

Einführung

Diese Vorlesung wird sich mit der mathematischen Modellierung technischer Systeme beschäftigen, wobei der Fokus auf mechanische Starrkörpersysteme und Robotersysteme gelegt wird. Hierzu wird im Weiteren zunächst eine Begriffsbestimmung und grundlegende Einordnung folgen.

1.1 Modelle und Systeme

Ein *Modell* ist eine Abbildung der Wirklichkeit, d.h. eines natürlichen oder künstlichen Objekts bzw. Originals. Dabei werden nur die für die jeweilige Aufgabe notwendigen Eigenschaften des Originals berücksichtigt, so dass nur ein *beschränktes Abbild* entsteht. Unter einem Modell wird im Rahmen dieser Veranstaltung ein *mathematisches Modell* bzw. eine *mathematische Abstraktion* des Objekts in Form von algebraischen Gleichungen, gewöhnlichen oder partiellen Differenzialgleichungen verstanden. Ein mathematisches Modell bildet ein Objekt nicht exakt ab, sondern stellt einen Kompromiss zwischen *Modellgenauigkeit* und *Modellkomplexität* bezüglich der abgebildeten Eigenschaften dar. Umgekehrt kann das Original auch als eine Realisierung des mathematischen Modells angesehen werden, das die im Modell abgebildeten Eigenschaften bis zu einem gewissen Grad erfüllt. Die *Modellbildung* ist im Allgemeinen ein mehrstufiger Prozess, der aus Schritten der

- Abgrenzung (Vernachlässigung nicht relevanter Objekte)
- Reduktion (Vernachlässigung von Objektdetails)
- Dekomposition (Zerlegung des Objekts in einzelne Komponenten) und
- Aggregation (Zusammenfassung von Komponenten zu einem Ganzen)

besteht. Eine Systematisierung dieser Schritte ist nur eingeschränkt möglich, weshalb die Modellbildung immer ein kreativer Entwicklungsprozess ist. Ein Versuch, gewisse (Meta-)Prinzipien der Modellierung zu entwickeln ist beispielhaft Abbildung 1.1 auf der Basis der Ausführungen in [1] zu entnehmen. Diese sind nicht als Algorithmus zur Modellbildung zu verstehen, sondern vielmehr als Leitlinie zur eigentlichen Problemformulierung.

In der mathematischen Modellierung unterscheidet man grundsätzlich zwischen der experimentellen und theoretischen Modellbildung. Bei der *experimentellen Modellbildung* werden gemessene Eingangs- und Ausgangsgrößen verwendet, um das Eingangs-Ausgangs-Verhalten möglichst gut durch ein geeignetes mathematisches Modell wiederzugeben. Dieser Zugang wird auch als *Systemidentifikation* bezeichnet. Modelle, die ausschließlich auf der Nutzung experimenteller Daten beruhen werden auch *Black-Box Modelle* genannt. Dabei ist zu bemerken, dass sich der Gültigkeitsbereich von Black-Box Modellen auf die zur Identifikation genutzten Datenmenge beschränkt und sich Black-Box Modelle somit nur eingeschränkt zur Prädiktion des generellen Verhaltens eignen. Als Vorteil kann jedoch angesehen werden, dass nur wenig Wissen über das betrachtete Objekt vorhanden sein muss. In der *theoretischen Modellbildung* stellen physikalische Grundgesetze die Basis zur Herleitung der mathematischen Modelle dar. Diese werden somit auch als *White-Box Modelle* oder *First-Principle Models* bezeichnet. Des Weiteren existieren sogenannte *Grey-Box Modelle*, die sowohl physikalische

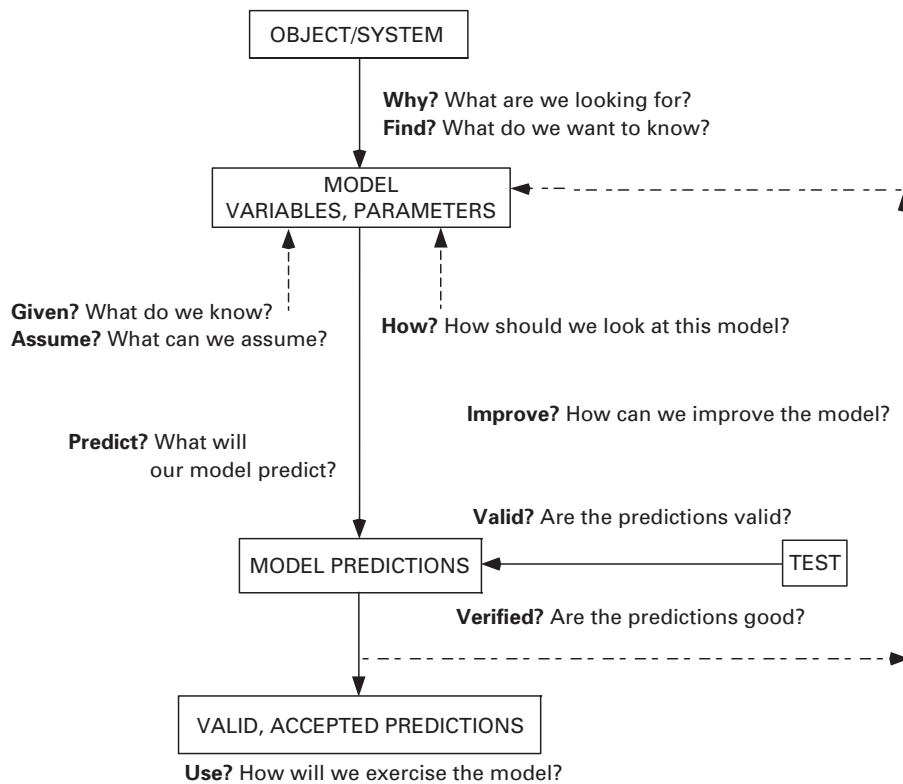


Abb. 1.1: Prinzipielle Ansicht der Modellgenerierung nach [1].

Grundgesetze als auch experimentelle Informationen in der Modellbildung integrieren. Hierbei ist zu erwähnen, dass es grundsätzlich nicht möglich ist, ein mathematisches Modell ausschließlich über physikalische Gesetze herzuleiten und vollständig zu parametrieren. Sogenannte konstitutive Parameter, wie beispielsweise Reibungsparameter, Streuinduktivitäten oder Wärmeübergangskoeffizienten, müssen aus Experimenten am Objekt ermittelt werden, obwohl der Modellansatz physikalisch motiviert ist. Die hieraus resultierende Kopplung von White-Box Modellen mit wenigen experimentell ermittelten konstitutiven Parametern führt auf Modelle, die verschiedene Vorteile vereinen, wobei insbesondere die sehr gute Extrapolierbarkeit des Modells über die durch Experimente gewonnenen Daten hinaus, die hohe Zuverlässigkeit, die gute Modelleinsicht, die Skalierbarkeit und die Nutzung zu Konzeptstudien und Prototyping anzuführen sind. Nachteilig wirkt sich dem gegenüber aus, dass dieser Ansatz recht zeitintensiv ist und ein gutes Verständnis des betrachteten Objekts erfordert. Diese Vorlesung wird sich ausschließlich auf White-Box Modelle konzentrieren.

Das mathematische Modell kann neben der Systemanalyse auch zum Systementwurf bzw. zur System-synthese verwendet werden. Dies umfasst beispielsweise die Auslegung und geeignete Platzierung von Aktoren und Sensoren, die Variantenstudie bis hin zum Steuerungs- und Regelungsentwurf zur Beeinflussung und Vorgabe der Systemdynamik.

1.2 Systemtheoretische Grundbegriffe

Im Weiteren werden zunächst nochmals einige grundlegende systemtheoretische Begriffe kompakt zusammengefasst, die für die nachfolgenden Ausführungen von Bedeutung sind.

Der Begriff eines *Systems* wird in den verschiedensten wissenschaftlichen und nichtwissenschaftlichen Bereichen verwendet, wobei oftmals keine genaue Definition gegeben wird. Vereinfacht formuliert ist *ein System die Verbindung unterschiedlicher, miteinander in Interaktion stehender Komponenten, zu*

einem Ganzen zum Zwecke der Durchführung bestimmter Aufgaben. Eine detaillierte, jedoch sinngemäß identische Definition ist beispielsweise in DIN 19226-1 (Regelungs- und Steuerungstechnik) angegeben.

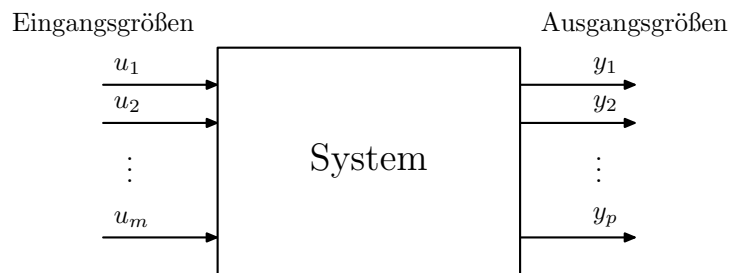


Abb. 1.2: Eingangs- und Ausgangsgrößen eines Systems.

Die Wechselwirkung des Systems mit der Systemumgebung erfolgt über die so genannten *Eingangs-* bzw. *Ausgangsgrößen* entsprechend Abbildung 1.2. Die Eingangsgrößen u_1, u_2, \dots, u_m sind dabei Größen, die von der Systemumgebung auf das System einwirken, jedoch unabhängig vom Systemverhalten, d.h. *rückwirkungsfrei*, sind. Man unterscheidet dabei zwischen Eingangsgrößen, mit denen das System gezielt beeinflusst werden kann (*Stellgrößen*) und Eingangsgrößen, die nicht unserer Kontrolle unterliegen (*Störgrößen*). Die Ausgangsgrößen y_1, y_2, \dots, y_p sind Größen, die vom System generiert werden und ihrerseits die Systemumgebung beeinflussen. Ausgangsgrößen, die messtechnisch erfassbar sind, nennt man *Messgrößen*. Systeme, die mit ihrer Umgebung in Wechselwirkung treten, d.h. deren Eingangs- und Ausgangsgrößen nicht verschwinden, werden als *offene Systeme* bezeichnet. Demgegenüber wechselwirken *geschlossene Systeme* nicht mit der Systemumgebung.

Zur weiteren Erläuterung werden die beiden einfachen elektrischen Systeme aus Abbildung 1.3 betrachtet. Hierbei stellt jeweils die Stromstärke $i(t)$ die Eingangsgröße dar, während die Spannung

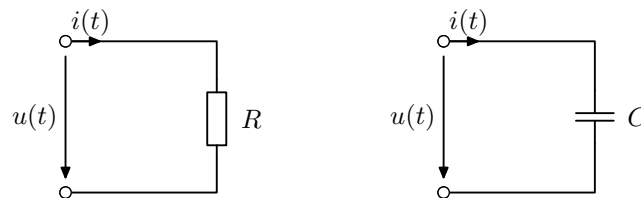


Abb. 1.3: Beispiele für statische und dynamische (elektrische) Systeme.

