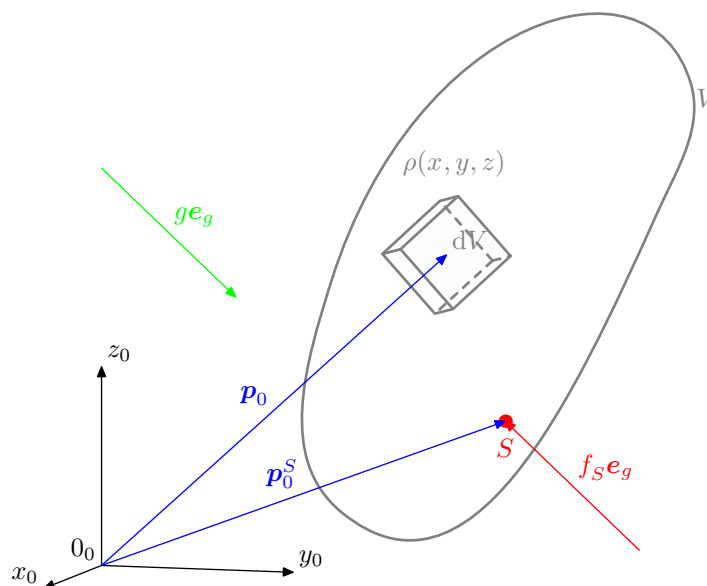


Abb. 3.5: Schwerpunkt eines Starrkörpers.

und bezüglich des Koordinatenursprungs das Moment $\mathbf{p}_0 \times g\rho(x, y, z)dV\mathbf{e}_g = g\rho(x, y, z)dV\mathbf{p}_0 \times \mathbf{e}_g$. Diese differenzielle Betrachtung liefert nach Integration über das Gesamtvolumen die Gleichgewichtsbedingungen

$$-f_S \mathbf{e}_g + g \int_V \rho dV \mathbf{e}_g = -f_S \mathbf{e}_g + m g \mathbf{e}_g = \mathbf{0}$$

und

$$-\mathbf{p}_0^S \times f_S \mathbf{e}_g + g \int_V \rho \mathbf{p}_0 dV \times \mathbf{e}_g = 0.$$

Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite Gleichung führt auf

$$\left(-mg\mathbf{p}_0^S + g \int_V \rho \mathbf{p}_0 dV\right) \times \mathbf{e}_g = 0.$$

Für beliebige Richtungsvektoren \mathbf{e}_g kann diese Gleichung nur dann identisch zu Null werden, wenn gilt

$$\mathbf{p}_0^S = \frac{\int_V \rho \mathbf{p}_0 dV}{m} = \frac{\int_V \rho \mathbf{p}_0 dV}{\int_V \rho dV}. \quad (3.12)$$

In Komponentenschreibweise ergeben sich somit wegen $\mathbf{p}_0^S = p_{0,x}^S \mathbf{e}_{x_0} + p_{0,y}^S \mathbf{e}_{y_0} + p_{0,z}^S \mathbf{e}_{z_0}$ die Beziehungen

$$p_{0,x}^S = \frac{\int_V \rho x dV}{m}, \quad p_{0,y}^S = \frac{\int_V \rho y dV}{m}, \quad p_{0,z}^S = \frac{\int_V \rho z dV}{m}. \quad (3.13)$$

Falls sich der Starrkörper aus mehreren Teilkörpern $j = 1, \dots, n$ mit Volumen V_j und Dichte $\rho_j(x, y, z)$ zusammensetzt, dann ergeben sich die Ortsvektoren zu den individuellen Schwerpunkten der Teilkörper im Koordinatensystem $(0x_0y_0z_0)$ zu

$$\mathbf{p}_0^{S,j} = \frac{\int_{V_j} \rho_j \mathbf{p}_0^j dV_j}{m_j}, \quad m_j = \int_{V_j} \rho_j dV_j. \quad (3.14)$$

Der Schwerpunkt des Gesamtkörpers folgt somit mit (3.10) zu

$$\mathbf{p}_0^S = \frac{\sum_{j=1}^n \int_{V_j} \rho_j \mathbf{p}_0^j dV_j}{m}, \quad m = \sum_{j=1}^n m_j. \quad (3.15)$$

Aufgabe 3.8. Bestimmen Sie den Ortsvektor zum Schwerpunkt des in Abbildung 3.6 dargestellten Starrkörpers. Für die beiden Teilvolumina gelten die Abmessungen $l_{x,1} = 2$, $l_{y,1} = 4$, $l_{z,1} = 0.5$ und $l_{x,2} = 1$, $l_{y,2} = 2$, $l_{z,2} = 1$. Die Koordinaten des Eckpunkts \mathbf{r}_0 lauten $\mathbf{r}_0 = [r_x, r_y, r_z]^T = [1, 3, \frac{1}{2}]^T$. Zudem sollen V_1 und V_2 unterschiedliche, jeweils konstante Dichten ρ_1 und ρ_2 aufweisen.

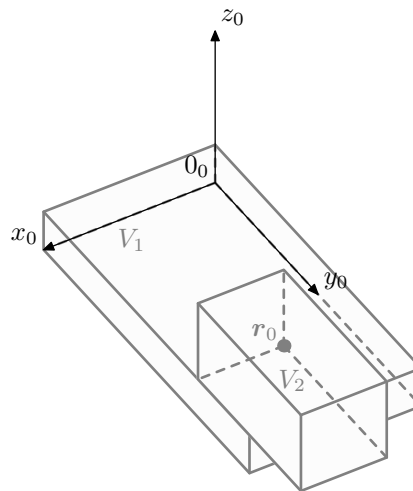


Abb. 3.6: Schwerpunktbestimmung für einen zusammengesetzten Körper.

Lösung 3.8. Entsprechend (3.15) werden zunächst die Ortsvektoren zu den Schwerpunkten der beiden Teilvolumen V_1 und V_2 getrennt bestimmt. Für Volumen V_1 gilt

$$\mathbf{p}_0^{S,1} = \frac{\rho_1}{m_1} \int_0^{l_{x,1}} \int_0^{l_{y,1}} \int_0^{l_{z,1}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} dz dy dx = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

während für sich V_2 der Ortsvektor zum Schwerpunkt zu

$$\mathbf{p}_0^{S,2} = \frac{\rho_2}{m_2} \int_{r_x}^{r_x+l_{x,2}} \int_{r_y}^{r_y+l_{y,2}} \int_{r_z}^{r_z+l_{z,2}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} dz dy dx = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ergibt. Damit lautet der Ortsvektor zum Schwerpunkt des Gesamtkörpers

$$\mathbf{p}_0^S = \frac{m_1 \mathbf{p}_0^{S,1} + m_2 \mathbf{p}_0^{S,2}}{m_1 + m_2} = \frac{1}{4\rho_1 + 2\rho_2} \begin{bmatrix} 4\rho_1 + 3\rho_2 \\ 8\rho_1 + 8\rho_2 \\ \rho_1 + 2\rho_2 \end{bmatrix}.$$

Für einen homogenen Körper mit $\rho_1 = \rho_2$ vereinfacht sich dies zu

$$\mathbf{p}_0^S = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

3.3 Kinetik der räumlichen Bewegung

Zur Beschreibung der Kinetik (starrer) Körper seien zunächst die *Newtonschen Grundgesetze*, die axiomatischen Charakter haben, angegeben [2]:

- (i) Wenn auf einen Massepunkt keine Kräfte wirken, so ist der Impuls konstant. Unter dem Impuls \mathbf{i} versteht man das Produkt aus Masse m und Geschwindigkeit \mathbf{v} .
- (ii) Die zeitliche Änderung des Impulses ist gleich der auf den Massepunkt wirkenden Kraft. Dieses Gesetz $\frac{d}{dt} \mathbf{i} = \mathbf{f}$ gilt nur für ein Inertialsystem, d.h. ein ruhendes Bezugssystem, unter der Annahme, dass die auftretenden Geschwindigkeiten deutlich unter der Lichtgeschwindigkeit liegen.
- (iii) Zu jeder Kraft gibt es eine entgegengesetzt gerichtete, gleich große Gegenkraft, d.h. actio et reactio.

3.3.1 Kräfte- und Momentensatz

Analog zum vorangegangenen Abschnitt wird im Weiteren ein *starrer Körper* mit Volumen V und ortsabhängiger Dichte $\rho(x, y, z)$ betrachtet. Entsprechend der Darstellung in Abbildung 3.7 wirken auf

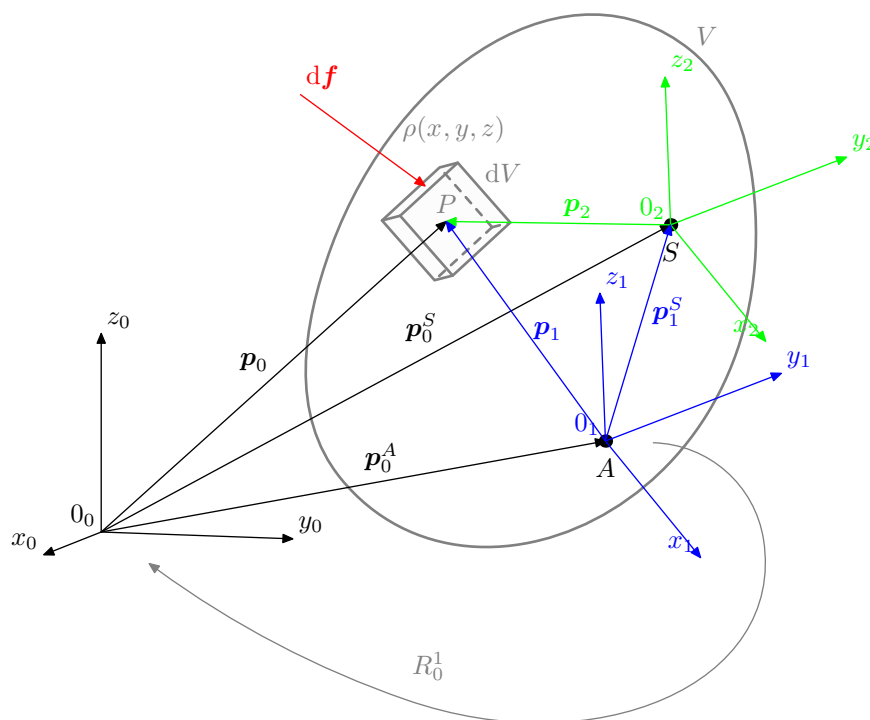


Abb. 3.7: Zur Kinetik der räumlichen Bewegung.

die infinitesimalen Massenelemente $dm = \rho(x, y, z)dV$ die äußeren Kräfte $d\mathbf{f}$. Mit (3.12) gilt für die Lage des Schwerpunkts im Koordinatensystem $(0x_0y_0z_0)$ die Beziehung

$$m\mathbf{p}_0^S = \int_V \rho \mathbf{p}_0 dV, \quad m = \int_V \rho dV$$

mit $\mathbf{p}_0^S(t) = \mathbf{p}_0^A(t) + R_0^1(t)\mathbf{p}_1^S$, wobei angenommen wird, dass A ein körperfester Punkt ist, weshalb \mathbf{p}_1^S konstant ist. Der allgemeine Fall wird in Anmerkung 3.2 diskutiert. Hiermit folgt unter Einbezug der Ausführungen aus Abschnitt 2.6 für die Geschwindigkeit der Ausdruck

$$\dot{\mathbf{p}}_0^S = \dot{\mathbf{p}}_0^A + \boldsymbol{\omega}_0^1 \times (R_0^1 \mathbf{p}_1^S), \quad (3.16)$$

womit sich die Beschleunigung zu

$$\ddot{\mathbf{p}}_0^S = \ddot{\mathbf{p}}_0^A + \dot{\boldsymbol{\omega}}_0^1 \times (R_0^1 \mathbf{p}_1^S) + \boldsymbol{\omega}_0^1 \times (\boldsymbol{\omega}_0^1 \times (R_0^1 \mathbf{p}_1^S)) \quad (3.17)$$

ergibt. Unter der Annahme einer zeitlich konstanten Masse m gilt für den so genannten *Impuls* $\mathbf{i}(t)$ des Starrkörpers

$$\mathbf{i} = m\dot{\mathbf{p}}_0^S = m[\dot{\mathbf{p}}_0^A + \boldsymbol{\omega}_0^1 \times (R_0^1 \mathbf{p}_1^S)].$$

Mit dem 2. Newtonschen Grundgesetz ergibt sich der *Kräftegesetz*

$$\frac{d}{dt} \mathbf{i} = m\ddot{\mathbf{p}}_0^S = m[\ddot{\mathbf{p}}_0^A + \dot{\boldsymbol{\omega}}_0^1 \times (R_0^1 \mathbf{p}_1^S) + \boldsymbol{\omega}_0^1 \times (\boldsymbol{\omega}_0^1 \times (R_0^1 \mathbf{p}_1^S))] = \mathbf{f}, \quad (3.18)$$

d.h. der Schwerpunkt $\mathbf{p}_0^S(t)$ bewegt sich so, als ob alle Kräfte diesen als gemeinsamen Angriffspunkt besitzen und die gesamte Masse in S konzentriert wäre [3, 2].

Anmerkung 3.2

Bewegt sich S relativ zu A , d.h. ist $\mathbf{p}_1^S = \mathbf{p}_1^S(t)$ in Abbildung 3.7, dann ergeben sich aus $\mathbf{p}_0^S(t) = \mathbf{p}_0^A(t) + R_0^1(t)\mathbf{p}_1^S(t)$ die Geschwindigkeit und Beschleunigung allgemein zu

$$\dot{\mathbf{p}}_0^S = \mathbf{v}_0^A + \mathbf{v}_0^{AS} \quad (3.19)$$

mit $\mathbf{v}_0^A = \dot{\mathbf{p}}_0^A + \boldsymbol{\omega}_0^1 \times (R_0^1 \mathbf{p}_1^S)$, $\mathbf{v}_0^{AS} = R_0^1 \dot{\mathbf{p}}_1^S$ bzw.

$$\ddot{\mathbf{p}}_0^S = \mathbf{a}_0^A + \mathbf{a}_0^{AS} + \mathbf{a}_0^{Coriolis} \quad (3.20)$$

mit $\mathbf{a}_0^A = \ddot{\mathbf{p}}_0^A + \dot{\boldsymbol{\omega}}_0^1 \times (R_0^1 \mathbf{p}_1^S) + \boldsymbol{\omega}_0^1 \times (\boldsymbol{\omega}_0^1 \times (R_0^1 \mathbf{p}_1^S))$, $\mathbf{a}_0^{AS} = R_0^1 \ddot{\mathbf{p}}_1^S$ und $\mathbf{a}_0^{Coriolis} = 2\boldsymbol{\omega}_0^1 \times (R_0^1 \dot{\mathbf{p}}_1^S)$. Dabei werden $\mathbf{v}_0^A(t)$ und $\mathbf{a}_0^A(t)$ als Führungsgeschwindigkeit und –beschleunigung, $\mathbf{v}_0^{AS}(t)$ und $\mathbf{a}_0^{AS}(t)$ als Relativgeschwindigkeit und –beschleunigung bezeichnet. Der Term $\mathbf{a}_0^{Coriolis}$ wird Coriolisbeschleunigung genannt und steht orthogonal zu $\boldsymbol{\omega}_0^1$ und \mathbf{v}_0^{AS} .

Wie im vorangegangenen Abschnitt argumentiert wurde, erzeugt eine Kraft, deren Wirkungslinie nicht durch den Schwerpunkt des Starrkörpers führt, bzw. deren Angriffspunkt nicht mit dem Schwerpunkt übereinstimmt, ein Moment. Dieser Effekt wird im Rahmen der Kinetik durch den so genannten *Momentensatz* oder *Drehimpulssatz* beschrieben, der nachfolgend für einen allgemeinen körperfesten Punkt A abgeleitet wird (vgl. Abbildung 3.7). Hierzu wird für das infinitesimale Volumenelement gültige Gesetz $\dot{\mathbf{p}}_0(t)\rho dV = d\mathbf{f}(t)$ das Kreuzprodukt mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}_0(t) := R_0^1(t)\mathbf{p}_1(t)$ vom Bezugspunkt A zum Angriffspunkt der Kraft gebildet und über das Volumen des Starrkörpers integriert, d.h.

$$\boldsymbol{\tau}^A = \int_V \mathbf{r}_0 \times d\mathbf{f} = \int_V \mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{p}}_0 \rho dV. \quad (3.21)$$

Dabei stellt $\boldsymbol{\tau}^A(t)$ das Moment der äußeren Kräfte bezüglich des Punktes A dar. Zudem gelten die Beziehungen

$$\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{p}}_0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{p}}_0) - \dot{\mathbf{r}}_0 \times \dot{\mathbf{p}}_0, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{r}_0 = R_0^1 \mathbf{p}_1 = R_0^1(\mathbf{p}_1^S + R_1^2 \mathbf{p}_2), \quad \text{hier mit } R_1^2 = E \quad (3.23)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \boldsymbol{\omega}_0^1 \times \mathbf{r}_0 \quad \text{unter der Annahme } \dot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

und

$$\dot{\mathbf{p}}_0 = \dot{\mathbf{p}}_0^A + \boldsymbol{\omega}_0^1 \times \mathbf{r}_0 \quad (3.25)$$

mit $\boldsymbol{\omega}_0^1(t)$ der Drehwinkelgeschwindigkeit des rotierenden Koordinatensystems $(0x_1y_1z_1)$ um das Inertialsystem $(0x_0y_0z_0)$. Gleichungen (3.22)–(3.25) führen auf

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{p}}_0 &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{p}}_0) - \dot{\mathbf{r}}_0 \times \dot{\mathbf{p}}_0 \\ &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{p}}_0) - (\boldsymbol{\omega}_0^1 \times \mathbf{r}_0) \times (\dot{\mathbf{p}}_0^A + \boldsymbol{\omega}_0^1 \times \mathbf{r}_0) \\ &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{p}}_0) - (\boldsymbol{\omega}_0^1 \times \mathbf{r}_0) \times \dot{\mathbf{p}}_0^A, \quad \text{da } (\boldsymbol{\omega}_0^1 \times \mathbf{r}_0) \times (\boldsymbol{\omega}_0^1 \times \mathbf{r}_0) = \mathbf{0} \\ &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{p}}_0) - (\boldsymbol{\omega}_0^1 \times R_0^1(\mathbf{p}_1^S + R_1^2 \mathbf{p}_2)) \times \dot{\mathbf{p}}_0^A \\ &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{p}}_0) - (\boldsymbol{\omega}_0^1 \times R_0^1 \mathbf{p}_1^S) \times \dot{\mathbf{p}}_0^A - (\boldsymbol{\omega}_0^1 \times R_0^1 R_1^2 \mathbf{p}_2) \times \dot{\mathbf{p}}_0^A. \end{aligned}$$

Mit der Definition des *Drehimpuls* bezüglich des Punktes A

$$\mathbf{l}_A := \int_V \mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{p}}_0 \rho dV \quad (3.26)$$

führt die vorherige Gleichungskette auf

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{p}}_0 \rho dV &= \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{p}}_0 \rho dV - \underbrace{\int_V (\boldsymbol{\omega}_0^1 \times R_0^1 \mathbf{p}_1^S) \times \dot{\mathbf{p}}_0^A \rho dV}_{= (\boldsymbol{\omega}_0^1 \times R_0^1 \mathbf{p}_1^S) \times \dot{\mathbf{p}}_0^A m} \\ &\quad - \underbrace{\int_V (\boldsymbol{\omega}_0^1 \times R_0^1 R_1^2 \mathbf{p}_2) \times \dot{\mathbf{p}}_0^A \rho dV}_{= \boldsymbol{\omega}_0^1 \times \underbrace{\int_V R_0^1 R_1^2 \mathbf{p}_2 \rho dV}_{= \mathbf{0}} \times \dot{\mathbf{p}}_0^A} \\ &= \frac{d}{dt} \mathbf{l}_A - (\boldsymbol{\omega}_0^1 \times R_0^1 \mathbf{p}_1^S) \times \dot{\mathbf{p}}_0^A m. \end{aligned}$$

Einsetzen von (3.21) liefert den *Momentensatz* bzw. *Drehimpulssatz* in der Form

$$\frac{d}{dt} \mathbf{l}_A = (\boldsymbol{\omega}_0^1 \times R_0^1 \mathbf{p}_1^S) \times \dot{\mathbf{p}}_0^A m + \boldsymbol{\tau}^A. \quad (3.27)$$

Dieser nimmt eine einfachere Gestalt an, wenn der Bezugspunkt A und der Schwerpunkt S zusammen fallen, d.h. $\mathbf{p}_1^S = \mathbf{0}$ ist, oder wenn der körperfeste Punkt A gleichzeitig auch ein raumfester Punkt ist, d.h. $\dot{\mathbf{p}}_0^A = \mathbf{0}$. Der Momentensatz lautet dann

$$\frac{d}{dt} \mathbf{l}_S = \boldsymbol{\tau}^S \quad \text{für} \quad \dot{\mathbf{p}}_1^S = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dt} \mathbf{l}_A = \boldsymbol{\tau}^A \quad \text{für} \quad \dot{\mathbf{p}}_0^A = \mathbf{0}. \quad (3.28)$$

Anders ausgedrückt implizieren die beiden letzten Gleichungen, dass die zeitliche Änderung des Drehimpulses gleich dem Moment der am Körper angreifenden äußeren Kräfte ist.

3.3.2 Trägheitstensor

Für die explizite Bestimmung des Drehimpuls (3.26), d.h.

$$\mathbf{l}_A = \int_V \mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{p}}_0 \rho dV$$

bzw. mit $\dot{\mathbf{p}}_0 = \dot{\mathbf{p}}_0^A + \boldsymbol{\omega}_0^1 \times \mathbf{r}_0$

$$\mathbf{l}_A = \int_V \mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{p}}_0^A \rho dV + \int_V \mathbf{r}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0^1 \times \mathbf{r}_0) \rho dV$$

wird als *Bezugspunkt A der Schwerpunkt* mit $\int_V \rho \mathbf{r}_0 dV = \mathbf{0}$, oder ein *raumfester Punkt* mit $\dot{\mathbf{p}}_0^A = \mathbf{0}$ gewählt. Unter dieser Annahme folgt mit

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_0^1 = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

nach der Auswertung der Kreuzprodukte die Darstellung

$$\mathbf{l}_A = \int_V \mathbf{r}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0^1 \times \mathbf{r}_0) \rho dV = \int_V \begin{bmatrix} (y^2 + z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z \\ -xy\omega_x + (x^2 + z^2)\omega_y - yz\omega_z \\ -xz\omega_x - yz\omega_y + (x^2 + y^2)\omega_z \end{bmatrix} \rho dV. \quad (3.29)$$

Die *Massenträgheitsmomente* bezüglich der x -, y - und z -Achse

$$I_{xx} = \int_V (y^2 + z^2) \rho dV \quad I_{yy} = \int_V (x^2 + z^2) \rho dV \quad I_{zz} = \int_V (x^2 + y^2) \rho dV \quad (3.30a)$$

und die *Deviationsmomente* bzw. *Zentrifugalmomente*

$$I_{xy} = I_{yx} = - \int_V xy \rho dV \quad I_{xz} = I_{zx} = - \int_V xz \rho dV \quad I_{yz} = I_{zy} = - \int_V yz \rho dV \quad (3.30b)$$

sind Komponenten des so genannten *Trägheitstensors* I_A , der sich in Matrixschreibweise zu

$$I_A = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

ergibt. Damit lässt sich (3.29) in der Form

$$\mathbf{l}_A = I_A \boldsymbol{\omega}_0^1 \quad (3.32)$$

angeben. Hierbei ist zu beachten, dass I_A und ω_0^1 im selben Koordinatensystem angegeben sein müssen (hier $(0x_0y_0z_0)$). Für den allgemeinen Fall mit Relativgeschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{p}}_0^A \neq \mathbf{0}$ zwischen dem Inertialsystem und dem Koordinatensystem $(0x_1y_1z_1)$ im Bezugspunkt A gilt somit

$$\boldsymbol{l}_A = \int_V \boldsymbol{r}_0 \times \dot{\boldsymbol{p}}_0^A \rho dV + I_A \omega_0^1. \quad (3.33)$$

Die Massenträgheits- und Deviationsmomente hängen vom gewählten Bezugspunkt A und der Orientierung der Achsen des Koordinatensystem $(0x_1y_1z_1)$ in A ab. Insbesondere kann gezeigt werden, dass es für jeden Bezugspunkt ein ausgezeichnetes Koordinatensystem gibt, für das alle Deviationsmomente identisch Null sind. Dieses Koordinatensystem wird *Hauptachsensystem* genannt. Zudem werden die entsprechenden Massenträgheitsmomente extremal und werden als *Hauptachsenmomente* bezeichnet. Der Trägheitstensor nimmt für ein Hauptachsensystem somit die folgende Form an

$$I_A = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

mit I_j , $j = 1, 2, 3$ den *Hauptträgheitsmomenten*. Allgemein gilt, dass bei *homogenen, symmetrischen Körpern* (z.B. einem Quader) die Symmetrieachsen immer Hauptachsen sind. Bei *homogenen, rotationssymmetrischen Körpern* (z.B. einem Zylinder oder einem Kegel bzw. Kegelschnitt) sind die Symmetrieachse und jede dazu orthogonale Achse Hauptachsen [2].

Aufgabe 3.9. Bestimmen Sie die Massenträgheits- und Deviationsmomente für den in Abbildung 3.8 dargestellten Starrkörper bezüglich dem Bezugspunkt A und dem Schwerpunkt S . Nehmen Sie dabei an, dass die Dichte ρ konstant ist, d.h. der Körper ist homogen.

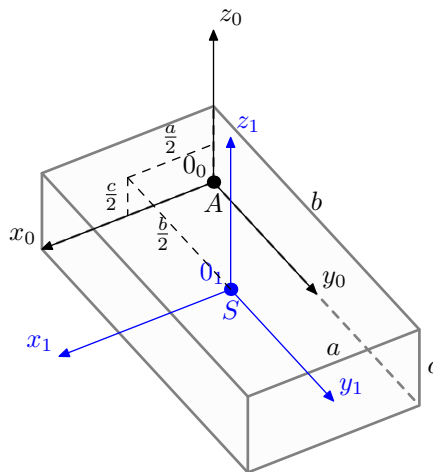


Abb. 3.8: Zur Bestimmung der Massenträgheits- und Deviationsmomente.