$u(t)$ als Ausgangsgröße vorliegt. Gemäß dem Ohmschen Gesetz ist im Fall des Widerstands die Ausgangsgröße zu jedem Zeitpunkt t eindeutig durch die Eingangsgröße zum selben Zeitpunkt bestimmt, da gilt

$$u(t) = Ri(t).$$

Systeme, deren Ausgangsgrößen lediglich vom Augenblickswert der Eingangsgrößen abhängen, werden als *statische Systeme* bezeichnet. Dem gegenüber bedingt die Berechnung der Spannung $u(t)$ beim idealen Kondensator C zum Zeitpunkt t die Kenntnis des Eingangsstroms $i(\tau)$ für die gesamte Vergangenheit $\tau \leq t$, da gilt

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \underbrace{\frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(\tau) d\tau}_{u(t_0)=u_0} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau = u_0 + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau.$$

Offensichtlich erfordert die Bestimmung von $u(t)$ bei Kenntnis der Eingangsgröße $i(\tau)$ im Intervall $t_0 \leq \tau \leq t$ die Kenntnis der Spannung $u(t_0) = u_0$ des Kondensators zum Zeitpunkt t_0 als Anfangsbedingung.

Insbesondere beinhaltet die Anfangsbedingung u_0 die gesamte Information über die Vergangenheit $\tau < t_0$. Man sagt auch, dass u_0 den internen *Zustand* des Systems Kondensator zum Zeitpunkt t_0 beschreibt. Systeme, deren Ausgangsgrößen nicht nur vom Augenblickswert der Eingangsgrößen sondern auch von deren Historie abhängen, werden als *dynamische Systeme* bezeichnet.

Wenn für ein System nach Abbildung 1.2 die Werte der Ausgangsgrößen $y_1(t), \dots, y_p(t)$ zum Zeitpunkt t ausschließlich vom Verlauf der Eingangsgrößen $u_1(\tau), \dots, u_m(\tau)$ für $\tau \leq t$ abhängen, dann wird das System als *kausal* bezeichnet. Da alle technisch realisierbaren Systeme kausal sind, werden sich die weiteren Ausführungen ausschließlich auf diesen Fall beschränken.

Definition 1.1: Zustand

Existieren für ein dynamisches System Größen x_1, \dots, x_n mit der Eigenschaft, dass die Ausgangsgrößen y_1, \dots, y_p zu einem beliebigen Zeitpunkt t eindeutig durch den Verlauf der Eingangsgrößen $u_1(\tau), \dots, u_m(\tau)$ auf dem Intervall $t_0 \leq \tau \leq t$ und den Werten von $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ festgelegt sind, dann werden die Größen x_1, \dots, x_n als Zustandsgrößen des Systems bezeichnet.

Man unterscheidet zwischen dynamischen *Systemen mit finitem Zustand (der Ordnung n)* bzw. so genannten *konzentriert-parametrischen Systemen*, die sich durch eine endliche Anzahl von n Zustandsgrößen charakterisieren lassen und solchen mit *infinitem Zustand* bzw. so genannten *verteilt-parametrischen Systemen*. Erstere werden durch mathematische Modelle in Form gewöhnlicher Differenzialgleichungen und algebraischer Gleichungen beschrieben, während letztere durch partielle Differenzialgleichungen abgebildet werden. Im Weiteren werden Systeme mit finitem Zustand betrachtet, die eine Beschreibung durch ein *explizites mathematisches Modell* in n Zustandsdifferenzialgleichungen mit Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), & t > t_0, & \quad x_1(t_0) = x_{1,0} \\ \frac{d}{dt}x_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), & t > t_0, & \quad x_2(t_0) = x_{2,0} \\ &\vdots & & \\ \frac{d}{dt}x_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), & t > t_0, & \quad x_n(t_0) = x_{n,0} \end{aligned}$$

und p Ausgangsgleichungen

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), & t \geq t_0 \\ y_2 &= h_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), & t \geq t_0 \\ &\vdots & \\ y_p &= h_p(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), & t \geq t_0 \end{aligned}$$

erlauben. Durch die Einführung der Spaltenvektoren

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$$

und der Schreibweise, dass $\frac{d}{dt}$ durch einen Punkt über der abzuleitenden Größe dargestellt wird, lassen sich die Gleichungen in kompakter Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad t > t_0, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.1a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad t \geq t_0 \quad (1.1b)$$

angeben. Die Größen \mathbf{x} , \mathbf{u} und \mathbf{y} werden einfach als *Zustand*, *Eingang* und *Ausgang* des dynamischen Systems bezeichnet. Wird der Zustand \mathbf{x} als Element eines n -dimensionalen Vektorraums betrachtet, dann nennt man diesen Vektorraum auch *Zustandsraum*. Der Zustand eines Systems zum Zeitpunkt t kann dann als Punkt im n -dimensionalen Zustandsraum dargestellt werden. Die Kurve all dieser Punkte im Zustandsraum für veränderliche t in einem Zeitintervall wird auch als *Trajektorie* bezeichnet. Eine graphische Illustration für den Fall $n = 3$ zeigt Abbildung 1.4.

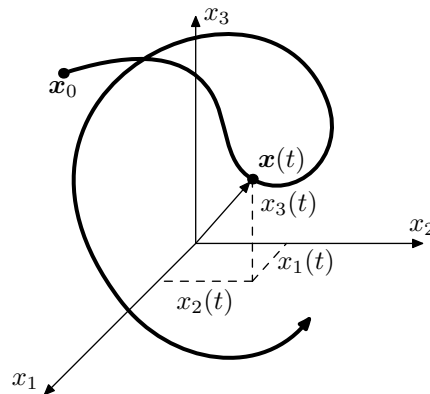


Abb. 1.4: Veranschaulichung einer Trajektorie im Zustandsraum \mathbb{R}^3 .

Anmerkung 1.1

Die *Zustandsdarstellung* (1.1) in Form gekoppelter Differentialgleichungen 1. Ordnung stellt sowohl die Basis für die Systemanalyse als auch die Simulation bzw. numerische Lösung dynamischer Systeme dar. Eine Ausnahme bildet die Simulation mechanischer Systeme, die typischerweise durch gekoppelte Differentialgleichungen 2. Ordnung beschrieben werden. Hier sind durch den Newmark-Algorithmus [2] und dessen Varianten leistungsfähige Möglichkeiten zur numerischen Lösung der Bewegungsgleichungen gegeben, die häufig auch in kommerziellen Simulationswerkzeugen eingesetzt werden.

Für weitere allgemeine Ausführungen zur mathematischen Modellierung dynamischer Systeme und deren Anwendung in verschiedenen natur- und ingenieurwissenschaftlichen Bereichen sei zudem auf [3, 4, 5, 6] verwiesen.

Literatur

- [1] C. Dym. *Principles of Mathematical Modeling*. 2. Aufl. Elsevier Academic Press, 2004 (zitiert auf den Seiten 1, 2).
- [2] N.M. Newmark. „A Method of Computation for Structural Dynamics“. In: *J. Eng. Mech. Div. (ASCE)* 85 (1959), S. 67–94 (zitiert auf Seite 5).
- [3] R.H. Cannon. *Dynamics of Physical Systems*. New York: McGraw–Hill, 1967 (zitiert auf Seite 5).
- [4] F.E. Cellier. *Continuous System Modeling*. New York: Springer–Verlag, 1991 (zitiert auf Seite 5).
- [5] R. Aris. *Mathematical Modelling Techniques*. Dover Books on Computer Science Series. Dover Publications, 1994 (zitiert auf Seite 5).
- [6] K.–H. Hoffmann und G. Witterstein. *Mathematische Modellierung*. Basel: Springer, 2014 (zitiert auf Seite 5).

Mechanische Systeme — Starrkörperkinematik

Die folgenden Ausführungen geben eine Einführung in die mathematische Modellierung mechanischer Mehrkörpersysteme, wobei ausschließlich Starrkörper berücksichtigt werden, die keinen elastischen Deformationen unterliegen. Jede Starrkörperbewegung kann im Allgemeinen als Kombination einer translatorischen und einer rotatorischen Bewegung beschrieben werden. Die *Kinematik* befasst sich mit der Bewegung von einzelnen materiellen Punkten oder Körpern im Raum, ohne die Ursache der Bewegung zu betrachten [1]. Letzteres ist Gegenstand der Starrkörperkinetik, die in Kapitel 3 eingeführt wird.

2.1 Elementare Rotationen

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die in Abbildung 2.1 dargestellte Konfiguration eines Starrkörpers im Raum mit dem *ortsfesten Koordinatensystem* $(0x_0y_0z_0)$, auch *Inertialsystem* genannt, und dem *körperfesten Koordinatensystem* $(0x_1y_1z_1)$. Im Weiteren bezeichnen $\{\mathbf{e}_{x_0}, \mathbf{e}_{y_0}, \mathbf{e}_{z_0}\}$ bzw. $\{\mathbf{e}_{x_1}, \mathbf{e}_{y_1}, \mathbf{e}_{z_1}\}$ jeweils eine orthonormale Basis für $(0x_0y_0z_0)$ bzw. $(0x_1y_1z_1)$. Damit kann der Vektor vom gemeinsamen Ursprung zum Punkt P entweder im ortsfesten Koordinatensystem

$$\mathbf{p}_0 = p_{0,x}\mathbf{e}_{x_0} + p_{0,y}\mathbf{e}_{y_0} + p_{0,z}\mathbf{e}_{z_0}$$

oder im körperfesten Koordinatensystem

$$\mathbf{p}_1 = p_{1,x}\mathbf{e}_{x_1} + p_{1,y}\mathbf{e}_{y_1} + p_{1,z}\mathbf{e}_{z_1}$$

angegeben werden. Da \mathbf{p}_0 und \mathbf{p}_1 Darstellungen des selben Vektors, jedoch in unterschiedlichen Koordinatensystemen, vom Ursprung zum Punkt P sind, müssen folglich die folgenden Beziehungen gelten

$$p_{0,x} = \mathbf{e}_{x_0}^T \mathbf{p}_0 = \mathbf{e}_{x_0}^T \mathbf{p}_1 = p_{1,x} \mathbf{e}_{x_0}^T \mathbf{e}_{x_1} + p_{1,y} \mathbf{e}_{x_0}^T \mathbf{e}_{y_1} + p_{1,z} \mathbf{e}_{x_0}^T \mathbf{e}_{z_1}$$

$$p_{0,y} = \mathbf{e}_{y_0}^T \mathbf{p}_0 = \mathbf{e}_{y_0}^T \mathbf{p}_1 = p_{1,x} \mathbf{e}_{y_0}^T \mathbf{e}_{x_1} + p_{1,y} \mathbf{e}_{y_0}^T \mathbf{e}_{y_1} + p_{1,z} \mathbf{e}_{y_0}^T \mathbf{e}_{z_1}$$

$$p_{0,z} = \mathbf{e}_{z_0}^T \mathbf{p}_0 = \mathbf{e}_{z_0}^T \mathbf{p}_1 = p_{1,x} \mathbf{e}_{z_0}^T \mathbf{e}_{x_1} + p_{1,y} \mathbf{e}_{z_0}^T \mathbf{e}_{y_1} + p_{1,z} \mathbf{e}_{z_0}^T \mathbf{e}_{z_1}.$$