Lösung 3.9. Für den Bezugspunkt A ergeben sich die Massenträgheitsmomente zu

$$I_{x_0, x_0} = \rho \int_0^c \int_0^b \int_0^a (y_0^2 + z_0^2) dx_0 dy_0 dz_0 = \rho \frac{abc(b^2 + c^2)}{3} = \frac{m(b^2 + c^2)}{3}$$

$$I_{y_0, y_0} = \rho \int_0^c \int_0^b \int_0^a (x_0^2 + z_0^2) dx_0 dy_0 dz_0 = \rho \frac{abc(a^2 + c^2)}{3} = \frac{m(a^2 + c^2)}{3}$$

$$I_{z_0, z_0} = \rho \int_0^c \int_0^b \int_0^a (x_0^2 + y_0^2) dx_0 dy_0 dz_0 = \rho \frac{abc(a^2 + b^2)}{3} = \frac{m(a^2 + b^2)}{3},$$

während für die Deviationsmomente

$$I_{x_0, y_0} = I_{y_0, x_0} = -\rho \int_0^c \int_0^b \int_0^a x_0 y_0 dx_0 dy_0 dz_0 = -\frac{mab}{4}$$

$$I_{x_0, z_0} = I_{z_0, x_0} = -\rho \int_0^c \int_0^b \int_0^a x_0 z_0 dx_0 dy_0 dz_0 = -\frac{mac}{4}$$

$$I_{y_0, z_0} = I_{z_0, y_0} = -\rho \int_0^c \int_0^b \int_0^a y_0 z_0 dx_0 dy_0 dz_0 = -\frac{mbc}{4}$$

gelten. Der Trägheitstensor kann somit für den Quader aus Abbildung 3.8 in der Form

$$I_A = \frac{m}{12} \begin{bmatrix} 4(b^2 + c^2) & -3ab & -3ac \\ -3ab & 4(a^2 + c^2) & -3bc \\ -3ac & -3bc & 4(a^2 + b^2) \end{bmatrix}$$

angegeben werden. Für den Schwerpunkt S ergeben sich die Beziehungen

$$I_{x_1, x_1} = \rho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (y_1^2 + z_1^2) dx_1 dy_1 dz_1 = \rho \frac{abc(b^2 + c^2)}{12} = \frac{m(b^2 + c^2)}{12}$$

$$I_{y_1, y_1} = \rho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x_1^2 + z_1^2) dx_1 dy_1 dz_1 = \rho \frac{abc(a^2 + c^2)}{12} = \frac{m(a^2 + c^2)}{12}$$

$$I_{z_1, z_1} = \rho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x_1^2 + y_1^2) dx_1 dy_1 dz_1 = \rho \frac{abc(a^2 + b^2)}{12} = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$$

$$I_{x_1, y_1} = I_{y_1, x_1} = -\rho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x_1 y_1 dx_1 dy_1 dz_1 = 0$$

$$I_{x_1, z_1} = I_{z_1, x_1} = -\rho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x_1 z_1 dx_1 dy_1 dz_1 = 0$$

$$I_{y_1, z_1} = I_{z_1, y_1} = -\rho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y_1 z_1 dx_1 dy_1 dz_1 = 0$$

und damit der Trägheitstensor in der Form

$$I_S = \frac{m}{12} \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}.$$

Offensichtlich stellen die Achsen x_1 , y_1 und z_1 Symmetrieachsen dar, so dass $(0x_1 y_1 z_1)$ ein Hauptachsensystem ist. Für den Sonderfall eines Würfels mit $a = b = c$ gilt

$$I_S = \frac{ma^2}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 3.10 (Turmdrehkran). Bestimmen Sie den Schwerpunkt und die Komponenten des Trägheitstensors für den Turm und den Ausleger des in Aufgabe 2.6 untersuchten Turmdrehkrans. Die angehängte Last ist dabei zu vernachlässigen. Zudem wird angenommen, dass Turm und Ausleger durch quaderförmige Starrkörper mit konstanter Dichte ρ gegeben sind. Alle Berechnungen sollen auf das Koordinatensystem $(0x_0y_0z_0)$ bezogen werden. Die geometrischen Abmessungen sind Abbildung 3.9 zu entnehmen.

Lösung 3.10. Die Lösung gliedert sich in mehrere Teile zur Bestimmung des Schwerpunkts des Turmdrehkrans und der Komponenten des Trägheitstensors. Hierbei wird zudem der Satz von Steiner eingeführt.

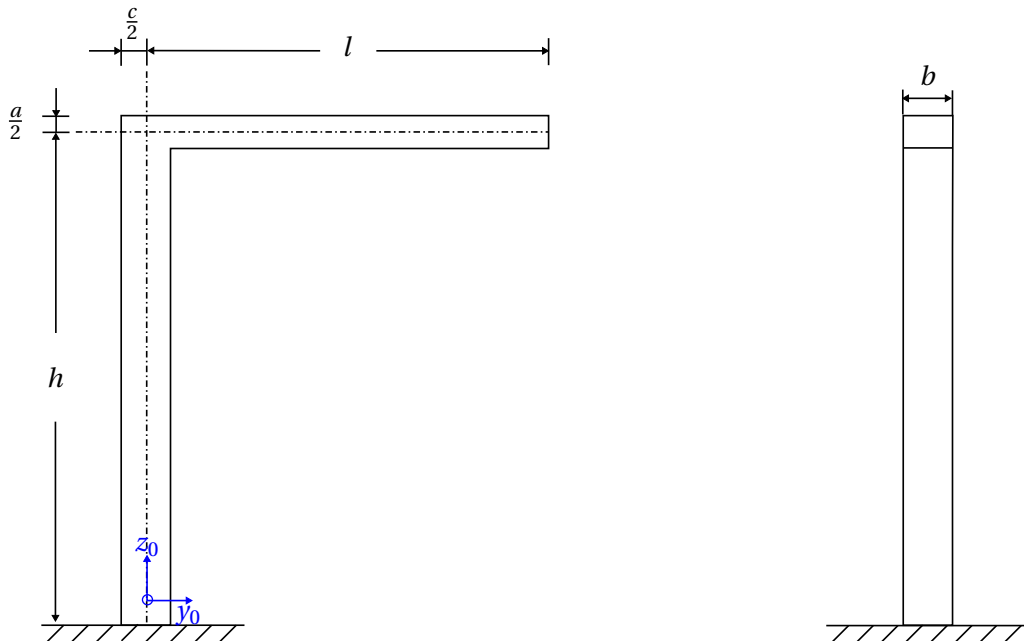


Abb. 3.9: Turmdrehkran mit 5 Freiheitsgraden.

- *Schwerpunkt des Turms:* Die Masse des Turms ergibt sich zu

$$m_T = \rho bc \left(h + \frac{a}{2} \right)$$

Damit kann der Vektor zum Schwerpunkt des Turm gemäß (3.12) bestimmt werden, d.h.

$$\mathbf{p}_0^{S,T} = \frac{1}{m_T} \int_0^{h+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} dx dy dz = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \left(h + \frac{a}{2} \right) \end{bmatrix}.$$

- *Komponenten des Trägheitstensors des Turms bezüglich des Turmschwerpunkts:* Mit (3.30a) folgen die Massenträgheitsmomente zu

$$I_{xx}^T = \int_0^{h+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho \left([y - p_{0,y}^{S,T}]^2 + [z - p_{0,z}^{S,T}]^2 \right) dx dy dz = \frac{m_T}{12} \left(c^2 + \left(h + \frac{a}{2} \right)^2 \right)$$

$$I_{yy}^T = \int_0^{h+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho \left([x - p_{0,x}^{S,T}]^2 + [z - p_{0,z}^{S,T}]^2 \right) dx dy dz = \frac{m_T}{12} \left(b^2 + \left(h + \frac{a}{2} \right)^2 \right)$$

$$I_{zz}^T = \int_0^{h+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho \left([x - p_{0,x}^{S,T}]^2 + [y - p_{0,y}^{S,T}]^2 \right) dx dy dz = \frac{m_T}{12} (b^2 + c^2).$$

Für die Deviationsmomente gelten mit (3.30b) zudem die folgenden Beziehungen

$$I_{xy}^T = I_{yx}^T = - \int_0^{h+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho (x - p_{0,x}^{S,T}) (y - p_{0,y}^{S,T}) dx dy dz = 0$$

$$I_{xz}^T = I_{zx}^T = - \int_0^{h+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho (x - p_{0,x}^{S,T}) (z - p_{0,z}^{S,T}) dx dy dz = 0$$

$$I_{yz}^T = I_{zy}^T = - \int_0^{h+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho (y - p_{0,y}^{S,T}) (z - p_{0,z}^{S,T}) dx dy dz = 0.$$

- *Schwerpunkt des Auslegers: Für die Masse des Auslegers gilt*

$$m_A = \rho ab \left(l - \frac{c}{2} \right).$$

Mit (3.12) liefert dies den Vektor zum Schwerpunkt des Auslegers

$$\mathbf{p}_0^{S,A} = \frac{1}{m_A} \int_{h-\frac{a}{2}}^{h+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} dx dy dz = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \left(l + \frac{c}{2} \right) \\ h \end{bmatrix}.$$

- *Komponenten des Trägheitstensors des Auslegers bezüglich des Auslegerschwerpunkts: Mit (3.30a) und (3.30b) folgen die Massenträgheits- und Deviationsmomente zu*

$$I_{xx}^A = \int_{h-\frac{a}{2}}^{h+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho \left([y - p_{0,y}^{S,A}]^2 + [z - p_{0,z}^{S,A}]^2 \right) dx dy dz = \frac{m_A}{12} \left(a^2 + \left(l - \frac{c}{2} \right)^2 \right)$$

$$I_{yy}^A = \int_{h-\frac{a}{2}}^{h+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho \left([x - p_{0,x}^{S,A}]^2 + [z - p_{0,z}^{S,A}]^2 \right) dx dy dz = \frac{m_A}{12} (a^2 + b^2)$$

$$I_{zz}^A = \int_{h-\frac{a}{2}}^{h+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho \left([x - p_{0,x}^{S,A}]^2 + [y - p_{0,y}^{S,A}]^2 \right) dx dy dz = \frac{m_A}{12} \left(b^2 + \left(l - \frac{c}{2} \right)^2 \right)$$

und

$$I_{xy}^A = I_{yx}^A = I_{xz}^A = I_{zx}^A = I_{yz}^A = I_{zy}^A = 0.$$

- *Schwerpunkt des Turmdrehkrans: Turm und Ausleger bilden gemeinsam den Starrkörper, so dass der Schwerpunktsvektor des Turmdrehkrans durch Auswertung von (3.15) ermittelt werden muss. Dies führt auf*

$$\mathbf{p}_0^S = \frac{m_T \mathbf{p}_0^{S,T} + m_A \mathbf{p}_0^{S,A}}{m_T + m_A} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a l^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}{2 ch + al} \\ h - \frac{c}{2} \frac{h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}{ch + al} \end{bmatrix}.$$

- *Komponenten des Trägheitstensors des Turmdrehkrans bezüglich des Gesamtschwerpunkts: Die Komponenten des Trägheitstensors des Gesamtsystems können nun durch direkte Auswertung*

von (3.30a), (3.30b) bezüglich des Schwerpunkts des Turmdrehkrans \mathbf{p}_0^S ermittelt werden. Anstelle der direkten Auswertung soll dazu von den bisherigen Teilergebnissen für Turm und Ausleger Gebrauch gemacht werden. Dabei sei

$$I_S = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

mit den Einträgen entsprechend (3.30a), (3.30b) für das Gesamtvolumen V . Exemplarisch wird das weitere Vorgehen anhand des Massenträgheitsmoments I_{xx} illustriert, d.h.

$$I_{xx} = \int_V \rho \left([y - p_{0,y}^S]^2 + [z - p_{0,z}^S]^2 \right) dV.$$

Offensichtlich ist dies äquivalent zur Berechnung der Summe der Volumenintegrale über die beiden Teilkomponenten Turm und Ausleger

$$I_{xx} = \int_{V_T} \rho \left([y - p_{0,y}^S]^2 + [z - p_{0,z}^S]^2 \right) dV + \int_{V_A} \rho \left([y - p_{0,y}^S]^2 + [z - p_{0,z}^S]^2 \right) dV.$$

Dabei ist unmittelbar einsichtig, dass die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} & \int_{V_T} \rho \left([y - p_{0,y}^S]^2 + [z - p_{0,z}^S]^2 \right) dV \\ &= \int_{V_T} \rho \left([y - p_{0,y}^{S,T} + p_{0,y}^{S,T} - p_{0,y}^S]^2 + [z - p_{0,z}^{S,T} + p_{0,z}^{S,T} - p_{0,z}^S]^2 \right) dV \\ &= \underbrace{\int_{V_T} \rho \left([y - p_{0,y}^{S,T}]^2 + [z - p_{0,z}^{S,T}]^2 \right) dV}_{= I_{xx}^T} + \underbrace{\int_{V_T} \rho \left([p_{0,y}^{S,T} - p_{0,y}^S]^2 + [p_{0,z}^{S,T} - p_{0,z}^S]^2 \right) dV}_{= \left([p_{0,y}^{S,T} - p_{0,y}^S]^2 + [p_{0,z}^{S,T} - p_{0,z}^S]^2 \right) \int_{V_T} \rho dV = m_T} \\ & \quad + 2 \underbrace{\int_{V_T} \rho \left([y - p_{0,y}^{S,T}] [p_{0,y}^{S,T} - p_{0,y}^S] + [z - p_{0,z}^{S,T}] [p_{0,z}^{S,T} - p_{0,z}^S] \right) dV}_{= (\star)} \end{aligned}$$

für das 1. Teilintegral und entsprechende Beziehungen für das 2. Teilintegral gelten. Dabei liefert die weitere Auswertung

$$\begin{aligned} (\star) &= 2(p_{0,y}^{S,T} - p_{0,y}^S) \int_{V_T} \rho (y - p_{0,y}^{S,T}) dV + 2(p_{0,z}^{S,T} - p_{0,z}^S) \int_{V_T} \rho (z - p_{0,z}^{S,T}) dV \\ &= 2(p_{0,y}^{S,T} - p_{0,y}^S) \left(\underbrace{\int_{V_T} \rho y dV}_{= m_T p_{0,y}^{S,T}} - m_T p_{0,y}^{S,T} \right) \\ & \quad + 2(p_{0,z}^{S,T} - p_{0,z}^S) \left(\underbrace{\int_{V_T} \rho z dV}_{= m_T p_{0,z}^{S,T}} - m_T p_{0,z}^{S,T} \right) = 0. \end{aligned}$$

Für das 2. Teilintegral über V_A folgt entsprechend

$$\int_{V_A} \rho \left([y - p_{0,y}^S]^2 + [z - p_{0,z}^S]^2 \right) dV = I_{xx}^A + m_A \left([p_{0,y}^{S,A} - p_{0,y}^S]^2 + [p_{0,z}^{S,A} - p_{0,z}^S]^2 \right)$$

was zusammenfassend auf

$$I_{xx} = I_{xx}^T + I_{xx}^A + m_T \left(\left[p_{0,y}^{S,T} - p_{0,y}^S \right]^2 + \left[p_{0,z}^{S,T} - p_{0,z}^S \right]^2 \right) \quad (3.35)$$

$$+ m_A \left(\left[p_{0,y}^{S,A} - p_{0,y}^S \right]^2 + \left[p_{0,z}^{S,A} - p_{0,z}^S \right]^2 \right) \quad (3.36)$$

führt. Die verbliebenen Massenträgheits- und Deviationsmomente folgen in analoger Weise zu

$$I_{yy} = I_{yy}^T + I_{yy}^A + m_T \left(\left[p_{0,x}^{S,T} - p_{0,x}^S \right]^2 + \left[p_{0,z}^{S,T} - p_{0,z}^S \right]^2 \right) + m_A \left(\left[p_{0,x}^{S,A} - p_{0,x}^S \right]^2 + \left[p_{0,z}^{S,A} - p_{0,z}^S \right]^2 \right) \quad (3.37)$$

$$I_{zz} = I_{zz}^T + I_{zz}^A + m_T \left(\left[p_{0,x}^{S,T} - p_{0,x}^S \right]^2 + \left[p_{0,y}^{S,T} - p_{0,y}^S \right]^2 \right) + m_A \left(\left[p_{0,x}^{S,A} - p_{0,x}^S \right]^2 + \left[p_{0,y}^{S,A} - p_{0,y}^S \right]^2 \right) \quad (3.38)$$

$$I_{xy} = I_{xy}^T + I_{xy}^A - m_T \left(p_{0,x}^{S,T} - p_{0,x}^S \right) \left(p_{0,y}^{S,T} - p_{0,y}^S \right) - m_A \left(p_{0,x}^{S,A} - p_{0,x}^S \right) \left(p_{0,y}^{S,A} - p_{0,y}^S \right) \quad (3.39)$$

$$I_{xz} = I_{xz}^T + I_{xz}^A - m_T \left(p_{0,x}^{S,T} - p_{0,x}^S \right) \left(p_{0,z}^{S,T} - p_{0,z}^S \right) - m_A \left(p_{0,x}^{S,A} - p_{0,x}^S \right) \left(p_{0,z}^{S,A} - p_{0,z}^S \right) \quad (3.40)$$

$$I_{yz} = I_{yz}^T + I_{yz}^A - m_T \left(p_{0,y}^{S,T} - p_{0,y}^S \right) \left(p_{0,z}^{S,T} - p_{0,z}^S \right) - m_A \left(p_{0,y}^{S,A} - p_{0,y}^S \right) \left(p_{0,z}^{S,A} - p_{0,z}^S \right). \quad (3.41)$$

Diese Beziehungen sind in der Literatur auch als Satz von Steiner bekannt.

Anmerkung 3.3

Sei der Bezugspunkt A raum- und körperfest, d.h. es gelte $\dot{\mathbf{p}}_0^A = \mathbf{0}$. Dann sind folgende Punkte anzumerken:

- (i) Der Drehimpuls \mathbf{l}_A und die Drehwinkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_0^1$ zeigen gemäß (3.33) offensichtlich nur dann in die selbe Richtung, wenn die Drehung um eine Hauptachse erfolgt.
- (ii) Einsetzen von (3.33), d.h. $\mathbf{l}_A = \int_V \mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{p}}_0^A \rho dV + I_A \boldsymbol{\omega}_0^1$ in den Momentensatz (3.27) liefert

$$\frac{d}{dt} \mathbf{l}_A = \frac{d}{dt} \left(\int_V \mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{p}}_0^A \rho dV + I_A \boldsymbol{\omega}_0^1 \right) = (\boldsymbol{\omega}_0^1 \times R_0^1 \mathbf{p}_1^S) \times \dot{\mathbf{p}}_0^A m + \boldsymbol{\tau}^A. \quad (3.42)$$

Für $\dot{\mathbf{p}}_0^A = \mathbf{0}$ vereinfacht sich dies zu

$$I_A \dot{\boldsymbol{\omega}}_0^1 + \boldsymbol{\omega}_0^1 \times (I_A \boldsymbol{\omega}_0^1) = \boldsymbol{\tau}^A.$$

Im Fall, dass das Koordinatensystem $(0x_1 y_1 z_1)$ im Bezugspunkt A ein Hauptachsensystem ist, führt die komponentenweise Auswertung der obigen Gleichung auf

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_{x_1} - (I_2 - I_3) \omega_{y_1} \omega_{z_1} &= \tau_{x_1}^A \\ I_2 \dot{\omega}_{y_1} - (I_3 - I_1) \omega_{x_1} \omega_{z_1} &= \tau_{y_1}^A \\ I_3 \dot{\omega}_{z_1} - (I_1 - I_2) \omega_{x_1} \omega_{y_1} &= \tau_{z_1}^A \end{aligned} \quad (3.43)$$

Die nichtlinearen, gekoppelten Differenzialgleichungen (3.43) werden als *Eulersche Gleichungen* bezeichnet und stellen den Momentensatz bezüglich eines körperfesten Hauptachsensystems dar. Deren Lösung gestaltet sich als schwierig, wenn die Bewegung des körperfesten Koordinatensystems $(0x_1 y_1 z_1)$ nicht von vornherein bekannt ist, was z.B. bei der Beschreibung der Bewegung eines Kreisels der Fall ist.

Aufgabe 3.11 (Schwingender Winkel). Der in Abbildung 3.10 dargestellte Winkel besteht aus zwei homogenen, dünnen Stäben identischer Dichte ρ . Die Gewichtskraft wirke in Richtung der negativen y_0 -Achse mit der Erdbeschleunigung g . Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung.

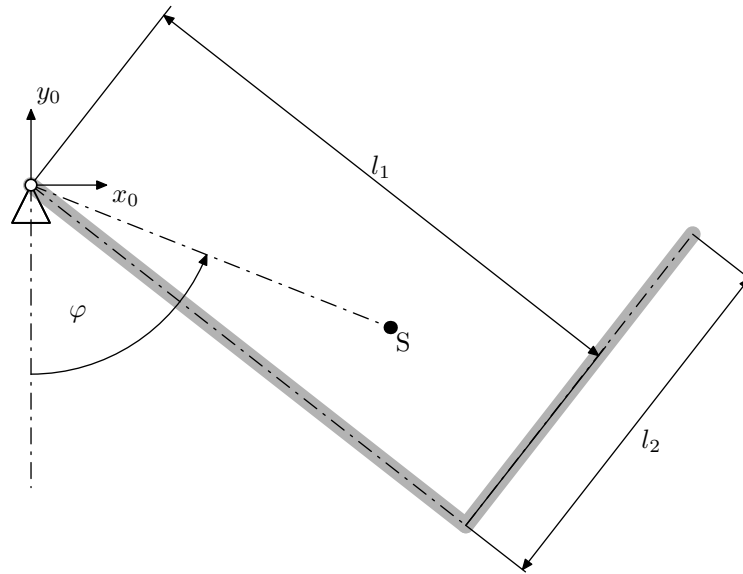


Abb. 3.10: Winkel mit Aufhängepunkt A.

Lösung 3.11. Die Gewichtskraft greift im Schwerpunkt S an. Dieser ergibt sich mit (3.10) für $\varphi = 0$ bzw. in einem Koordinatensystem $(0x_1y_1z_1)$, dessen y_1 -Achse mit der Verbindungslinie zwischen Lager und Winkeleckenpunkt zusammenfällt, zu

$$\mathbf{p}_1^S = \frac{m_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{l_1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2} \\ -l_1 \\ 0 \end{bmatrix}}{m_1 + m_2}. \quad (3.44)$$

Da beide Stäbe identische Dichte ρ besitzen gilt zudem $m_1 l_2 = m_2 l_1$ bzw. mit $m = m_1 + m_2$, dass

$$m_1 = m \frac{l_1}{l_1 + l_2}, \quad m_2 = m \frac{l_2}{l_1 + l_2}.$$

Dies führt auf

$$\mathbf{p}_1^S = \frac{1}{2(l_1 + l_2)} \begin{bmatrix} l_2^2 \\ -l_1(l_1 + 2l_2) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Da der Bezugspunkt A sowohl raum- als auch körperfest ist, gilt mit (3.42), dass

$$I_A \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\tau}^A = \mathbf{p}_0^S \times \mathbf{f}$$

mit $\mathbf{p}_0^S = R_{z_0, \varphi} \mathbf{p}_1^S$ und $\mathbf{f} = -m\mathbf{g} = [0, -mg, 0]^T$. Die rechte Seite ergibt sich somit zu

$$\boldsymbol{\tau}^A = [0 \quad 0 \quad -mgLs_\varphi]^T$$

mit $L = |\mathbf{p}_1^S|$. Dies führt auf die Bewegungsgleichung

$$I_{zz}\ddot{\varphi} = -mgLs\varphi.$$

Hierbei kann das Massenträgheitsmoment I_{zz} analog zum Massenträgheitsmoment I_{xx} des Turmdrehkrans aus Aufgabe 3.10 für $a, b, c \rightarrow 0$ bestimmt werden.

3.4 Euler–Lagrange–Gleichungen

Den Newtonschen Axiomen sind gewisse Prinzipien der Mechanik gleichwertig, die oftmals sehr vorteilhaft zur systematischen Bestimmung der Bewegungsgleichungen auch komplexer Systeme herangezogen werden können. Hierzu werden im Folgenden die *Euler–Lagrange–Gleichungen* eingeführt, die auf der Formulierung der potenziellen und kinetischen Energie des Starrkörpersystems beruhen.

3.4.1 Generalisierte Koordinaten und Freiheitsgrade

Die Lage einer frei beweglichen Punktmasse ist durch die Angabe der drei translatorischen Verschiebungen bezüglich des Inertialsystems eindeutig bestimmt. Man sagt, die *Punktmasse besitzt 3 Freiheitsgrade*. Dem gegenüber wird die Konfiguration eines frei beweglichen *Starrkörpers durch 6 Freiheitsgrade* beschrieben, welche drei translatorische Verschiebungen und die drei Komponenten der Orientierung des Starrkörpers bezüglich des Inertialsystems umfassen. Darüber hinaus treten bei Starrkörpersystemen im Allgemeinen so genannte *Zwangsbedingungen* auf. Beispielsweise gelten

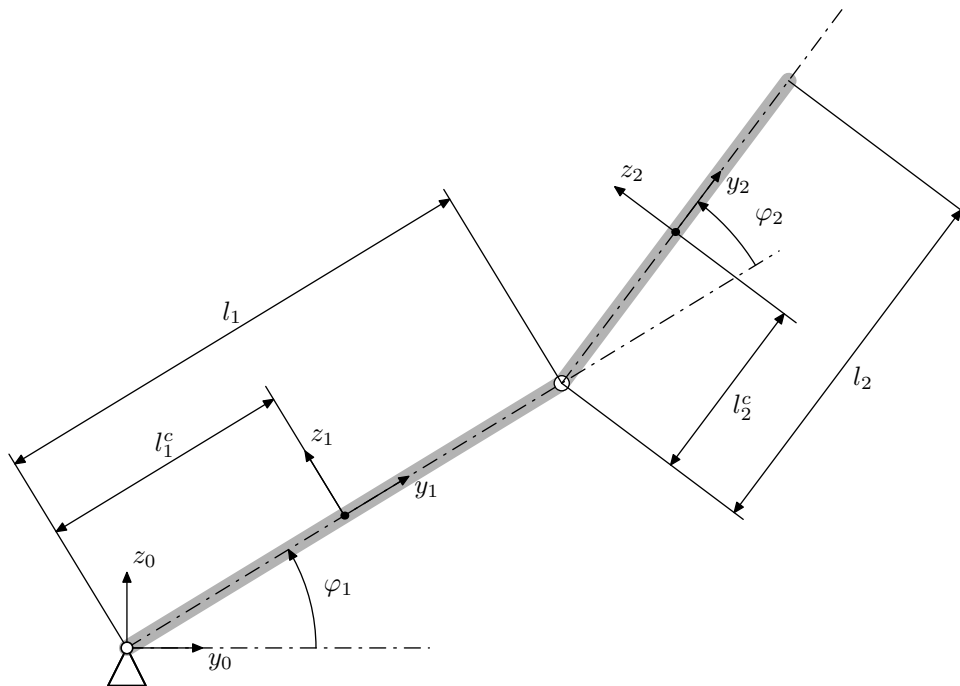


Abb. 3.11: Planarer Zwei-Gelenk-Manipulator.