In Matrixschreibweise gilt dementsprechend für eine *rein rotatorische Bewegung* die Gleichung

$$\mathbf{p}_0 = R_0^1 \mathbf{p}_1 \tag{2.1}$$

mit $\mathbf{p}_0 = [p_{0,x}, p_{0,y}, p_{0,z}]^T$, $\mathbf{p}_1 = [p_{1,x}, p_{1,y}, p_{1,z}]^T$ und der (3×3) -Matrix

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{x_0}^T \mathbf{e}_{x_1} & \mathbf{e}_{x_0}^T \mathbf{e}_{y_1} & \mathbf{e}_{x_0}^T \mathbf{e}_{z_1} \\ \mathbf{e}_{y_0}^T \mathbf{e}_{x_1} & \mathbf{e}_{y_0}^T \mathbf{e}_{y_1} & \mathbf{e}_{y_0}^T \mathbf{e}_{z_1} \\ \mathbf{e}_{z_0}^T \mathbf{e}_{x_1} & \mathbf{e}_{z_0}^T \mathbf{e}_{y_1} & \mathbf{e}_{z_0}^T \mathbf{e}_{z_1} \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

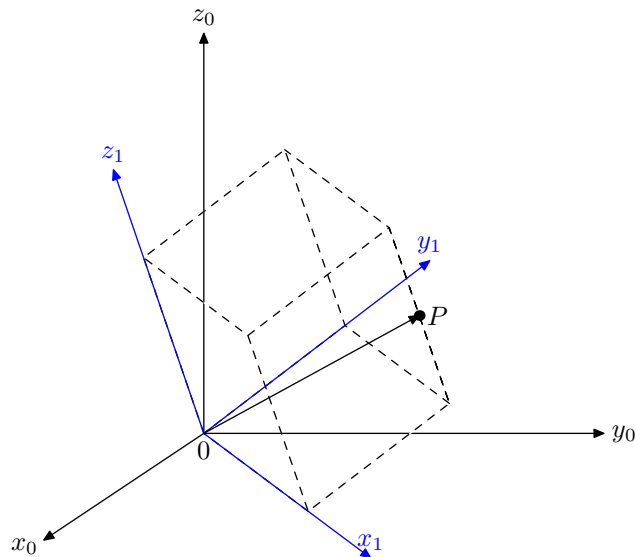


Abb. 2.1: Koordinatensysteme eines Starrkörpers.

Die Matrix R_0^1 gibt an, wie die Koordinaten eines Vektors im Koordinatensystem $(0x_1y_1z_1)$ in das Koordinatensystem $(0x_0y_0z_0)$ abgebildet werden. In direkt analoger Weise kann leicht die Beziehung

$$\mathbf{p}_1 = R_1^0 \mathbf{p}_0 \quad (2.3)$$

mit

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{x_1}^T \mathbf{e}_{x_0} & \mathbf{e}_{x_1}^T \mathbf{e}_{y_0} & \mathbf{e}_{x_1}^T \mathbf{e}_{z_0} \\ \mathbf{e}_{y_1}^T \mathbf{e}_{x_0} & \mathbf{e}_{y_1}^T \mathbf{e}_{y_0} & \mathbf{e}_{y_1}^T \mathbf{e}_{z_0} \\ \mathbf{e}_{z_1}^T \mathbf{e}_{x_0} & \mathbf{e}_{z_1}^T \mathbf{e}_{y_0} & \mathbf{e}_{z_1}^T \mathbf{e}_{z_0} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

abgeleitet werden. Dies impliziert wegen

$$\mathbf{p}_0 = R_0^1 \mathbf{p}_1 = R_0^1 R_1^0 \mathbf{p}_0$$

bzw.

$$\mathbf{p}_1 = R_1^0 \mathbf{p}_0 = R_1^0 R_0^1 \mathbf{p}_1$$

zusammen mit der Kommutativität des Skalarprodukts, d.h. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, dass R_0^1 eine *orthogonale Matrix* ist, d.h. es gilt

$$R_0^1 = (R_1^0)^{-1} = (R_1^0)^T. \quad (2.5)$$

Orthogonale Matrizen weisen gewisse Eigenschaften auf, die u.a. Gegenstand der folgenden Aufgabe sind.

Aufgabe 2.1. Sei R eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie, dass dann

- die Spaltenvektoren von R Einheitslänge aufweisen und wechselseitig orthogonal sind und
- $\det R = \pm 1$ ist.

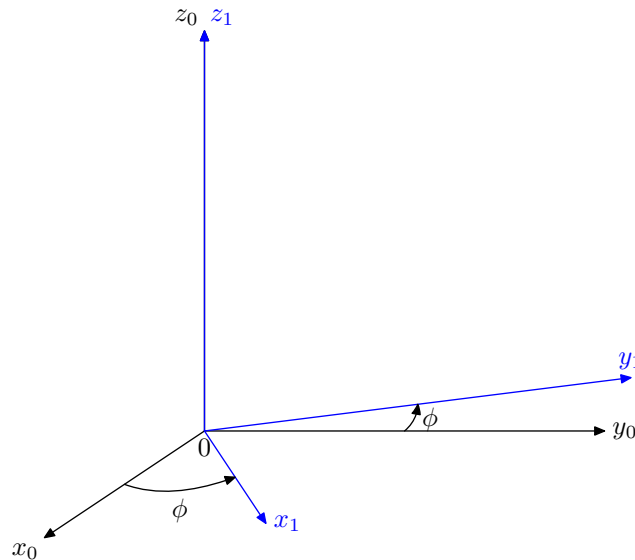


Abb. 2.2: Elementare Drehung um die z_0 -Achse mit Winkel ϕ .

Für Rechtssysteme, d.h. $\mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z) = 1$, gilt $\det R_0^1 = 1$. Alle orthogonalen (3×3) -Matrizen mit Determinante +1 werden als *Drehmatrizen des \mathbb{R}^3* bezeichnet, was mit dem Symbol $SO(3)$ für *spezielle orthogonale Gruppe* der Ordnung 3 abgekürzt wird.

Es gibt drei *elementare Drehmatrizen*, die jeweils Drehungen um eine der drei Koordinatenachsen beschreiben. Beispielhaft wird dies in Abbildung 2.2 für den Fall dargestellt, dass sich das Koordinatensystem $(0x_1y_1z_1)$ durch Rotation des Koordinatensystems $(0x_0y_0z_0)$ um die z_0 -Achse mit Winkel ϕ ergibt. Die zugehörige Drehmatrix¹ ergibt sich damit zu

$$R_0^1 = R_{z,\phi} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

In vollkommen analoger Weise ergeben sich die elementaren Drehmatrizen für eine Rotation um die y_0 -Achse mit Winkel θ bzw. die x_0 -Achse mit Winkel ψ zu

$$R_0^1 = R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

bzw.

$$R_0^1 = R_{x,\psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ 0 & \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\psi & -s_\psi \\ 0 & s_\psi & c_\psi \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

¹Im Weiteren wird oftmals auf die in (2.6) eingeführten Abkürzungen für die trigonometrischen Funktionen zurückgegriffen.

Beispiel 2.1. Man betrachte die Konfiguration aus Abbildung 2.3. Hierbei gilt für die Basisvektoren des $(0x_1y_1z_1)$ Koordinatensystems im $(0x_0y_0z_0)$ Koordinatensystem

$$\mathbf{e}_{x_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_{y_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_{z_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die Drehmatrix R_0^1 ergibt sich gemäß (2.2) zu

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

und beschreibt die Orientierung von $(0x_1y_1z_1)$ bezüglich $(0x_0y_0z_0)$.

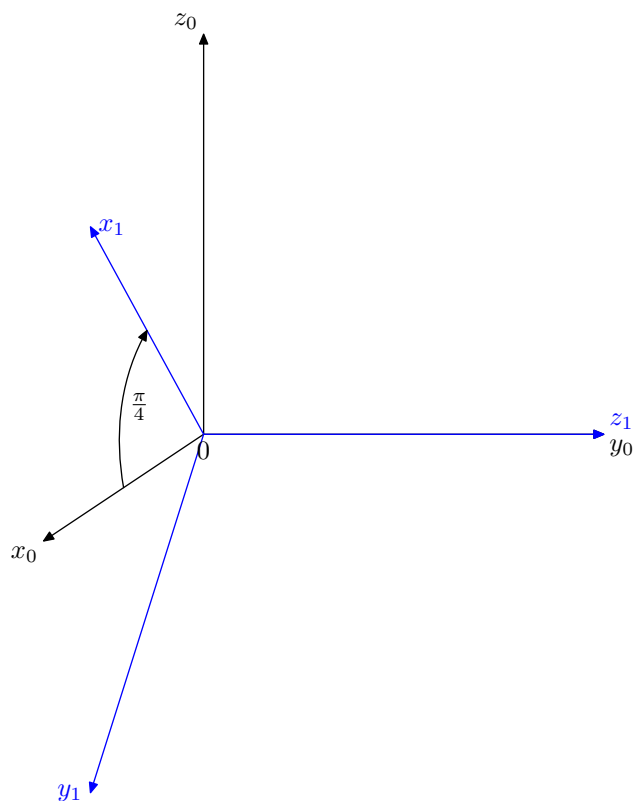


Abb. 2.3: Zur Orientierung von Koordinatensystemen.

Eine Drehmatrix $R \in SO(3)$ kann in drei verschiedenen Weisen interpretiert werden [2]:

- (i) als Koordinatentransformation, die die Koordinaten eines Punktes P in zwei verschiedenen Koordinatensystemen zueinander in Verbindung setzt;
- (ii) als Darstellung der Orientierung eines körperfesten (transformierten) Koordinatensystems bezüglich eines ortsfesten Inertialsystems²;

²Die Spaltenvektoren der Matrix R_0^1 entsprechen jeweils dem Richtungskosinus der Koordinatenachsen von $(0x_1y_1z_1)$ relativ zu den Koordinatenachsen von $(0x_0y_0z_0)$. Beispielsweise gibt $[\mathbf{e}_{x_0} \cdot \mathbf{e}_{x_1}, \mathbf{e}_{y_0} \cdot \mathbf{e}_{x_1}, \mathbf{e}_{z_0} \cdot \mathbf{e}_{x_1}]^T$ die Richtung der x_1 -Achse im Koordinatensystem $(0x_0y_0z_0)$ an.

(iii) als Abbildung, die einen Vektor \mathbf{p} in einen neuen Vektor $R\mathbf{p}$ im selben Koordinatensystem dreht.

2.2 Hintereinanderausführung von Rotationen

Für Anwendungen ist die Kenntnis der Eigenschaften von Rotationen und insbesondere deren Hintereinanderausführung essentiell. Hierzu betrachte man drei Koordinatensysteme $(0x_0y_0z_0)$, $(0x_1y_1z_1)$ und $(0x_2y_2z_2)$, die jeweils durch Drehungen miteinander verbunden sind. Analog zu den obigen Ausführungen kann der Vektor \mathbf{p} vom gemeinsamen Ursprung zu einem Punkt P in den drei Koordinatensystemen durch die Vektoren \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 dargestellt werden. Dabei gelten die folgenden Zusammenhänge

$$\mathbf{p}_0 = R_0^1 \mathbf{p}_1, \quad \mathbf{p}_1 = R_1^2 \mathbf{p}_2 \quad \text{und} \quad \mathbf{p}_0 = R_0^2 \mathbf{p}_2.$$

Dabei beschreiben R_0^1 und R_0^2 Rotationen bezüglich des $(0x_0y_0z_0)$ Koordinatensystems während R_1^2 eine Rotation bezüglich des $(0x_1y_1z_1)$ Koordinatensystem darstellt. Einsetzen führt somit auf

$$\mathbf{p}_0 = R_0^1 R_1^2 \mathbf{p}_2 = R_0^2 \mathbf{p}_2 \quad \text{bzw.} \quad R_0^2 = R_0^1 R_1^2. \quad (2.9)$$

Die Gleichungen in (2.9) beschreiben die *Hintereinanderausführung zweier Rotationen* und zeigen, dass zur Transformation der Koordinaten \mathbf{p} eines Punktes von der Darstellung \mathbf{p}_2 im $(0x_2y_2z_2)$ Koordinatensystem in die Darstellung \mathbf{p}_0 im $(0x_0y_0z_0)$ Koordinatensystem zuerst eine Transformation in \mathbf{p}_1 im $(0x_1y_1z_1)$ Koordinatensystem mittels R_1^2 erfolgt, der sich die Transformation von \mathbf{p}_1 in \mathbf{p}_0 mittels R_0^1 anschließt. Des Weiteren gilt für die Umkehrung

$$\mathbf{p}_2 = R_2^1 R_1^0 \mathbf{p}_0 = R_2^0 \mathbf{p}_0 \quad \text{bzw.} \quad R_2^0 = (R_0^2)^T = (R_0^1 R_1^2)^T = R_2^1 R_1^0. \quad (2.10)$$

Es ist jedoch zu beachten, dass die *Hintereinanderausführung von Rotationen nicht kommutativ* ist, d.h., für Drehmatrizen R_α und R_β gilt im Allgemeinen $R_\alpha R_\beta \neq R_\beta R_\alpha$. Dies ist Gegenstand des folgenden Beispiels.

Beispiel 2.2 (Nicht-Kommutativität der Hintereinanderausführung von Rotationen). *Es wird die Hintereinanderausführung einer Rotation um den Winkel α bezüglich der x_0 -Achse gefolgt von einer Rotation um den Winkel β bezüglich der (gedrehten) y_1 -Achse betrachtet. Mit $R_0^1 = R_{x_0, \alpha}$ und $R_1^2 = R_{y_1, \beta}$ folgt*

$$R_0^2 = R_{x_0, \alpha} R_{y_1, \beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \\ s_\alpha s_\beta & c_\alpha & -s_\alpha c_\beta \\ -c_\alpha s_\beta & s_\alpha & c_\alpha c_\beta \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Wird die Reihenfolge der Rotationen umgekehrt, so dass eine Drehung mit Winkel β um die y_0 -Achse gefolgt von einer Drehung bezüglich der (gedrehten) x_1 -Achse mit Winkel α betrachtet wird, so ergibt sich

$$R_2^0 = R_{y_0, \beta} R_{x_1, \alpha} = \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\beta & s_\alpha s_\beta & c_\alpha s_\beta \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha \\ -s_\beta & c_\beta s_\alpha & c_\alpha c_\beta \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Es ist offensichtlich, dass gilt $R_0^2 \neq R_2^0$, was zudem durch die nachfolgende Abbildung 2.4 anschaulich bestätigt wird.

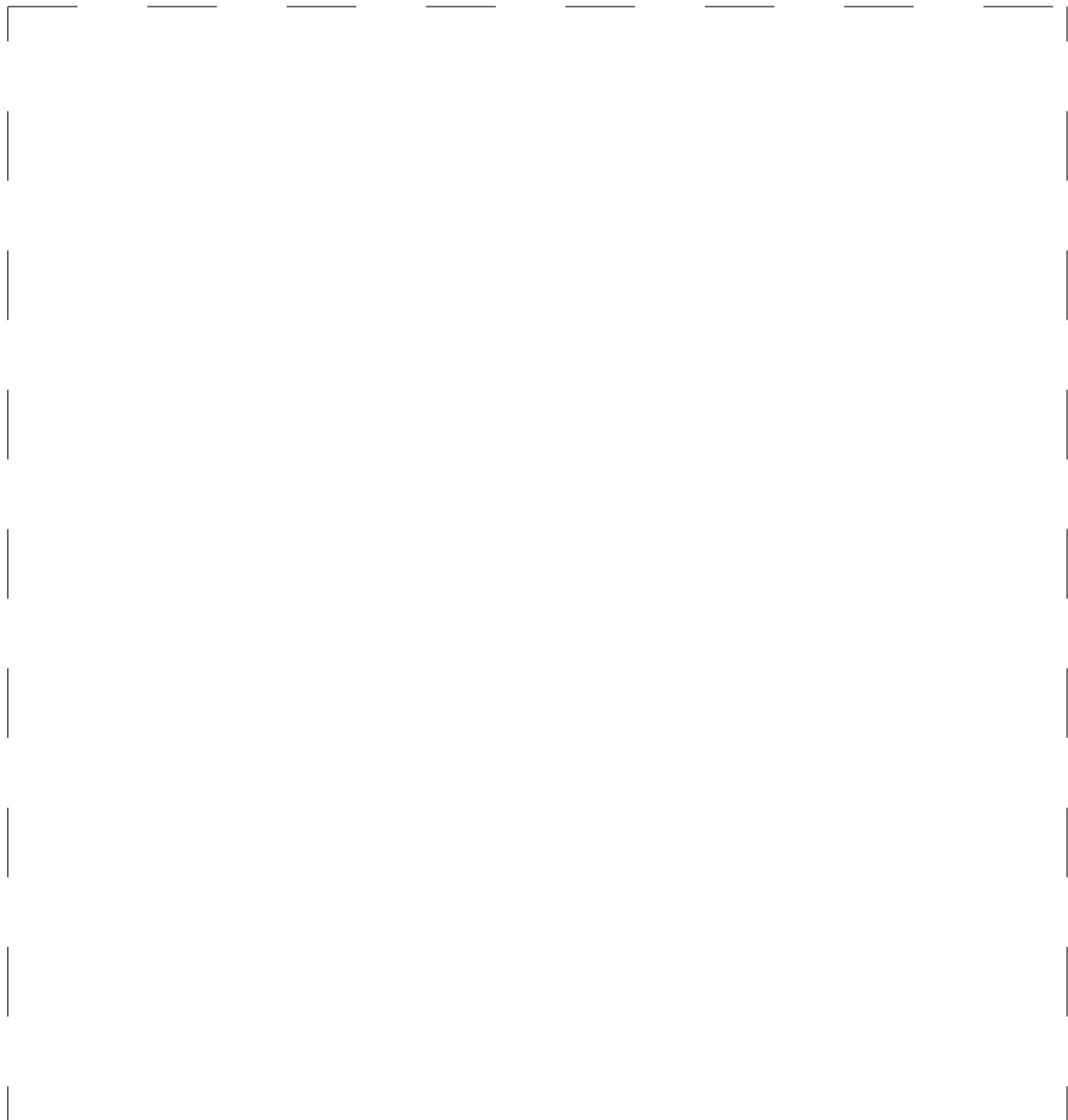


Abb. 2.4: Beispiel zur Hintereinanderausführung von Rotationen.

Insbesondere impliziert die Hintereinanderausführung von Rotationen entsprechend (2.11) bzw. (2.12), dass die zweite Rotation bezüglich des schon gedrehten Koordinatensystem ausgeführt wird.

Betrachtet man abweichend von den obigen Ausführungen beginnend mit $(0x_0y_0z_0)$ eine Drehung bezüglich der x_0 -Achse um den Winkel α gefolgt von einer Drehung des resultierenden Koordinatensystems $(0x_1y_1z_1)$ bezüglich der ungedrehten y_0 -Achse um den Winkel β so ergibt sich ein neues Koordinatensystem $(0x_2y_2z_2)$. Seien \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 Darstellungen des selben Vektors \mathbf{p} vom gemeinsamen Koordinatenursprung zu einem Punkt P , dann gilt

$$\mathbf{p}_0 = R_{x_0, \alpha} \mathbf{p}_1 \tag{2.13}$$

sowie

$$\mathbf{p}_1 = R_{x_0, -\alpha} R_{y_0, \beta} R_{x_0, \alpha} \mathbf{p}_2. \quad (2.14)$$

Letztere Gleichung impliziert, dass zunächst die Rotation bezüglich der x_0 -Achse rückgängig gemacht werden muss, um wieder ins ursprüngliche $(0x_0y_0z_0)$ Koordinatensystem zu gelangen, bevor die Rotation um den Winkel β bezüglich der y_0 -Achse und anschließend die Drehung um α erfolgt. Dies führt somit auf

$$\mathbf{p}_0 = R_{y_0, \beta} R_{x_0, \alpha} \mathbf{p}_2.$$

Bezeichnen nun $(0x_0y_0z_0)$, $(0x_1y_1z_1)$ und $(0x_2y_2z_2)$ drei Koordinatensysteme, die durch Rotationen miteinander verbunden sind, wobei R_0^1 die Rotation von $(0x_1y_1z_1)$ bezüglich $(0x_0y_0z_0)$ beschreibt. Dann zeigt Beispiel 2.2 zusammenfassend, dass für die Gesamttrotation die Beziehung

$$R_0^2 = R_0^1 R_1^2 \quad (2.15)$$

gilt, falls R_1^2 die Rotation von $(0x_2y_2z_2)$ bezüglich dem momentanen Koordinatensystem $(0x_1y_1z_1)$ bezeichnet. Ist dem gegenüber mit R_1^2 die Rotation von $(0x_2y_2z_2)$ bezüglich dem Inertialsystem $(0x_0y_0z_0)$ gemeint, so ergibt sich für die Gesamttrotation die Beziehung

$$R_0^2 = R_1^2 R_0^1, \quad (2.16)$$

welche der Vertauschung der Multiplikationsreihenfolge entspricht. Beide Formulierungen (2.15) und (2.16) können natürlich jeweils entsprechend auf eine Sequenz von Rotationen bezüglich dem jeweiligen momentanen oder inertialen Koordinatensystem erweitert werden.

2.3 Parametrierung von Rotationen

Ein Starrkörper weist insgesamt drei rotatorische Freiheitsgrade auf, weshalb die 9 Einträge einer Drehmatrix nicht unabhängig voneinander sind. Nachfolgend werden zwei Möglichkeiten aufgezeigt, um entsprechend beliebige Rotationen durch drei unabhängige Größen zu beschreiben bzw. zu parametrieren.

2.3.1 Euler-Winkel

Zur Einführung der Parametrierung durch *Euler-Winkel* betrachtet man das gegenüber einem Inertialsystem $(0x_0y_0z_0)$ um die Winkel ϕ , θ und ψ gedrehte körperfeste Koordinatensystem $(0x_1y_1z_1)$. Die Orientierung des Koordinatensystem $(0x_1y_1z_1)$ gegenüber dem Inertialsystem $(0x_0y_0z_0)$ folgt dabei durch drei aufeinanderfolgende Drehungen:

- (i) um den Winkel ϕ bezüglich der z_0 -Achse,
- (ii) um den Winkel θ bezüglich der gedrehten, momentanen y -Achse (y') und
- (iii) um den Winkel ψ bezüglich der gedrehten, momentanen z -Achse (z'')

Die zugehörige Rotationsmatrix ergibt sich demnach mit (2.6)–(2.8) und (2.15) zu

$$\begin{aligned}
R_0^1 = R_{z,\phi} R_{y,\theta} R_{z,\psi} &= \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_\theta c_\phi c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\psi s_\phi - c_\theta c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta \\ c_\theta c_\psi s_\phi + c_\phi s_\psi & c_\phi c_\psi - c_\theta s_\phi s_\psi & s_\theta s_\phi \\ -c_\psi s_\theta & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Aufgabe 2.2. Bestimmen Sie unter der Annahme, dass die Einträge $R_{i,j}$ der Matrix R_0^1 aus (2.17) bekannt sind die Winkel ϕ , θ und ψ . Diskutieren Sie die Lösung.