für den in Aufgabe 2.4 untersuchten planaren Zwei-Gelenk-Manipulator (vgl. Abbildung 3.11), die Beziehungen

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}_0^{e,1}\|_2^2 &= (y_0^{e,1})^2 + (z_0^{e,1})^2 = (l_1)^2 \\ \|\mathbf{p}_0^{e,2} - \mathbf{p}_0^{e,1}\|_2^2 &= (y_0^{e,2} - y_0^{e,1})^2 + (z_0^{e,2} - z_0^{e,1})^2 = (l_2)^2. \end{aligned}$$

Entsprechend gilt für zwei Masseteilchen i und j eines Starrkörpers, die durch eine Linie der konstanten Länge l_{ij} miteinander verbunden sind, die Zwangsbedingung

$$\|\mathbf{p}_0^i - \mathbf{p}_0^j\|_2 = (\mathbf{p}_0^i - \mathbf{p}_0^j)^T (\mathbf{p}_0^i - \mathbf{p}_0^j) = (l_{ij})^2.$$

Zur Vereinfachung der weiteren Ausführungen bezeichnet im Folgenden $\mathbf{r}_j = [x_j, y_j, z_j]^T$ einen Positionsvektor beginnend im Koordinatenursprung des Inertialsystems. Man spricht von einer *holonomen Zwangsbedingung*, wenn sich diese in der Form

$$g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) = 0 \quad (3.45)$$

ausdrücken lässt. Eine solche Zwangsbedingung wird auch als *geometrische Zwangsbedingung* bezeichnet. Zwangsbedingungen, die nicht gemäß (3.45) darstellbar sind, werden als *nicht-holonome Zwangsbedingung* oder *kinematische Zwangsbedingung* bezeichnet. Dies umfasst beispielsweise Ungleichungsbedingungen

$$g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) \geq 0 \quad (3.46)$$

oder Zwangsbedingungen, die explizit geschwindigkeitsabhängig und nicht integrierbar sind, d.h.

$$g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots, t) = 0. \quad (3.47)$$

Typische Fälle nicht-holonomer Zwangsbedingungen sind das Rollen einer Scheibe auf einer Ebene oder das Gleiten eines Schlittschuhs auf einer ebenen Eisfläche.

Ein System von N Punktmassen, das keinen Zwangsbedingungen unterliegt, besitzt offensichtlich $3N$ Freiheitsgrade. Existieren jedoch $r \leq 3N$ holonome Zwangsbedingungen

$$g_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad (3.48)$$

dann ist einsichtig, dass die Koordinaten \mathbf{r}_k , $k = 1, \dots, N$ nicht mehr linear unabhängig sind und zur Einhaltung der Zwangsbedingungen entsprechende Zwangskräfte auftreten müssen, welche a priori unbekannt sind. Mittels der r Zwangsbedingungen können r Koordinaten eliminiert werden. Anders ausgedrückt ist es möglich $3N - r$ neue *unabhängige Koordinaten* q_i , $i = 1, \dots, 3N - r$ so einzuführen, dass alle Koordinaten in der Form

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_{3N-r}, t) = \mathbf{r}_k(\mathbf{q}, t), \quad k = 1, \dots, N \quad (3.49)$$

dargestellt werden können. Gleichung (3.49) stellt somit eine *Koordinatentransformation* dar. Man sagt, das System besitzt $3N - r$ *Freiheitsgrade* und die Koordinaten $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_{3N-r}]^T$ bezeichnet man als *generalisierte Koordinaten*. Die Anzahl der Freiheitsgrade stellt somit die minimale Anzahl an Koordinaten dar, die zur vollständigen Systembeschreibung notwendig ist. Die Wahl der generalisierten Koordinaten, die physikalischen Größen oder auch allgemeinen (nicht-physikalischen) Größen entsprechen können, ist nicht notwendigerweise eindeutig [3, 2].

3.4.2 Prinzip der virtuellen Arbeit

Die Bewegungsgleichungen, die mittels der Newtonschen Grundgesetze ermittelt werden, beinhalten alle an einem Körper angreifenden Kräfte, inklusive der Zwangskräfte. Dieses Vorgehen ist einerseits aufwändig, z.B. für Systeme von Massepunkten, und andererseits sind die Zwangskräfte oftmals nicht von Interesse. Eine Methodik, die auf die Bewegungsgleichungen ohne Zwangskräfte führt ist das

Prinzip der virtuellen Arbeit, das nachfolgend einführend erläutert wird, mit dem primären Ziel, die Euler–Lagrange–Gleichungen zu motivieren.

Hierzu ist der Begriff der *virtuellen Verrückung* notwendig. Werden mit \mathbf{r}_j , $j = 1, \dots, N$ die Ortsvektoren zu den einzelnen Massen m_j eines Systems von Massepunkten beschrieben, dann sind *virtuelle Verrückungen* gedachte, infinitesimale Verschiebungen $\delta \mathbf{r}_j$, die mit den Bindungen (Zwangsbedingungen) des Systems verträglich sind. Da diese Verrückungen nur virtuell sind, geht damit auch keine Änderung der Zeit einher, d.h. das System wird dabei zu einem beliebigen Zeitpunkt t festgehalten und die virtuellen Verrückungen wirken instantan.

Zur Illustration wird ein System bestehend aus N Massepunkten herangezogen, das einer Zwangsbedingung der Form (3.45) bzw. (3.49) unterliegt, d.h.

$$g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0$$

mit $\mathbf{r}_j = [x_j, y_j, z_j]^T$. Eine virtuelle Verrückung ist für festes t durch

$$g(\mathbf{r}_1 + \delta \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 + \delta \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N + \delta \mathbf{r}_N, t) = 0$$

gegeben. Somit gilt für die Taylorreihenentwicklung um $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ bei Vernachlässigung der Terme der Ordnung zwei und höher, dass

$$g(\mathbf{r}_1 + \delta \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 + \delta \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N + \delta \mathbf{r}_N, t) = g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) + \sum_{j=1}^N (\nabla_{\mathbf{r}_j} g)^T(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) \delta \mathbf{r}_j = 0$$

Letzteres impliziert, dass die virtuellen Verrückungen zur Einhaltung der Kompatibilität mit den Zwangsbedingungen die Gleichung

$$\sum_{j=1}^N (\nabla_{\mathbf{r}_j} g)^T(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) \delta \mathbf{r}_j = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \delta x_j + \frac{\partial g}{\partial y_j} \delta y_j + \frac{\partial g}{\partial z_j} \delta z_j \right) = 0 \quad (3.50)$$

erfüllen müssen, weshalb nur $3N - 1$ Komponenten der N Vektoren $\delta \mathbf{r}_j$, $j = 1, \dots, N$ beliebig sind.

Auf den i -ten Massepunkt sollen angewandte bzw. externe Kräfte \mathbf{f}_i^a und Zwangskräfte \mathbf{f}_i^z wirken, so dass aus dem Kräftesatz (3.18) die Bewegungsgleichung

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{f}_i^a + \mathbf{f}_i^z \quad (3.51)$$

folgt. Das *Prinzip von d'Alembert* besagt, dass die Summe der durch die Zwangskräfte \mathbf{f}_i^z verrichteten *Arbeit* δW^z bei einer virtuellen Verrückung identisch zu Null ist. Für das System aus N Massepunkten gilt somit

$$\delta W^z = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^z \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (3.52)$$

Einsetzen von (3.52) in (3.51) ergibt

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{f}_i^a) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (3.53)$$

Da wegen (3.50) die virtuellen Verrückungen $\delta \mathbf{r}_i$, $i = 1, \dots, N$ nicht unabhängig sind, kann aus (3.53) nicht auf $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{f}_i^a = \mathbf{0}$ geschlossen werden. Um die resultierenden Gleichungen zu ermitteln, wird

angenommen, dass das System n Freiheitsgrade aufweist und somit durch n generalisierte Koordinaten q_j , $j = 1, \dots, n$ beschrieben werden kann. Mit $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$, $j = 1, \dots, N$ gilt für die virtuelle Verrückung (Zeit t ist festgehalten) die Beziehung

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (3.54)$$

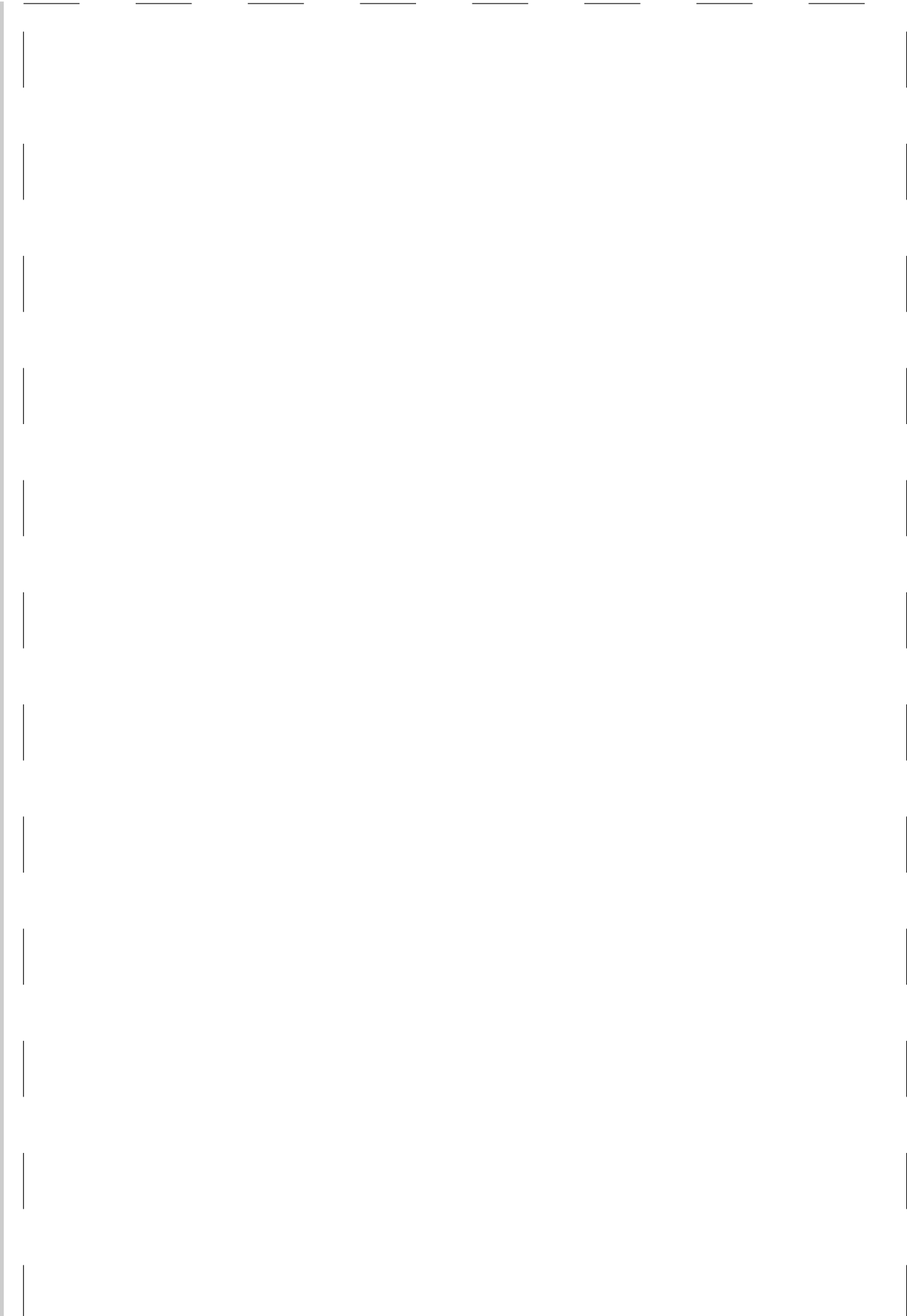
was mit (3.53) auf

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j, \quad Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (3.55)$$

führt. Dabei werden Q_j , $j = 1, \dots, N$ als Komponenten der *generalisierten Kraft* bezeichnet, wobei zu beachten ist, dass nur die Anforderung gestellt wird, dass das Produkt $Q_j \delta q_j$ die Dimension einer Arbeit besitzen muss. Somit muss jedoch Q_j nicht die Dimension einer Kraft und δq_j nicht die Dimension einer Länge aufweisen, was durch die Bezeichnung generalisiert ausgedrückt wird.

|

Beispiel 3.1 (Anwendung des D'Alembertschen Prinzips).



Zur eigentlichen Auswertung ist die generische Formulierung (3.53) nur bedingt von Nutzen, weshalb im Weiteren von dem folgenden Zusammenhang Gebrauch gemacht wird, der unmittelbar aus der Produktregel folgt, d.h.

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{d}{dt} \left[m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right). \quad (3.56)$$

Bezeichne \mathbf{v}_i die (translatorische) Geschwindigkeit gemäß

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (3.57)$$

bzw.