Lösung 2.2. Es gelten die folgenden Zusammenhänge

$$\tan \phi = \frac{R_{2,3}}{R_{1,3}}, \quad \tan \psi = -\frac{R_{3,2}}{R_{3,1}}, \quad \tan \theta = \frac{\sqrt{(R_{1,3})^2 + (R_{2,3})^2}}{R_{3,3}}, \tag{2.18}$$

wobei zu beachten ist, dass bei der Auflösung jeweils der entsprechende Quadrant abhängig von den Vorzeichen der genutzten Matrizelemente zu berücksichtigen ist. Des Weiteren wird vorausgesetzt, dass $\sin(\theta) \neq 0$. Für $\theta \in \{0, \pm\pi\}$ ergibt sich eine Singularität der Euler-Winkel, da hier nur noch die Summe bzw. Differenz der Winkel ϕ und ψ ermittelt werden kann und z.B. für $\theta = 0$ gilt, dass $R_0^1 = R_{z,\phi+\psi}$. Somit fallen die Drehachsen der ersten und dritten Rotation zusammen, wodurch die offensichtlich die lokale Umkehrbarkeit der Zuordnung verloren geht, was man auch als kardanische Blockade bezeichnet.

2.3.2 Roll–Pitch–Yaw–Winkel

Eine andere Parametrierung erfolgt durch so genannte *Roll–Pitch–Yaw–Winkel*. Beginnend beim Inertialsystem $(0x_0y_0z_0)$ erfolgen hier die Drehungen in der Reihenfolge

- (i) einer Rotation um den Winkel ψ bezüglich der x_0 -Achse (yaw bzw. *Gierwinkel*) gefolgt von
- (ii) einer Rotation um den Winkel θ bezüglich der y_0 -Achse (pitch bzw. *Nickwinkel*) und abschließend
- (iii) einer Rotation um den Winkel ϕ bezüglich der z_0 -Achse (roll bzw. *Wankwinkel*).

Abbildung 2.5 zeigt eine graphische Illustration, die dadurch motiviert wird, dass das Inertialsystem in den Massenschwerpunkt eines (Luft-)Fahrzeugs gelegt wird. Damit ergibt sich die Rotationsmatrix mit (2.6)–(2.8) und (2.16) zu

$$\begin{aligned}
R_0^1 = R_{z,\phi} R_{y,\theta} R_{x,\psi} &= \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\psi & -s_\psi \\ 0 & s_\psi & c_\psi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_\theta c_\phi & c_\phi s_\theta s_\psi - c_\psi s_\phi & c_\phi c_\psi s_\theta + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\phi & c_\phi c_\psi + s_\theta s_\phi s_\psi & c_\psi s_\theta s_\phi - c_\phi s_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Aufgabe 2.3. Bestimmen Sie unter der Annahme, dass die Einträge $R_{i,j}$ der Matrix R_0^1 aus (2.19) bekannt sind die Winkel ϕ , θ und ψ . Diskutieren Sie die Lösung.

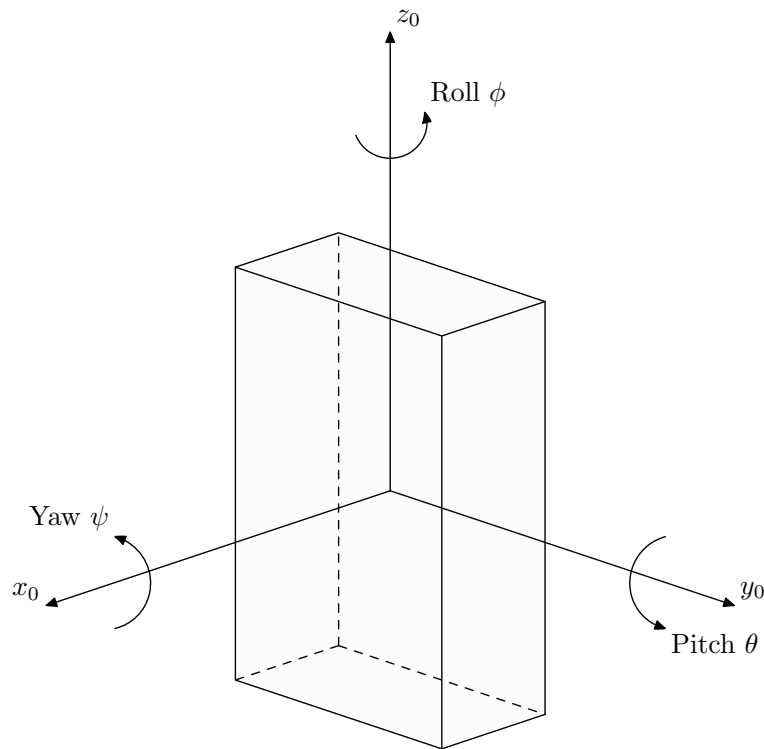


Abb. 2.5: Parametrierung einer Rotation mittels Roll–Pitch–Yaw–Winkeln.

Lösung 2.3. Es gelten die folgenden Zusammenhänge

$$\tan \phi = \frac{R_{2,1}}{R_{1,1}}, \quad \tan \theta = -\frac{R_{3,1}}{\sqrt{(R_{3,2})^2 + (R_{3,3})^2}}, \quad \tan \psi = \frac{R_{3,2}}{R_{3,3}}, \quad (2.20)$$

wobei bei der Auflösung nach die Winkeln der jeweilige Quadrant abhängig von den Vorzeichen der Matrizelemente zu berücksichtigen ist. Hierbei geht wiederum die lokale Invertierbarkeit verloren, falls $\cos(\theta) = 0$. Analog zur Analyse in Aufgabe 2.2 ergibt sich in diesem Fall, dass nur noch die Summe bzw. Differenz von ϕ und ψ ermittelt werden kann.

Eine weitere Möglichkeit zur Parametrierung von Rotationen ist durch so genannte *Quaternionen* gegeben, die es insbesondere ermöglichen die Nachteile bzw. Singularitäten der Euler–Winkel sowie der Roll–Pitch–Yaw–Winkel zu vermeiden, die in den Aufgaben 2.2 und 2.3 einführend diskutiert wurden. Für eine Einführung in die Nutzung von Quaternionen wird beispielsweise auf [3] verwiesen.

2.4 Translation

Abbildung 2.6 zeigt eine *rein translatorische Bewegung*, bei der die beiden Nullpunkte 0_0 und 0_1 der nicht gedrehten Koordinatensysteme $(0_0 x_0 y_0 z_0)$ und $(0_1 x_1 y_1 z_1)$ durch einen Vektor \mathbf{d}_0^1 verbunden sind. Dabei bezeichnet \mathbf{d}_0^1 die translatorische Verschiebung des Koordinatensystems $(0_1 x_1 y_1 z_1)$ bezüglich des Koordinatensystems $(0_0 x_0 y_0 z_0)$ ausgedrückt in den Koordinaten von $(0_0 x_0 y_0 z_0)$.

Anmerkung 2.1: Notation

Im Weiteren wird von der Notation Gebrauch gemacht, dass alle Größen immer bezüglich des durch den tiefgestellten rechten Index gekennzeichneten Koordinatensystems ausgedrückt werden.

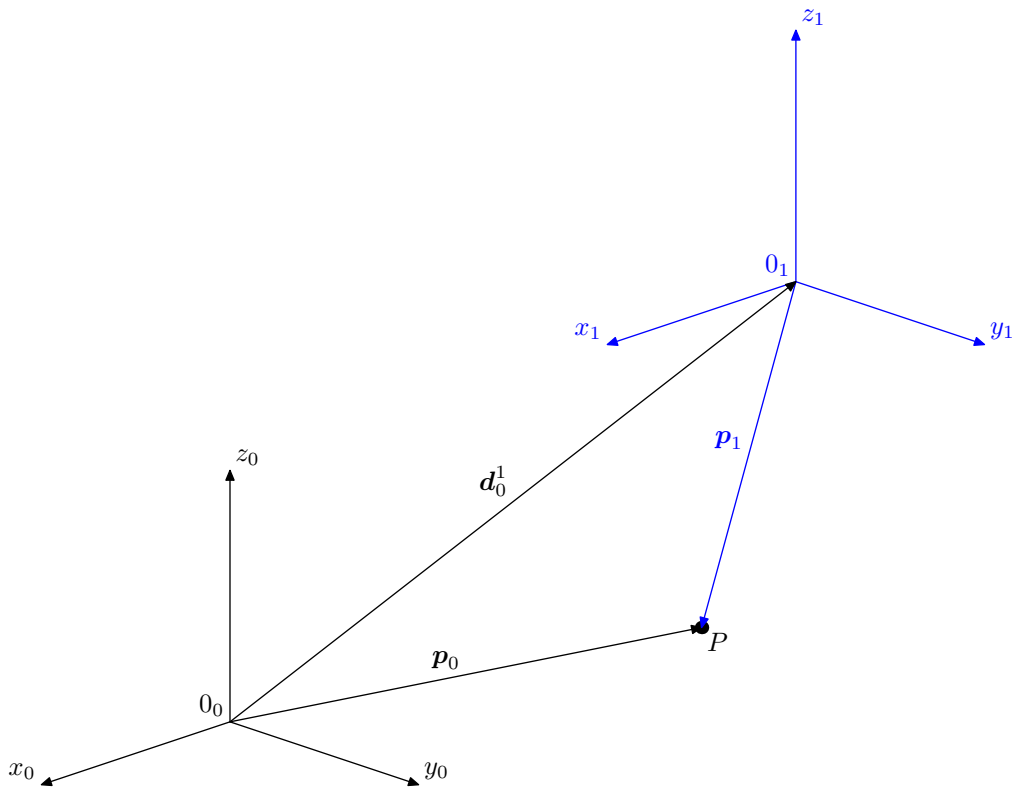


Abb. 2.6: Translatorische Verschiebung.