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j}, \quad (3.58)$$

dann folgt aus (3.56) die Beziehung

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{d}{dt} \left[m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right] - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right). \quad (3.59)$$

Mit der *kinetischen Energie* des Systems von Massepunkten

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \quad (3.60)$$

ergibt sich aus der vorangegangenen Gleichung der Zusammenhang

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} W_{\text{kin}} - \frac{\partial}{\partial q_j} W_{\text{kin}}. \quad (3.61)$$

Einsetzen von (3.61) in (3.55) führt auf

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} W_{\text{kin}} - \frac{\partial}{\partial q_j} W_{\text{kin}} - Q_j \right) \delta q_j = 0 \quad (3.62)$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der virtuellen Verrückungen δq_j , $j = 1, \dots, n$ kann diese Gleichung nur dann erfüllt sein (vergleiche auch mit dem Fundamentallema der Variationsrechnung [4, 5]), wenn gilt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} W_{\text{kin}} - \frac{\partial}{\partial q_j} W_{\text{kin}} = Q_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.63)$$

Dieses System von n gekoppelten gewöhnlichen Differenzialgleichungen 2. Ordnung bezeichnet man auch als *Euler-Lagrange-Gleichungen* mit den generalisierten Koordinaten q_j und den *generalisierten Geschwindigkeiten* \dot{q}_j . Typischerweise wird die generalisierte Kraft Q_j in einen konservativen Anteil und einen nicht-konservativen Anteil zerlegt. Konservative generalisierte Kräfte sind dadurch charakterisiert, dass sie durch eine skalare Potenzialfunktion $W_{\text{pot}} = W_{\text{pot}}(q_1, \dots, q_n)$ definiert sind bzw. die durch die Kraft verrichtete Arbeit ist wegunabhängig und auf jedem geschlossenen Pfad identisch

zu Null. Beispiele für konservative Kräfte sind die Gravitationskraft oder durch Federn resultierende Kräfte. Insbesondere gilt damit

$$Q_j = -\frac{\partial W_{\text{pot}}}{\partial q_j} + Q_j^{nc} \quad (3.64)$$

mit der nicht-konservativen generalisierten Kraft Q_j^{nc} . Einsetzen von (3.64) in (3.63) führt auf die *Lagrangeschen Gleichungen 2. Art*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L - \frac{\partial}{\partial q_j} L = Q_j^{nc}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.65)$$

mit der so genannten *Lagrange-Funktion* $L = W_{\text{kin}} - W_{\text{pot}}$. Ist $Q_j^{nc} = 0$ in (3.65), dann spricht man von einem *konservativen System* in dem sich die Gesamtenergie nicht ändert, d.h. es tritt keine *Dissipation* auf. Da nur wenige der auf das System wirkenden Kräfte durch eine skalare Potenzialfunktion beschreibbar sind werden alle anderen Kräfte, darunter auch Reibungskräfte, in Q_j^{nc} zusammengefasst. Im Spezialfall einer den generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_j direkt proportionalen Reibungskraft der Form

$$Q_j^{nc} = -k_j \dot{q}_j, \quad k_j > 0 \quad (3.66)$$

kann die Analyse durch die so genannte *Rayleighsche Dissipationsfunktion*

$$R = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n k_j \dot{q}_j^2 \quad (3.67)$$

erweitert werden. Diese kann so interpretiert werden, dass $2R$ den durch die Kräfte (3.66) hervorgerufenen Anteil der Energiedissipation beschreibt. Damit können die Lagrangeschen Gleichungen 2. Art (3.65) zu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L - \frac{\partial}{\partial q_j} L + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} R = Q_j^{nc}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.68)$$

angepasst werden. Hierbei wird vorausgesetzt, dass L das Potenzial aller konservativen Kräfte umfasst, R alle Reibungskräfte der Form (3.66) beinhaltet und Q_j^{nc} alle externen generalisierten Kräfte sowie Kräfte beschreibt, die nicht durch L und R ausgedrückt werden können.

Die *Herleitung der Bewegungsgleichungen* erfolgt somit nach folgendem Schema:

- (i) Bestimmung der Anzahl der Freiheitsgrade n und Festlegung der generalisierten Koordinaten q_j , $j = 1, \dots, n$;
- (ii) Aufstellung der kinetischen und potenziellen Energien und der Lagrange-Funktion $L = W_{\text{kin}} - W_{\text{pot}}$;
- (iii) Falls möglich, Ermittlung der Rayleighschen Dissipationsfunktion R ;
- (iv) Bestimmung der verbliebenen generalisierten (externen) Kräfte Q_j^{nc} ;
- (v) Auswertung der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art (3.65) bzw. (3.68);
- (vi) Numerische Lösung und Simulation.

Aufgrund der Komplexität der insbesondere in (ii) und (iv) auftretenden Ausdrücke ist an dieser Stelle die Nutzung eines geeigneten Computeralgebrasystems, z.B. MATHEMATICA, MAXIMA oder MAPLE, zur symbolischen Auswertung zu empfehlen.

Anmerkung 3.4: Generalisierten Kräfte eines Starrkörpersystems

Die Bestimmung der generalisierten Kräfte eines Starrkörpersystems erfolgt durch die Analyse der über eine externe Kraft \mathbf{f}^a bzw. über ein externes Moment $\boldsymbol{\tau}^a$ zugeführten Leistung

$$P_f = \mathbf{f}^a \cdot \mathbf{v}^a, \quad P_\tau = \boldsymbol{\tau}^a \cdot \boldsymbol{\omega}^a.$$

Dabei ist zu beachten, dass die Komponenten von \mathbf{f}^a und \mathbf{v}^a sowie von $\boldsymbol{\tau}^a$ und $\boldsymbol{\omega}^a$ bezüglich des selben Koordinatensystems ausgedrückt werden müssen. Mit den so genannten *Manipulator Jacobi-Matrizen* $J_v^a(\mathbf{q})$ und $J_\omega^a(\mathbf{q})$, die den Zusammenhang zwischen den generalisierten Koordinaten \mathbf{q} bzw. Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ in der Form

$$\mathbf{v}^a = J_v^a(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad \boldsymbol{\omega}^a = J_\omega^a(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (3.69)$$

darstellen, gilt für die zugeführten Leistungen

$$P_f = \mathbf{f}^a \cdot J_v^a(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_f^T \dot{\mathbf{q}}, \quad P_\tau = \boldsymbol{\tau}^a \cdot J_\omega^a(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_\tau^T \dot{\mathbf{q}}.$$

Hieraus sind die zu \mathbf{f}^a und $\boldsymbol{\tau}^a$ gehörenden generalisierten Kräfte unmittelbar als

$$\mathbf{Q}_f = (J_v^a(\mathbf{q}))^T \mathbf{f}^a, \quad \mathbf{Q}_\tau = (J_\omega^a(\mathbf{q}))^T \boldsymbol{\tau}^a. \quad (3.70)$$

ablesbar.

Anmerkung 3.5: Manipulator Jacobi-Matrizen

Die homogene Transformation

$$H_k^l = \begin{bmatrix} R_k^l & \mathbf{d}_k^l \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad R_k^l \in SO(3)$$

beschreibt gemäß den Ausführungen in Abschnitt 2.5 die Bewegung eines Punktes im Koordinatensystem $(0_l x_l y_l z_l)$ bezüglich des Koordinatensystem $(0_k x_k y_k z_k)$. Mit den vorangegangenen Ausführungen gilt zudem, dass sich die Einträge in H_k^l durch die generalisierten Koordinaten $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ parametrieren lassen, d.h. es gilt

$$H_k^l(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} R_k^l(\mathbf{q}) & \mathbf{d}_k^l(\mathbf{q}) \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad R_k^l(\mathbf{q}) \in SO(3). \quad (3.71)$$

Für die translatorische Geschwindigkeit \mathbf{v}_k^l ergibt sich somit

$$\mathbf{v}_k^l = \dot{\mathbf{d}}_k^l(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \mathbf{d}_k^l(\mathbf{q}) \right) \dot{q}_j = \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \mathbf{d}_k^l(\mathbf{q}) \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial q_n} \mathbf{d}_k^l(\mathbf{q}) \right] \dot{\mathbf{q}} = (J_v)_k^l(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (3.72)$$

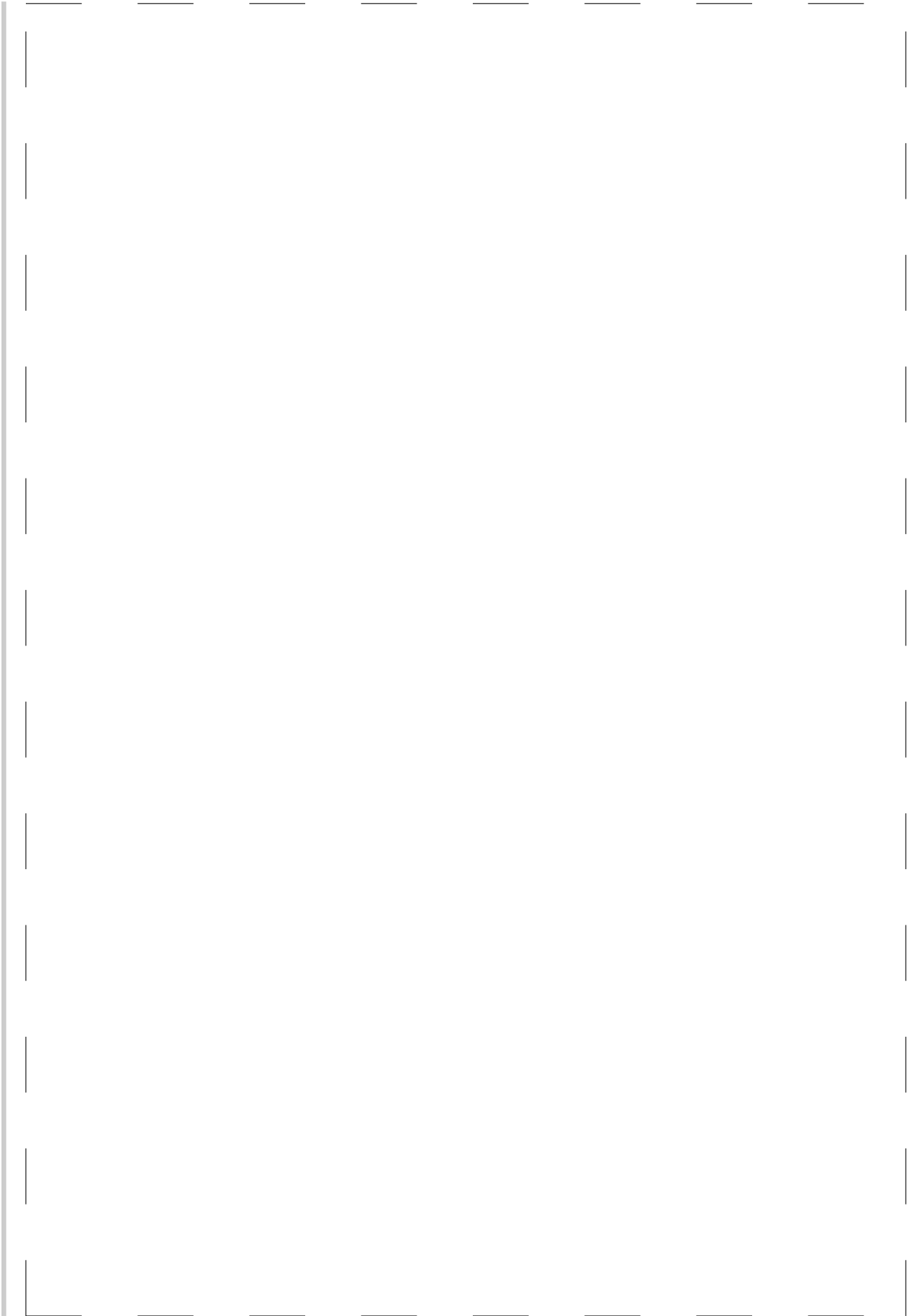
mit der entsprechenden Manipulator Jacobi-Matrix $(J_v)_k^l(\mathbf{q})$ der translatorischen Geschwindigkeit. In analoger Weise folgt für die Drehwinkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_k^l$ aus

$$S(\boldsymbol{\omega}_k^l) = \dot{R}_k^l(\mathbf{q})(R_k^l)^T(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial q_j} R_k^l(\mathbf{q})(R_k^l)^T(\mathbf{q}) \dot{q}_j \quad (3.73)$$

durch Vergleich mit (2.37) die entsprechende Manipulator Jacobi-Matrix $(J_\omega)_k^l(\mathbf{q})$ so, dass gilt

$$\boldsymbol{\omega}_k^l = (J_\omega)_k^l(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.74)$$

Beispiel 3.2 (Translatorischer Zweimassenschwinger).



Beispiel 3.3 (Mathematisches Pendel an reibungsfrei gleitender Masse).