Mit den Vektoren \mathbf{p}_0 und \mathbf{p}_1 von den Nullpunkten 0_0 und 0_1 der Koordinatensysteme $(0x_0y_0z_0)$ bzw. $(0x_1y_1z_1)$ ergibt sich für eine rein translatorische Verschiebung \mathbf{d}_0^1 der beiden Koordinatensystem der Zusammenhang

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{d}_0^1. \quad (2.21)$$

2.5 Kombinierte Translationen und Rotationen

Eine Starrkörperbewegung setzt sich im Allgemeinen aus translatorischen und rotatorischen Bewegungen zusammen. Mit den obigen Ausführungen (2.1) und (2.21) gilt somit die Beziehung

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 + R_0^1 \mathbf{p}_1. \quad (2.22)$$

Eine *Koordinaten-Transformation* der Form (2.22) mit einer orthogonalen Drehmatrix R_0^1 wird dementsprechend auch als *Starrkörperbewegung* bezeichnet. Die inverse Transformation folgt somit aufgrund der Orthogonalität durch Links-Multiplikation der beiden Seiten von (2.22) mit $R_1^0 = (R_0^1)^{-1}$, was auf

$$\mathbf{p}_1 = -R_1^0 \mathbf{d}_0^1 + R_1^0 \mathbf{p}_0 \quad (2.23)$$

führt. In analoger Weise folgt für die in Abbildung 2.7 dargestellte Konfiguration mit den Koordinatensystemen $(0x_0y_0z_0)$, $(0x_1y_1z_1)$ und $(0x_2y_2z_2)$ wegen

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 + R_0^1 \mathbf{p}_1, \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{d}_1^2 + R_1^2 \mathbf{p}_2$$

durch Einsetzen die Beziehung

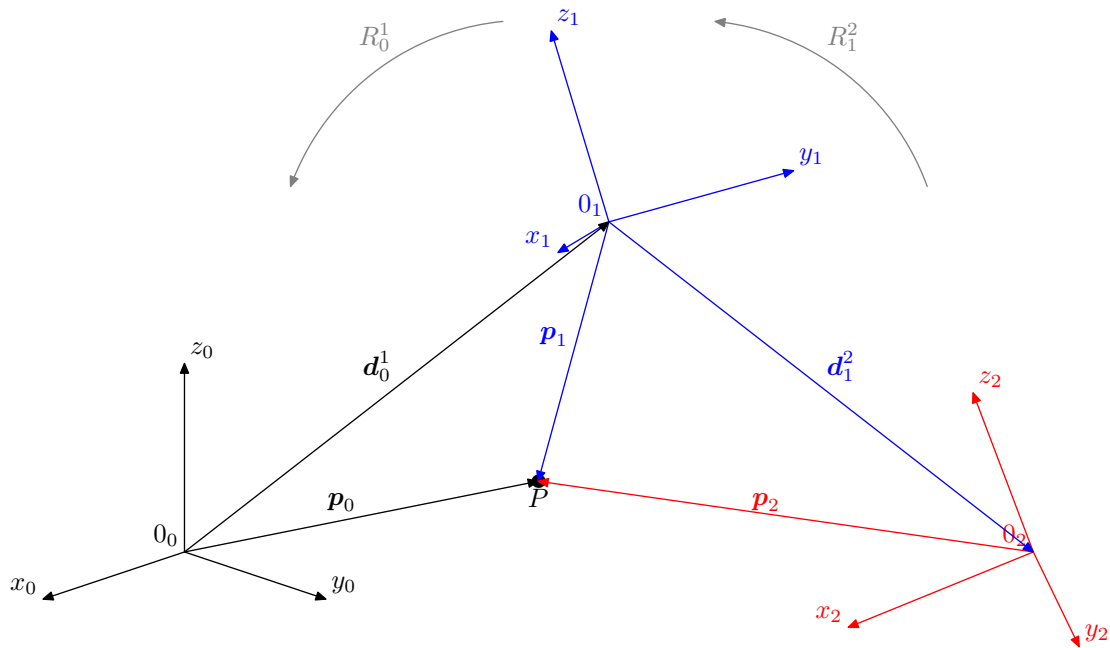


Abb. 2.7: Kombinierte translatorische und rotatorische Bewegung.

$$\mathbf{p}_0 = \underbrace{\mathbf{d}_0^1 + R_0^1 \mathbf{d}_1^2}_{= \mathbf{d}_0^2} + R_0^2 \mathbf{p}_2 \quad (2.24)$$

mit $R_0^2 = R_0^1 R_1^2$ gemäß (2.15).

Diese Ausführungen erlauben die Einführung so genannter *homogener Transformationen*, die die kombinierte Translation und Rotation von Vektoren zwischen zwei Koordinatensystem $(0x_i y_i z_i)$ und $(0x_j y_j z_j)$ in Form einer einzelnen Abbildung H_i^j beschreiben. Die Beziehung (2.22) motiviert dabei die Definition

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} R_0^1 & \mathbf{d}_0^1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad R_0^1 \in SO(3). \quad (2.25)$$

Die Konfigurationen eines Starrkörpers

$$\tilde{\mathbf{p}}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

bezüglich des Koordinatensystem $(0x_0 y_0 z_0)$ und

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

bezüglich des Koordinatensystem $(0x_1 y_1 z_1)$ sind somit gemäß (2.22) durch die Gleichung

$$\tilde{\mathbf{p}}_0 = H_0^1 \tilde{\mathbf{p}}_1 \quad (2.28)$$

verbunden, wobei H_0^1 auch als *homogene Transformationsmatrix* bezeichnet wird. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass gilt $H_0^1 \in SE(3)$ mit $SE(3)$ der *speziellen Euklidischen Gruppe* der Ordnung 3.

Diese bezeichnet die Menge aller homogenen (Starrkörper)–Transformationen im 3–dimensionalen Euklidischen Raum \mathbb{R}^3 . Die Matrix H_0^1 ist im Allgemeinen nicht orthogonal, d.h.

$$H_j^i = (H_i^j)^{-1} \neq (H_i^j)^T, \quad (2.29)$$

weshalb H_i^j auch im Gegensatz zu R_i^j nicht Element der speziellen orthogonalen Gruppe ist. Es ist jedoch leicht zu zeigen, dass gilt

$$H_1^0 = \begin{bmatrix} R_1^0 & -R_1^0 \mathbf{d}_0^1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Für die Anordnung in Abbildung 2.7 folgt entsprechend mit der Konfiguration

$$\tilde{\mathbf{p}}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

die Beziehung

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 = H_1^2 \tilde{\mathbf{p}}_2 = \begin{bmatrix} R_1^2 & \mathbf{d}_1^2 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_2.$$

Damit ergibt sich mit (2.28) der Zusammenhang

$$\tilde{\mathbf{p}}_0 = H_0^1 H_1^2 \tilde{\mathbf{p}}_2 = H_0^2 \tilde{\mathbf{p}}_2 = \begin{bmatrix} R_0^1 R_1^2 & R_0^1 \mathbf{d}_1^2 + \mathbf{d}_0^1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_2. \quad (2.31)$$

Anmerkung 2.2

Die in (2.25) definierte Transformation ist eine spezielle Darstellung homogener Transformationen, die u.a. in der Computergraphik Anwendung findet. Die allgemeinste Form kann wie folgt angegeben werden

$$H = \begin{bmatrix} R & \mathbf{d} \\ \mathbf{f}^T & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotation} & \text{Translation} \\ \text{Perspektive} & \text{Skalierung} \end{bmatrix}$$

mit $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$, $\mathbf{f}^T \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ und $s \in \mathbb{R}$ [2].

Die Anwendung dieser Konzepte erfolgt im Weiteren anhand verschiedener kinematischer Beispiele aus der Robotik.

Aufgabe 2.4 (Planarer Zwei-Gelenk-Manipulator). Abbildung 2.8 zeigt einen planaren Zwei-Gelenk-Manipulator. Die Abstände zu den Schwerpunkten sind durch l_j^c , $j = 1, 2$ gekennzeichnet.

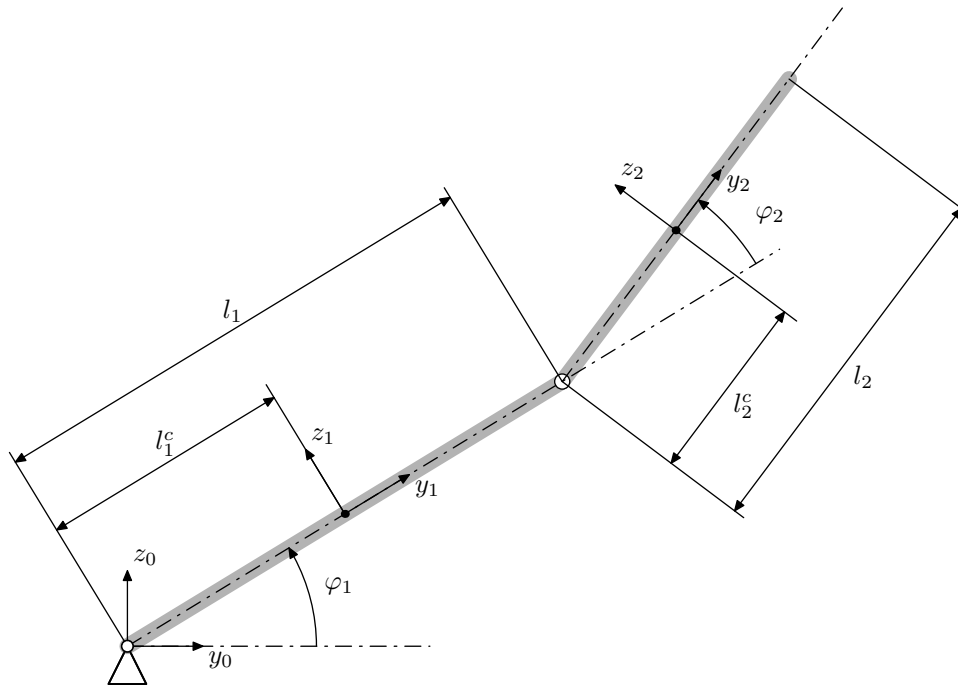


Abb. 2.8: Planarer Zwei-Gelenk-Manipulator.

Bestimmen Sie für die dargestellte Konfiguration die Lage der Schwerpunkte der beiden Stäbe und des Endeffektors (Ende von Stab 2) bezüglich des Inertialsystems $(0x_0y_0z_0)$.

Lösung 2.4. Es gelten die folgenden Zusammenhänge für die Darstellung des Schwerpunkts $\mathbf{p}_0^{c,1}$ und des Endpunkts $\mathbf{p}_0^{e,1}$ von Stab 1 im Inertialsystem

$$\mathbf{p}_0^{c,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1^c c_{\varphi_1} \\ l_1^c s_{\varphi_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_0^{e,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 c_{\varphi_1} \\ l_1 s_{\varphi_1} \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Zudem ergeben sich die Darstellungen des Schwerpunkts $\mathbf{p}_0^{c,2}$ und des Endpunkts $\mathbf{p}_0^{e,2}$ von Stab 2 im Inertialsystem zu

$$\mathbf{p}_0^{c,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 c_{\varphi_1} + l_2^c c_{\varphi_1 + \varphi_2} \\ l_1 s_{\varphi_1} + l_2^c s_{\varphi_1 + \varphi_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_0^{e,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 c_{\varphi_1} + l_2 c_{\varphi_1 + \varphi_2} \\ l_1 s_{\varphi_1} + l_2 s_{\varphi_1 + \varphi_2} \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$



Aufgabe 2.5 (Parallelkinematik). *Abbildung 2.9 zeigt eine Parallelkinematik bestehend aus 4 rotatorisch beweglichen Armen. Die Konfiguration führt durch die 4 Gelenke auf eine so genannte geschlossene kinematische Kette, wodurch sich die Anzahl der Freiheitsgrade auf 2 reduziert.*

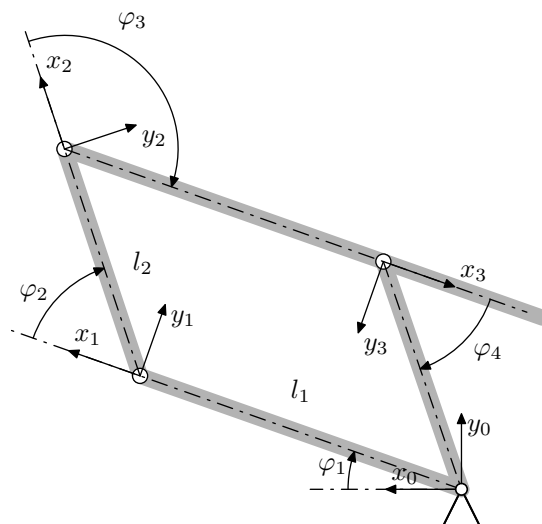


Abb. 2.9: Parallelkinematik (Parallelogramm-Arm).