3.4.3 Kinetische und potenzielle Energie

Zur Auswertung der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art (3.65) bzw. (3.68) werden die Ausdrücke der kinetischen und potenziellen Energie benötigt. Nachfolgend soll gezeigt werden, wie beide Energien für Starrkörpersysteme systematisch ermittelt werden können. Ausgangspunkt ist dafür der in Abbildung 3.12 dargestellte Starrkörper mit Dichte $\rho(x_0, y_0, z_0)$ im Inertialsystem $(0_0 x_0 y_0 z_0)$. Die Geschwindigkeit des Masseteilchens P des Starrkörpers mit Ortsvektor $\mathbf{p}_0(t)$ im Inertialsystem ergibt sich direkt durch Differentiation zu $\dot{\mathbf{p}}_0(t)$. Die *kinetische Energie* folgt damit durch Integration über das Gesamtvolumen des Starrkörpers gemäß

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{p}}_0^T(x_0, y_0, z_0) \dot{\mathbf{p}}_0(x_0, y_0, z_0) \underbrace{\rho(x_0, y_0, z_0) dV}_{= dm} = \frac{1}{2} \int_V \|\dot{\mathbf{p}}_0(x_0, y_0, z_0)\|^2 dm. \quad (3.75)$$

Wird entsprechend Abbildung 3.12 ein zusätzliches körperfestes Koordinatensystem $(0_1 x_1 y_1 z_1)$ mit

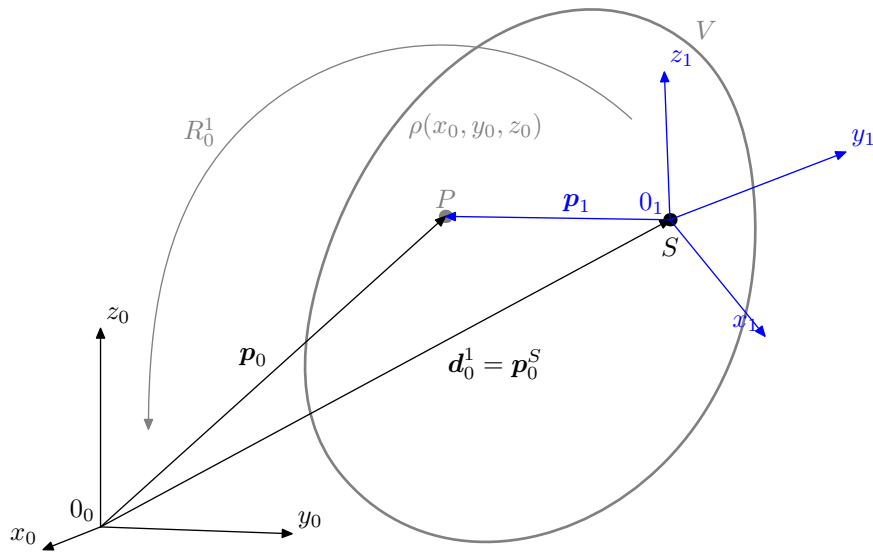


Abb. 3.12: Zur kinetischen Energie.

Ursprung im Massenschwerpunkt S eingeführt, so vereinfachen sich die Ausdrücke. Wegen

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 + R_0^1 \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0^S + R_0^1 \mathbf{p}_1$$

folgt offensichtlich unter Berücksichtigung von (2.38)

$$\dot{\mathbf{p}}_0 = \dot{\mathbf{p}}_0^S + S(\boldsymbol{\omega}_0^1) R_0^1 \mathbf{p}_1 = \mathbf{v}_0^S + S(\boldsymbol{\omega}_0^1) \mathbf{r} = \mathbf{v}_0^S + \boldsymbol{\omega}_0^1 \times \mathbf{r} \quad (3.76)$$

mit $\mathbf{r}(t) = R_0^1(t) \mathbf{p}_1$ für zeitunabhängiges \mathbf{p}_1 aufgrund der Annahme, dass ein Starrkörper untersucht wird, $\mathbf{v}_0^S(t) = \dot{\mathbf{p}}_0^S(t)$ und dem Vektor der Drehwinkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_0^1(t) = [\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)]^T$. Einsetzen von (3.76) in (3.75) führt auf

$$\begin{aligned} W_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} \int_V \left(\mathbf{v}_0^S + S(\boldsymbol{\omega}_0^1) \mathbf{r} \right)^T \left(\mathbf{v}_0^S + S(\boldsymbol{\omega}_0^1) \mathbf{r} \right) dm \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \int_V (\mathbf{v}_0^S)^T \mathbf{v}_0^S dm}_{= W_{\text{kin}}^{\text{trans}}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \left((\mathbf{v}_0^S)^T S(\boldsymbol{\omega}_0^1) \mathbf{r} + \mathbf{r}^T S^T(\boldsymbol{\omega}_0^1) \mathbf{v}_0^S \right) dm}_{= W_{\text{kin}}^{\text{kop}}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \mathbf{r}^T S^T(\boldsymbol{\omega}_0^1) S(\boldsymbol{\omega}_0^1) \mathbf{r} dm}_{= W_{\text{kin}}^{\text{rot}}}. \end{aligned}$$

Da $\mathbf{v}_0^S(t)$ nur von der Zeit t , jedoch nicht vom Ort innerhalb des Volumens V abhängt, vereinfacht sich der erste Term zu

$$W_{\text{kin}}^{\text{trans}} = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{v}_0^S)^T \mathbf{v}_0^S dm = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_0^S)^T \mathbf{v}_0^S \int_V dm = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}_0^S)^T \mathbf{v}_0^S. \quad (3.77)$$

Dieser beschreibt den *translatorischen Anteil der kinetischen Energie* und kann so interpretiert werden, als ob die gesamte Masse m des Starrkörpers im Schwerpunkt S konzentriert wäre.

Für den zweiten Term gelten, wegen $\mathbf{r} = \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_0^S$ gemäß Abbildung 3.12 und der Eigenschaft, dass $S(\boldsymbol{\omega}_0^1)$ nur von der Zeit abhängt, die Beziehungen

$$\begin{aligned} W_{\text{kin}}^{\text{kop}} &= \frac{1}{2} \int_V \left((\mathbf{v}_0^S)^T S(\boldsymbol{\omega}_0^1) \mathbf{r} + \mathbf{r}^T S^T(\boldsymbol{\omega}_0^1) \mathbf{v}_0^S \right) dm = (\mathbf{v}_0^S)^T S(\boldsymbol{\omega}_0^1) \int_V (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_0^S) dm \\ &= (\mathbf{v}_0^S)^T S(\boldsymbol{\omega}_0^1) \left(\int_V \mathbf{p}_0 dm - \mathbf{p}_0^S \int_V dm \right) = (\mathbf{v}_0^S)^T S(\boldsymbol{\omega}_0^1) (\mathbf{p}_0^S m - \mathbf{p}_0^S m) = 0. \end{aligned}$$

Anmerkung 3.6

Es sei bemerkt, dass $W_{\text{kin}}^{\text{kop}}$ entsprechend der vorangegangenen Analyse nur dann verschwindet, wenn das körperfeste Koordinatensystem $(0_1 x_1 y_1 z_1)$ in den Schwerpunkt des Starrkörpers gelegt wird (vergleiche hierzu auch die Ausführungen zum Kräfte- und Momentensatz in Abschnitt 3.3.1 mit allgemeinem Bezugspunkt.).

Zur Auswertung des dritten Terms wird von folgendem Zusammenhang Gebrauch gemacht

$$\mathbf{h}^T \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_x & h_y & h_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = \text{spur}(\mathbf{h} \mathbf{h}^T) = \text{spur} \begin{bmatrix} h_x^2 & h_x h_y & h_x h_z \\ h_y h_x & h_y^2 & h_y h_z \\ h_z h_x & h_z h_y & h_z^2 \end{bmatrix}. \quad (3.78)$$

Damit folgt

$$W_{\text{kin}}^{\text{rot}} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r}^T S^T(\boldsymbol{\omega}_0^1) S(\boldsymbol{\omega}_0^1) \mathbf{r} dm = \frac{1}{2} \text{spur} \left(S(\boldsymbol{\omega}_0^1) \int_V \mathbf{r} \mathbf{r}^T dm S^T(\boldsymbol{\omega}_0^1) \right),$$

was mit $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$ auf

$$W_{\text{kin}}^{\text{rot}} = \frac{1}{2} \text{spur} \left(S(\boldsymbol{\omega}_0^1) J S^T(\boldsymbol{\omega}_0^1) \right), \quad J = \int_V \mathbf{r} \mathbf{r}^T dm = \int_V \begin{bmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & yz & z^2 \end{bmatrix} dm$$

führt. Hieraus kann leicht mit der Definition der Matrix $S(\boldsymbol{\omega}_0^1)$ aus (2.37) die folgende Beziehung abgeleitet werden

$$\begin{aligned} &\text{spur} \left(S(\boldsymbol{\omega}_0^1) J S^T(\boldsymbol{\omega}_0^1) \right) \\ &= \text{spur} \left(\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= -2J_{xy}\omega_x\omega_y - 2\omega_z(J_{xz}\omega_x + J_{yz}\omega_y) + J_{yy}\omega_x^2 + J_{zz}\omega_x^2 + J_{xx}\omega_y^2 + \omega_z^2(J_{xx} + J_{yy}) + J_{zz}\omega_y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z] \begin{bmatrix} J_{yy} + J_{zz} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{xx} + J_{zz} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{xx} + J_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \\
&= (\boldsymbol{\omega}_0^1)^T I_S \boldsymbol{\omega}_0^1
\end{aligned}$$

mit I_S der Trägheitsmatrix bzw. dem Trägheitstensor aus Abschnitt 3.3.2 (siehe Gleichungen (3.30), (3.31)). Damit ergibt sich der *rotatorische Anteil der kinetischen Energie* zu

$$W_{\text{kin}}^{\text{rot}} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_0^1)^T I_S \boldsymbol{\omega}_0^1 \quad (3.79)$$

Es ist dabei zu beachten, dass der Vektor der Drehwinkelgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\omega}_0^1$ und die Trägheitsmatrix I_S bezüglich des selben Koordinatensystem ausgedrückt sein müssen. Dabei empfiehlt sich eine Auswertung im körperfesten Koordinatensystem, da hier I_S von der Bewegung unabhängig ist und sich im Spezialfall, dass $(0_1 x_1 y_1 z_1)$ ein Hauptachsensystem ist, auf eine Diagonalmatrix reduziert. Dies erfordert eine Transformation von $\boldsymbol{\omega}_0^1$ in das körperfeste Koordinatensystem.

Zusammenfassend ergibt sich die *kinetische Energie eines Starrkörpers* in der Form

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}_0^S)^T \mathbf{v}_0^S + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_0^1)^T I_S \boldsymbol{\omega}_0^1 \quad (3.80)$$

In analoger Weise kann leicht die *kinetische Energie eines Systems von N Starrkörpern* ermittelt werden. In diesem Fall gilt

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{v}_0^{S,j})^T \mathbf{v}_0^{S,j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\boldsymbol{\omega}_0^j)^T I_{S,j} \boldsymbol{\omega}_0^j. \quad (3.81)$$

Für die *potenzielle Energie zufolge des Schwerfeldes* in negativer \mathbf{e}_{z_0} -Richtung mit der Gravitationskonstanten g gilt

$$W_{\text{pot}} = \int_V [0 \quad 0 \quad g] \mathbf{p}_0 dm = [0 \quad 0 \quad g] \mathbf{p}_0^S m. \quad (3.82)$$

Die beispielsweise in Federelementen gespeicherte potenzielle Energie wurde in den vorangegangenen Beispielen 3.2 und 3.3 aufgeführt.

Auf Basis dieser Ausführungen empfiehlt sich zum Aufstellen der kinetischen und potenziellen Energien die folgende Vorgehensweise:

- (i) Festlegung des ortsfesten Inertialsystems und der körperfesten Koordinatensysteme, z.B. mit jeweils dem Ursprung im Schwerpunkt des Starrkörpers. Wenn möglich und sinnvoll, dann sollte das körperfeste Koordinatensystem als Hauptachsensystem ausgerichtet werden.
- (ii) Festlegung der generalisierten Koordinaten \mathbf{q} und Bestimmung der translatorischen Verschiebungsvektoren und Rotationsmatrizen, die die einzelnen Koordinatensysteme untereinander verbinden. Dem schließt sich das Aufstellen der Ortsvektoren \mathbf{p}_0^S vom Ursprung des Inertialsystems zu den Schwerpunkten der einzelnen Starrkörper als Funktion der generalisierten Koordinaten an.

- (iii) Bestimmung des translatorischen und rotatorischen Anteils der kinetischen Energie gemäß (3.77) und (3.79). Dabei ist die Additionseigenschaft der Drehwinkelgeschwindigkeit gemäß (2.47) zu beachten.
- (iv) Ermittlung der potenziellen Energie zufolge des Schwerfeldes gemäß (3.82). Dem schließt sich die Bestimmung der potenziellen Energie anderer Potenzialkräfte, wie z.B. von Federelementen, an.

3.4.4 Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen eines mechanischen Starrkörpersystems mit den generalisierten Koordinaten $\mathbf{q}(t) = [q_1(t), \dots, q_n(t)]^T$ folgen aus den Euler–Lagrange–Gleichungen bzw. den Lagrangeschen Gleichungen 2. Art (3.65) in der Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L - \frac{\partial}{\partial q_j} L = Q_j^{nc}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.83)$$

mit den generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}(t) = [\dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t)]^T$, den generalisierten Kräften bzw. Momenten $\mathbf{Q} = [Q_1^{nc}, \dots, Q_n^{nc}]^T$ und der Lagrange–Funktion $L = W_{\text{kin}} - W_{\text{pot}}$. Mit den in Anmerkung 3.5 eingeführten Manipulator Jacobi–Matrizen, d.h.

$$\mathbf{v}_0^{S,j} = (J_v)_0^{S,j}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (3.84)$$

für die translatorische Geschwindigkeit $\mathbf{v}_0^{S,j}$ und

$$\boldsymbol{\omega}_0^j = (J_\omega)_0^j(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (3.85)$$

für die Drehwinkelgeschwindigkeit führt die Auswertung der kinetischen Energie (3.81) auf

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \underbrace{\left(\sum_{j=1}^N \left\{ m_j \left((J_v)_0^{S,j}(\mathbf{q}) \right)^T (J_v)_0^{S,j}(\mathbf{q}) + \left((J_\omega)_0^j(\mathbf{q}) \right)^T I_j (J_\omega)_0^j(\mathbf{q}) \right\} \right)}_{= M(\mathbf{q})} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.86)$$

mit der *symmetrischen positiv definiten generalisierten Massenmatrix* $M(\mathbf{q})$. Da die potenzielle Energie $W_{\text{pot}} = W_{\text{pot}}(\mathbf{q})$ unabhängig von $\dot{\mathbf{q}}$ ist, führt die Auswertung von (3.83) auf die *Bewegungsgleichungen in Matrixschreibweise* in der Form

$$M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{Q} \quad (3.87)$$

bzw. in Komponentenschreibweise

$$\sum_{j=1}^n M_{k,j}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n H_{k,j,i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{q}_i \dot{q}_j + g_k(\mathbf{q}) = Q_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.88)$$

mit

$$H_{k,j,i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial M_{k,j}(\mathbf{q})}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{j,i}(\mathbf{q})}{\partial q_k}. \quad (3.89)$$

Diese Darstellung erlaubt eine Interpretation der einzelnen Terme [6]:

- Für die Anteile der Beschleunigung gilt, dass
 - der Koeffizient $M_{k,k}(\mathbf{q})$ die Masse bzw. das Trägheitsmoment des k -ten Starrkörpers repräsentiert, wenn die anderen Körper blockiert sind;
 - der Koeffizient $M_{k,j}(\mathbf{q})$ den Einfluss des j -ten Starrkörpers auf die Beschleunigung des k -ten Körpers beschreibt.
- Für die quadratischen Geschwindigkeitsanteile gilt, dass
 - der Term $H_{k,j,j}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{q}_j^2$ den Zentrifugaleffekt auf den Körper k durch den Körper j beschreibt;
 - der Term $H_{k,j,i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{q}_i \dot{q}_j$ für $i \neq j$ den Corioliseffekt darstellt, der durch die Geschwindigkeiten der Körper i und j auf den Körper k ausgeübt wird.