Bestimmen Sie jeweils die Lage der Gelenke im Inertialsystem $(0x_0y_0z_0)$ und stellen Sie die kinematischen Zwangsbedingungen dar.

Lösung 2.5. Es gelten die folgenden Beziehungen für die einzelnen Gelenkpunkte $\mathbf{p}_0^{G,j}$, $j = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_0^{G,1} &= R_0^1 \mathbf{d}_1^{G,1} = \begin{bmatrix} c\varphi_1 & -s\varphi_1 & 0 \\ s\varphi_1 & c\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l_1 c\varphi_1 \\ l_1 s\varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_0^{G,2} &= R_0^1 \left(\mathbf{d}_1^{G,1} + R_1^2 \mathbf{d}_2^{G,2} \right) = \begin{bmatrix} c\varphi_1 & -s\varphi_1 & 0 \\ s\varphi_1 & c\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\varphi_2 & -s\varphi_2 & 0 \\ s\varphi_2 & c\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} l_1 c\varphi_1 + l_2 c\varphi_1 + \varphi_2 \\ l_1 s\varphi_1 + l_2 s\varphi_1 + \varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_0^{G,3} &= R_0^1 \left(\mathbf{d}_1^{G,1} + R_1^2 \left(\mathbf{d}_2^{G,2} + R_2^3 \mathbf{d}_3^{G,3} \right) \right) \\ &= \begin{bmatrix} l_1 (c\varphi_1 + c\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + l_2 c\varphi_1 + \varphi_2 \\ l_1 (s\varphi_1 + s\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + l_2 s\varphi_1 + \varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_0^{G,4} &= R_0^1 \left(\mathbf{d}_1^{G,1} + R_1^2 \left(\mathbf{d}_2^{G,2} + R_2^3 \left(\mathbf{d}_3^{G,3} + R_3^4 \mathbf{d}_4^{G,4} \right) \right) \right) \\ &= \begin{bmatrix} l_1 (c\varphi_1 + c\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + l_2 (c\varphi_1 + \varphi_2 + c\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) \\ l_1 (s\varphi_1 + s\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + l_2 (s\varphi_1 + \varphi_2 + s\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Des Weiteren gilt aufgrund der geschlossenen kinematischen Kette die Zwangsbedingung $\mathbf{p}_0^{G,4} = \mathbf{0}$, bzw.

$$\begin{aligned}0 &= l_1 (c\varphi_1 + c\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + l_2 (c\varphi_1 + \varphi_2 + c\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) \\ 0 &= l_1 (s\varphi_1 + s\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + l_2 (s\varphi_1 + \varphi_2 + s\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4).\end{aligned}$$

Diese sind, wie leicht anhand der Darstellung in Abbildung 2.9 nachvollziehbar ist, für

$$\varphi_2 = \varphi_4 = \pi - \varphi_3$$

erfüllt, womit die Winkel φ_1 und φ_3 als Freiheitsgrade verbleiben.

Aufgabe 2.6 (Turmdrehkran). Abbildung 2.10 zeigt einen Turmdrehkran. Der Kran besitzt 5 Freiheitsgrade:

- (i) die Drehung des Turms um den Winkel φ_1 bezüglich der z_0 -Achse des Inertialsystems $(0x_0y_0z_0)$,
- (ii) die Translation der Laufkatze um l_1 entlang der y_1 -Achse im Koordinatensystem $(0x_1y_1z_1)$,
- (iii) die Drehung des Seils um dem Winkel φ_2 bezüglich der x_2 -Achse des Koordinatensystems $(0x_2y_2z_2)$,
- (iv) die Drehung des Seils um den Winkel φ_3 bezüglich der z_2 -Achse des Koordinatensystems $(0x_2y_2z_2)$, und
- (v) die Translation der Last um l_2 entlang der y_2 -Achse im Koordinatensystem $(0x_2y_2z_2)$.

Bestimmen Sie für die dargestellte Konfiguration die Lage der Last und der Laufkatze bezüglich des Inertialsystems $(0x_0y_0z_0)$. Beachten Sie, dass die Bewegungen jeweils durch kombinierte Rotationen und Translationen beschrieben werden.

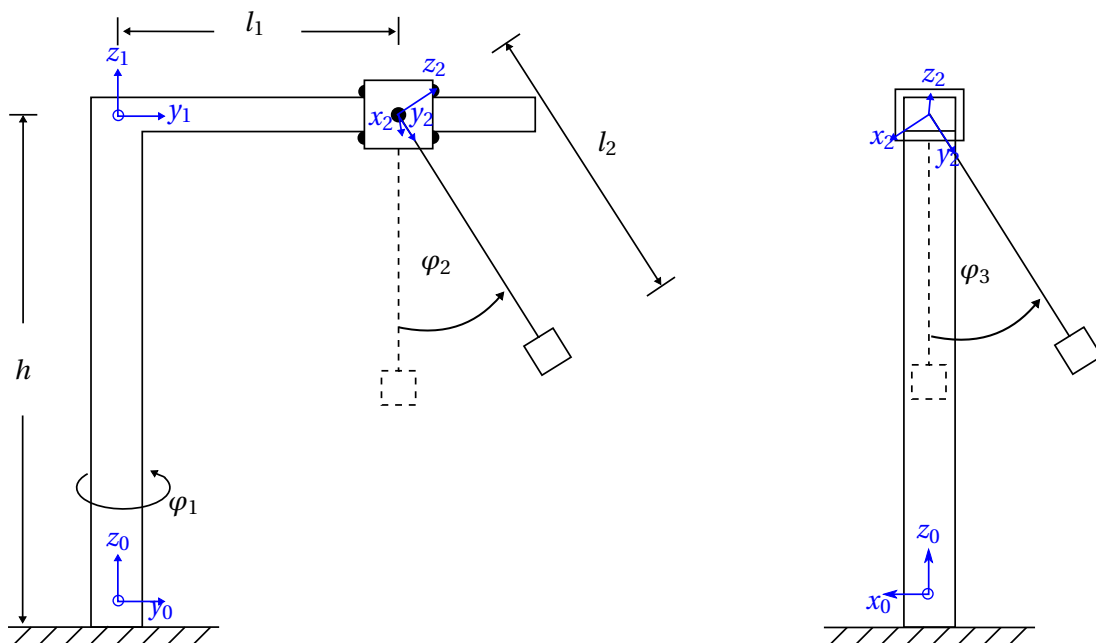


Abb. 2.10: Turmdrehkran mit 5 Freiheitsgraden.

Lösung 2.6. Mit den obigen Ausführungen für die kombinierte Translation und Rotation gilt für Darstellung der Laufkatzen-Position im Inertialsystem

$$\mathbf{p}_0^{LK} = \mathbf{d}_0^1 + R_0^1 \mathbf{d}_1^{LK} = \begin{bmatrix} -l_1 s_{\varphi_1} \\ c_{\varphi_1} l_1 \\ h \end{bmatrix}$$

mit

$$\mathbf{d}_0^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_1^{LK} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R_0^1 = R_{z, \varphi_1} = \begin{bmatrix} c_{\varphi_1} & -s_{\varphi_1} & 0 \\ s_{\varphi_1} & c_{\varphi_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und $l_1 = l_1(t)$, $\varphi_1 = \varphi_1(t)$. In analoger Weise ergibt sich die Darstellung der Last-Position im Inertialsystem zu

$$\mathbf{p}_0^L = \mathbf{d}_0^1 + R_0^1(\mathbf{d}_1^{LK} + R_1^2 \mathbf{d}_2^L) = \begin{bmatrix} -s_{\varphi_1}(l_1 + c_{\varphi_3} l_2 s_{\varphi_2}) - c_{\varphi_1} l_2 s_{\varphi_3} \\ c_{\varphi_1}(l_1 + c_{\varphi_3} l_2 s_{\varphi_2}) - l_2 s_{\varphi_1} s_{\varphi_3} \\ h - c_{\varphi_2} c_{\varphi_3} l_2 \end{bmatrix}$$

mit

$$\mathbf{d}_2^L = \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R_1^2 = R_{x, \varphi_2 - \frac{\pi}{2}} R_{z, \varphi_3} = \begin{bmatrix} c_{\varphi_3} & -s_{\varphi_3} & 0 \\ s_{\varphi_2} s_{\varphi_3} & c_{\varphi_3} s_{\varphi_2} & c_{\varphi_2} \\ -c_{\varphi_2} s_{\varphi_3} & -c_{\varphi_2} c_{\varphi_3} & s_{\varphi_2} \end{bmatrix}$$

für $l_2 = l_2(t)$, $\varphi_2 = \varphi_2(t)$ und $\varphi_3 = \varphi_3(t)$. Hier ist insbesondere die zeitliche Abhängigkeit der Winkel $\varphi_j(t)$, $j = 1, 2, 3$ und der Verschiebungen $l_j(t)$, $j = 1, 2$ zu beachten.

2.6 Drehwinkelgeschwindigkeit

Wie in den vorangegangenen Beispielen dargestellt wurde, sind die Winkel und damit die Elemente der Drehmatrizen im Allgemeinen Funktionen der Zeit t . Sei der Einfachheit halber die Rotationsmatrix $R \in SO(3)$ nur abhängig von einem Winkel $\phi(t)$, dann gilt

$$\dot{R}(\phi) = \left(\frac{\partial}{\partial \phi} R \right) \dot{\phi}. \quad (2.34)$$

Wegen der Eigenschaft der Orthogonalität der Drehmatrizen (siehe (2.5), d.h. $RR^T = E$) gilt zudem

$$\frac{d}{dt}(RR^T) = \dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0. \quad (2.35)$$

Offensichtlich ist die Matrix

$$S = \dot{R}R^T = -R\dot{R}^T \quad (2.36)$$

eine schiefsymmetrische³ (3×3)-Matrix. Aufgrund der Schiefsymmetrie kann S eindeutig mittels des Vektors $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ in der Form

$$S(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

dargestellt werden. Der Vektor $\boldsymbol{\omega}$ beschreibt dabei die *Drehwinkelgeschwindigkeiten* des rotierenden Koordinatensystems um das Inertialsystem zum Zeitpunkt t . Dies ist dadurch motiviert, dass (2.34) mit den vorangegangenen Ausführungen auch als

$$\dot{R}(\phi) = \dot{R}(R^T R) = (\dot{R}R^T)R = S(\boldsymbol{\omega})R(\phi) \quad (2.38)$$

angegeben werden kann.

³Eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wird schiefsymmetrisch genannt, wenn $S + S^T = 0$ ist.

Beispiel 2.3. Für die elementaren Drehmatrizen (2.6)–(2.8) mit

$$R_{x,\psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\psi & -s_\psi \\ 0 & s_\psi & c_\psi \end{bmatrix}, \quad R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix}, \quad R_{z,\phi} = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

erhält man

$$\begin{aligned} S_{x,\psi} &= \dot{R}_{x,\psi}(R_{x,\psi})^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\psi}(t) \\ 0 & \dot{\psi}(t) & 0 \end{bmatrix} \\ S_{y,\theta} &= \dot{R}_{y,\theta}(R_{y,\theta})^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\theta}(t) & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ S_{z,\phi} &= \dot{R}_{z,\phi}(R_{z,\phi})^T = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\phi}(t) & 0 \\ \dot{\phi}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Die jeweiligen Vektoren der Drehwinkelgeschwindigkeiten ergeben sich somit zu

$$\boldsymbol{\omega}_{x,\psi} = \begin{bmatrix} \dot{\psi}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_{y,\theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_{z,\phi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Im Folgenden wird die in Abbildung 2.11 dargestellte Konfiguration betrachtet. Dabei führt das Koordinatensystem $(0x_1y_1z_1)$ rotatorische und translatorische Bewegungen bezüglich des Inertialsystems $(0x_0y_0z_0)$ aus, so dass der Vektor \mathbf{p}_1 zum Punkt P im Koordinatensystem $(0x_1y_1z_1)$ zeitlich konstant ist, d.h. $\dot{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{0}$. Mit $\mathbf{p}_0(t) = \mathbf{d}_0^1(t) + R_0^1(t)\mathbf{p}_1$ ergibt sich die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{p}}_0(t)$ gemessen im Inertialsystem zu

$$\dot{\mathbf{p}}_0 = \dot{\mathbf{d}}_0^1 + \dot{R}_0^1\mathbf{p}_1 + R_0^1\dot{\mathbf{p}}_1 = \dot{\mathbf{d}}_0^1 + S(\boldsymbol{\omega}_0^1)R_0^1\mathbf{p}_1. \quad (2.41)$$

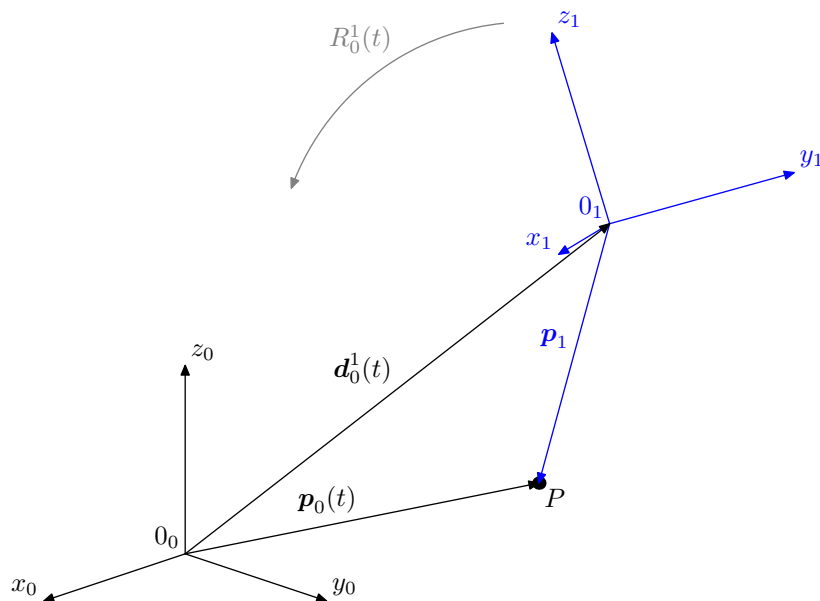


Abb. 2.11: Zeitabhängige kombinierte translatorische und rotatorische Bewegung.

Es kann leicht gezeigt werden, dass dies äquivalent ist zur Formulierung

$$\dot{\mathbf{p}}_0 = \dot{\mathbf{d}}_0^1 + \boldsymbol{\omega}_0^1 \times (R_0^1 \mathbf{p}_1), \quad (2.42)$$

da für einen allgemeinen Vektor $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$S(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_y r_3 - \omega_z r_2 \\ \omega_z r_1 - \omega_x r_3 \\ \omega_x r_2 - \omega_y r_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (2.43)$$

Anmerkung 2.3

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren $\boldsymbol{\omega}$ und \mathbf{r} kann leicht durch folgende "Merkregel" berechnet werden

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \omega_x & r_1 \\ \omega_y & r_2 \\ \omega_z & r_3 \\ \omega_x & r_1 \\ \omega_y & r_2 \\ \omega_z & r_3 \end{bmatrix} \times = \begin{bmatrix} \omega_y & r_2 \\ \omega_z & r_3 \\ \omega_x & r_1 \\ \omega_x & r_1 \\ \omega_y & r_2 \\ \omega_z & r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_y r_3 - \omega_z r_2 \\ \omega_z r_1 - \omega_x r_3 \\ \omega_x r_2 - \omega_y r_1 \end{bmatrix}.$$

Abschließend soll analysiert werden, wie sich Drehwinkelgeschwindigkeiten bei mehreren zueinander gedrehten Koordinatensystemen addieren. Dies soll zunächst beispielhaft für zwei Koordinatensysteme $(0x_1y_1z_1)$ und $(0x_2y_2z_2)$ erfolgen, die rotatorische und translatorische Bewegungen bezüglich eines ortsfesten Inertialsystems $(0x_0y_0z_0)$ durchführen. Die Darstellungen der Ortsvektoren zu einem Punkt P in den jeweiligen Koordinatensystemen sind gemäß (2.22) durch

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 + R_0^1 \mathbf{p}_1, \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{d}_1^2 + R_1^2 \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^2 + R_0^2 \mathbf{p}_2$$

mit $\mathbf{d}_0^2(t) = \mathbf{d}_0^1(t) + R_0^1(t) \mathbf{d}_1^2(t)$ und $R_0^2(t) = R_0^1(t) R_1^2(t)$ gegeben. Das Koordinatensystem $(0x_2y_2z_2)$ sei so gewählt, dass \mathbf{p}_2 zeitlich konstant ist. Für die Drehmatrix R_0^2 gilt mit (2.38) zudem

$$\dot{R}_0^2 = \dot{R}_0^1 R_1^2 + R_0^1 \dot{R}_1^2 = S(\boldsymbol{\omega}_0^2) R_0^2. \quad (2.44)$$

Des Weiteren ergeben sich mit (2.38) die Beziehungen

$$\dot{R}_0^1 R_1^2 = S(\boldsymbol{\omega}_0^1) R_0^1 R_1^2 = S(\boldsymbol{\omega}_0^1) R_0^2$$

und

$$R_0^1 \dot{R}_1^2 = R_0^1 S(\boldsymbol{\omega}_1^2) R_1^2 = R_0^1 S(\boldsymbol{\omega}_1^2) \underbrace{(R_0^1)^T R_0^1}_{= E} R_1^2.$$

Letztere kann wegen

$$R_0^1 S(\boldsymbol{\omega}_1^2) (R_0^1)^T = S(R_0^1 \boldsymbol{\omega}_1^2)$$

zu

$$R_0^1 \dot{R}_1^2 = S(R_0^1 \boldsymbol{\omega}_1^2) R_0^1 R_1^2 = S(R_0^1 \boldsymbol{\omega}_1^2) R_0^2$$

vereinfacht werden. Dies kann leicht für einen beliebigen Vektor \mathbf{r} anhand der folgenden Gleichungssequenz unter Berücksichtigung von (2.43) verifiziert werden, d.h.

$$R_0^1 S(\boldsymbol{\omega}_1^2) (R_0^1)^T \mathbf{r} = R_0^1 (\boldsymbol{\omega}_1^2 \times (R_0^1)^T \mathbf{r}) = R_0^1 \boldsymbol{\omega}_1^2 \times R_0^1 (R_0^1)^T \mathbf{r} = R_0^1 \boldsymbol{\omega}_1^2 \times \mathbf{r} = S(R_0^1 \boldsymbol{\omega}_1^2) \mathbf{r}.$$

Damit ergibt sich unter Berücksichtigung von $S(\mathbf{a}) + S(\mathbf{b}) = S(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ die Gleichung

$$\dot{R}_0^2 = S(\boldsymbol{\omega}_0^1) R_0^2 + S(R_0^1 \boldsymbol{\omega}_1^2) R_0^2 = S(\boldsymbol{\omega}_0^1 + R_0^1 \boldsymbol{\omega}_1^2) R_0^2.$$

Ein Vergleich mit (2.44) zeigt, dass gilt

$$\boldsymbol{\omega}_0^2 = \boldsymbol{\omega}_0^1 + R_0^1 \boldsymbol{\omega}_1^2 \quad (2.45)$$

Damit wird bestätigt, dass eine Addition der Vektoren der Drehwinkelgeschwindigkeiten nur dann Sinn macht, wenn die Vektoren bezüglich des selben Koordinatensystems angegeben werden. Hier ist $\boldsymbol{\omega}_0^1$ im Koordinatensystem $(0x_0y_0z_0)$ gegeben und durch $R_0^1 \boldsymbol{\omega}_1^2$ wird der Vektor $\boldsymbol{\omega}_1^2$ in das Koordinatensystem $(0x_0y_0z_0)$ transformiert, so dass die Addition möglich wird.

Diese Ausführungen können in analoger Weise auf eine beliebige Anzahl n an bewegten Koordinatensystemen verallgemeinert werden, die durch die Rotationsmatrix

$$R_0^n = R_0^1 R_1^2 \cdots R_{n-1}^n \quad (2.46)$$

miteinander verknüpft sind. In diesem Fall gilt

$$\boldsymbol{\omega}_0^n = \boldsymbol{\omega}_0^1 + R_0^1 \boldsymbol{\omega}_1^2 + R_0^2 \boldsymbol{\omega}_2^3 + \dots + R_0^{n-1} \boldsymbol{\omega}_{n-1}^n. \quad (2.47)$$

Diese einleitenden Ausführungen zur Kinematik starrer Körper sind insbesondere auch zur Herleitung der zugehörigen Bewegungsgleichungen von essentieller Bedeutung, da hieraus unmittelbar die Lage und translatorische sowie rotatorische Geschwindigkeit ermittelt werden können, die beispielsweise zur Darstellung der potenziellen und kinetischen Energie eines Starrkörpersystems Verwendung finden.

Literatur

- [1] D. Gross, W. Hauger, J. Schröder und W.A. Wall. *Technische Mechanik, Band 3: Kinetik*. 9. Aufl. Berlin: Springer-Verlag, 2006 (zitiert auf Seite 7).
- [2] M. Spong und M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control*. New York: John Wiley & Sons, 1989 (zitiert auf den Seiten 10, 18).
- [3] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani und G. Oriolo. *Robotics: Modelling, Planning and Control*. London: Springer-Verlag, 2010 (zitiert auf Seite 15).