Im Allgemeinen ist die Wahl der Matrix $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ nicht eindeutig, da es verschiedene Matrizen gibt, deren Elemente $C_{k,j}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ die Beziehung

$$\sum_{j=1}^n C_{k,j}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n H_{k,j,i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (3.90)$$

erfüllen. Eine spezielle Wahl führt auf die so genannten *Christoffel-Symbole erster Art* (siehe z.B. [6]). Einsetzen von (3.89) in (3.90) führt auf

$$\sum_{j=1}^n C_{k,j}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial M_{k,j}(\mathbf{q})}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{j,i}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Eine geeignete Aufteilung des ersten Terms der Summe liefert

$$\sum_{j=1}^n C_{k,j}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{k,j}(\mathbf{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{k,i}(\mathbf{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{j,i}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Der Vergleich der beiden Seiten der Gleichung zeigt, dass das (k, j) -te Element der Matrix $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ durch

$$C_{k,j}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^n c_{k,j,i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{q}_i \quad (3.91)$$

beschrieben werden kann, mit den *Christoffel-Symbolen erster Art*

$$c_{k,j,i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{k,j}(\mathbf{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{k,i}(\mathbf{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{j,i}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right). \quad (3.92)$$

Die Symmetrie der Massenmatrix $M(\mathbf{q})$ impliziert die Eigenschaft $c_{k,j,i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = c_{k,i,j}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, was darauf führt, dass die Matrix

$$N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (3.93)$$

schief-symmetrisch ist. Insbesondere kann bei der Wahl von $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ gemäß (3.90) mit (3.91) gezeigt werden, dass für jeden Vektor $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n$ die Beziehung

$$\boldsymbol{\omega}^T N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \boldsymbol{\omega} = 0 \quad (3.94)$$

gilt. Mit der zulässigen Wahl $\omega = \dot{q}$ folgt zudem

$$\dot{q}^T N(q, \dot{q}) \dot{q} = 0. \quad (3.95)$$

Dabei ist zu beachten, dass (3.95) nicht (3.94) bedingt, da $N(q, \dot{q})$ eine Funktion von \dot{q} ist. Es kann gezeigt werden, dass (3.95) für jede Wahl der Matrix $C(q, \dot{q})$ in der Form (3.90) gilt, während (3.94) nur für die spezielle Wahl (3.91), (3.92) erfüllt ist [6].

Anmerkung 3.7

Das System (3.87) von gewöhnlichen Differenzialgleichungen 2. Ordnung kann durch die Einführung von Zustandsvariablen $x(t)$ und dem Vektor von Eingangsgrößen $u(t)$, z.B. gemäß

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}, \quad u = Q, \quad (3.96)$$

für die weitere Analyse, numerische Simulation oder auch den Regelungsentwurf in die bekannte Zustandsdarstellung

$$\dot{x} = f(x, u), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0 \quad (3.97)$$

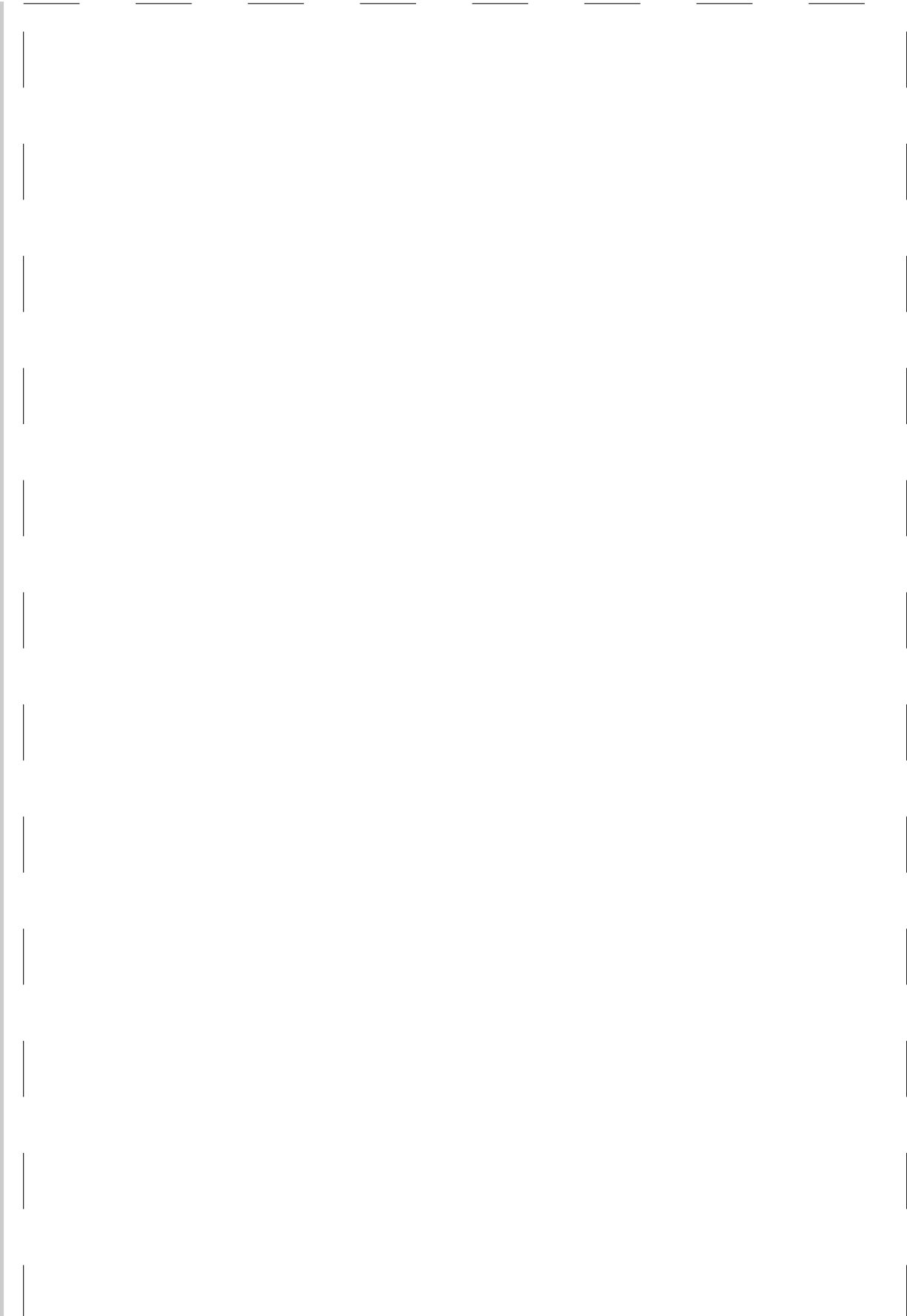
überführt werden. Insbesondere gilt für die getroffene Wahl der Zustandsvariablen

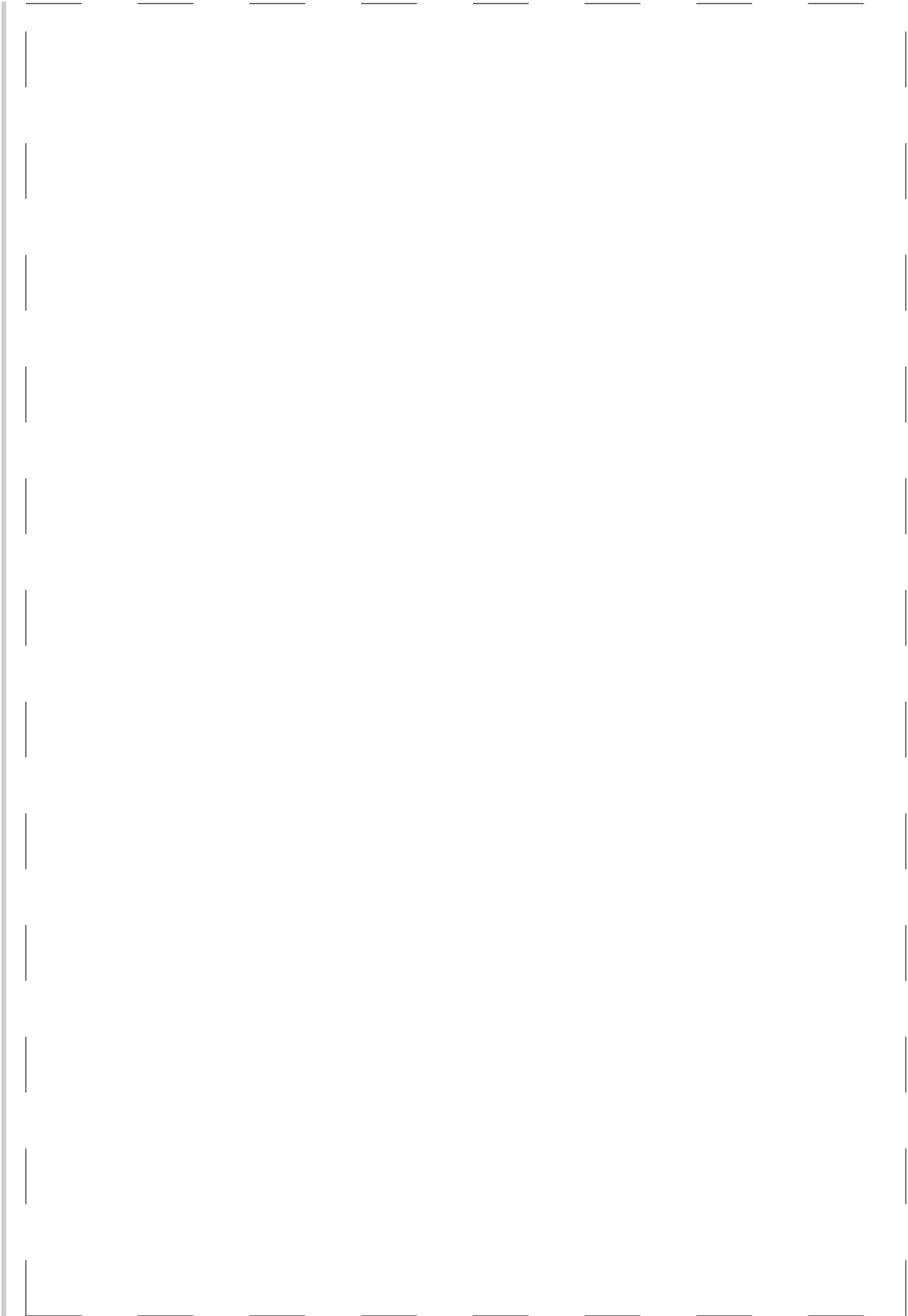
$$\dot{x} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -M^{-1}(x_1)(C(x_1, x_2)x_2 + g(x_1) + u) \end{bmatrix}, \quad t > t_0 \quad (3.98)$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} q(0) \\ \dot{q}(0) \end{bmatrix}.$$

Beispiel 3.4 (Bewegungsgleichungen des planaren Zwei-Gelenk-Manipulators).

A large rectangular area with a dashed border, intended for writing the equations of motion for the planar two-joint manipulator.





Literatur

- [1] D. Gross, W. Hauger und J. Schröder. *Technische Mechanik, Band 1: Statik*. 8. Aufl. Berlin: Springer-Verlag, 2004 (zitiert auf den Seiten 30, 32).
- [2] D. Gross, W. Hauger, J. Schröder und W.A. Wall. *Technische Mechanik, Band 3: Kinetik*. 9. Aufl. Berlin: Springer-Verlag, 2006 (zitiert auf den Seiten 36, 37, 40, 48).
- [3] L. Meirovitch. *Principles and Techniques of Vibrations*. New Jersey: Prentice Hall, 1997 (zitiert auf den Seiten 37, 48).
- [4] J.L. Troutman. *Variational Calculus and Optimal Control: Optimization with Elementary Convexity*. 2. Aufl. New York: Springer-Verlag, 1996 (zitiert auf Seite 53).
- [5] D. Liberzon. *Calculus of Variations and Optimal Control Theory: A Concise Introduction*. Princeton (NJ): Princeton University Press, 2011 (zitiert auf Seite 53).
- [6] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani und G. Oriolo. *Robotics: Modelling, Planning and Control*. London: Springer-Verlag, 2010 (zitiert auf den Seiten 62–64).