C A U	Christian-Albrechts-Universität zu Kiel	Technische Fakultät

Deckblatt zu einer Klausur am Institut für Elektrotechnik und Informationstechnik

Modulprüfung	
Modulname	**Mathematische Modellierung**
Datum	**31.03.2016**
Prüfpersonen	
1. Prüfperson	**Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Meurer**
ggf. 2. Prüfperson	
Kandidat/in	
Matrikelnummer	
Name, Vorname	

Erklärung der/des Kandidatin/Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.

Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: ______________________________

Korrektur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Punkte										

Summe der Punkte: ______________ Note: ______________

Einsicht / Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Note einverstanden bin. Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den ______________ Unterschrift: ______________________________

Mathematische Modellierung (WS 15/16) **Klausur (31.03.2016)**

Prof. Dr.–Ing. habil. Thomas Meurer
Lehrstuhl für Regelungstechnik

Bitte beachten Sie:

- Diese Klausur enthält 3 Aufgaben auf den Seiten 3-10.
- Dauer der Klausur: 120 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: **6 Seiten A4 einseitig bzw. 3 Blätter A4 doppelseitig handschriftlich beschrieben**. Elektronische Hilfsmittel, das Vorlesungsskript oder andere Literatur sind **nicht** zugelassen.
- Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf alle Blätter, die Sie abgeben.
- Legen Sie bitte Ihren Studierenden- und Ihren Personalausweis bereit.
- Geben Sie dieses Deckblatt und die Klausuraufgaben mit Ihrer Klausur ab.

Aufgabe 1. Ein homogener Quader (Masse M) gleitet reibungsfrei auf einer schiefen Ebene (Neigungswinkel α) und wird durch eine Feder (Federsteifigkeit c, ungespannte Federlänge s_0) gehalten. Im Schwerpunkt A des Quaders ist ein homogener Stab (Masse m, Länge L, Schwerpunkt B) reibungsfrei drehbar gelagert. An dem Stab greift ein Dämpfungselement (Dämpfungskonstante d, Kraft proportional zur Winkelgeschwindigkeit) an. Zudem wirkt auf den Quader eine Kraft $f(t)$.

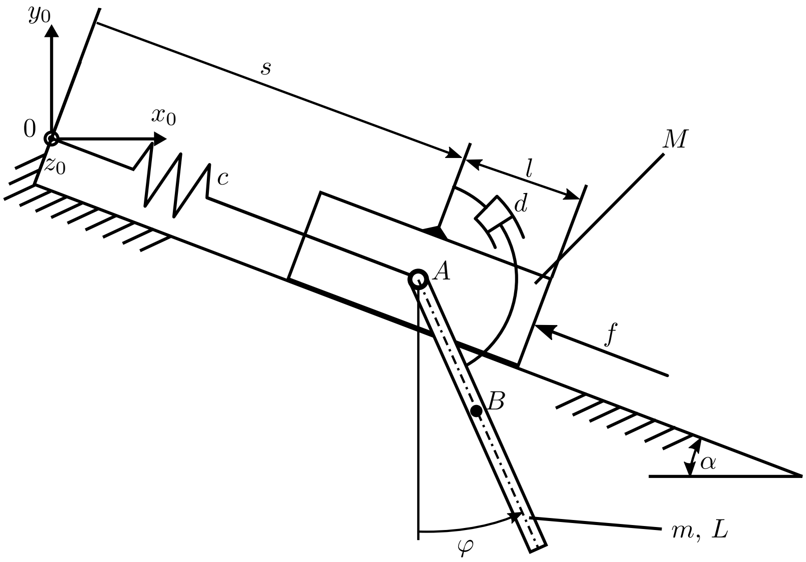

Abb. 1: Konfiguration des Mehrkörpersystems.

Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben für die in Abbildung 1 dargestellte Konfiguration:

a) Bestimmen Sie die Anzahl n der Freiheitsgrade des dargestellten Systems und legen Sie geeignete generalisierte Koordinaten q_j, $j = 1, \ldots, n$ fest. | 0.5 P

b) Bestimmen Sie die Orts– und Geschwindigkeitsvektoren der Schwerpunkte des Quaders und des Stabes. | 3.5 P

c) Geben Sie die kinetische Energie des Systems in Abhängigkeit von den generalisierten Koordinaten und deren zeitlichen Ableitungen an. | 2.5 P

d) Ermitteln Sie die potenzielle Energie des Systems in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten und geben Sie die Rayleighsche Dissipationsfunktion an. | 1.5 P

e) Bestimmen Sie den Vektor der generalisierten Kräfte $\boldsymbol{Q}_f$. Geben Sie hierzu die entsprechende Manipulator Jacobi–Matrix an. | 1 P

f) Geben Sie **eine** der Bewegungsgleichungen des Systems durch Auswertung der Euler–Lagrange Gleichungen an. | 2 P

Hinweis: Es gelten die folgenden trigonometrischen Beziehungen

$$\cos(a+b)\sin(b) - \sin(a+b)\cos(b) = -\sin(b), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm a\right) = \mp\sin(a), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm a\right) = \cos(a).$$

Lösung zu Aufgabe 1:

a) $n = 2$ und $\boldsymbol{q} = [s, \varphi]^T$

b) Es gelten die folgenden Zusammenhänge (s für Stab, q für Quader)

$$\boldsymbol{p}_0^{S,q} = \begin{bmatrix} s\cos(\alpha) \\ -s\sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_0^{S,s} = \begin{bmatrix} s\cos(\alpha) + \frac{L}{2}\sin(\varphi) \\ -s\sin(\alpha) - \frac{L}{2}\cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_0^{S,q} = \begin{bmatrix} \dot{s}\cos(\alpha) \\ -\dot{s}\sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \dot{\boldsymbol{p}}_0^{S,s} = \begin{bmatrix} \dot{s}\cos(\alpha) + \dot{\varphi}\frac{L}{2}\cos(\varphi) \\ -\dot{s}\sin(\alpha) + \dot{\varphi}\frac{L}{2}\sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

c) Die kinetische Energie ergibt sich zu

$$W_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{6}L^2 m\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}Lm\dot{s}\dot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi) + \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}M\dot{s}^2.$$

d) Für die potenzielle Energie gilt

$$W_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2}c(s-s_0)^2 - mg\left(\frac{L}{2}\cos(\varphi) + \sin(\alpha)s\right) - Mg\sin(\alpha)s.$$

Die Rayleighsche Dissipationsfunktion ergibt sich zu

$$R = \frac{1}{2}d\dot{\varphi}^2.$$

e) Zur Berechnung der Manipulator Jacobi–Matrix $J_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{q})$ wird der Ortsvektor zum Kraftangriffspunkt ermittelt, d.h.

$$\boldsymbol{p}_0^f = \begin{bmatrix} (s+l)\cos(\alpha) \\ -(s+l)\sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

womit sich

$$J_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ergibt. Dies führt mit $\boldsymbol{f} = [-f\cos(\alpha), f\sin(\alpha), 0]^T$ auf

$$\boldsymbol{Q}_f = (J_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{q}))^T\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} -f \\ 0 \end{bmatrix}.$$

f) Die Bewegungsgleichungen folgen aus der Auswertung der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art zu

$$(m+M)\ddot{s} + m\frac{L}{2}\ddot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi) - m\frac{L}{2}\dot{\varphi}^2\sin(\alpha+\varphi) + c(s-s_0) - g(m+M)\sin(\alpha) = -f$$

$$m\frac{L^2}{3}\ddot{\varphi} + m\frac{L}{2}\ddot{s}\cos(\alpha+\varphi) + mg\frac{L}{2}\sin(\varphi) = 0.$$

Gefragt wurde nach einer der beiden Differenzialgleichungen.

Aufgabe 2. Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

a) Abbildung 2 zeigt eine kombinierte translatorische und rotatorische Bewegung zweier Scheiben S_1 bzw. S_2 und einer Masse m. Die Scheibe S_1 rotiert mit dem Winkel $\varphi(t)$ um das dargestellte Inertialsystem $(0x_0y_0z_0)$. Die Scheibe S_2 ist *starr* mit der Scheibe S_1 verbunden, jedoch um den Winkel $\alpha = \pi/4$ gekippt. Für $\psi(t) = 0$ liegen die Masse m bzw. die Strecke $s(t)$ und die Verbindungslinien $\overline{AB}$ sowie $\overline{BC}$ in einer Ebene.

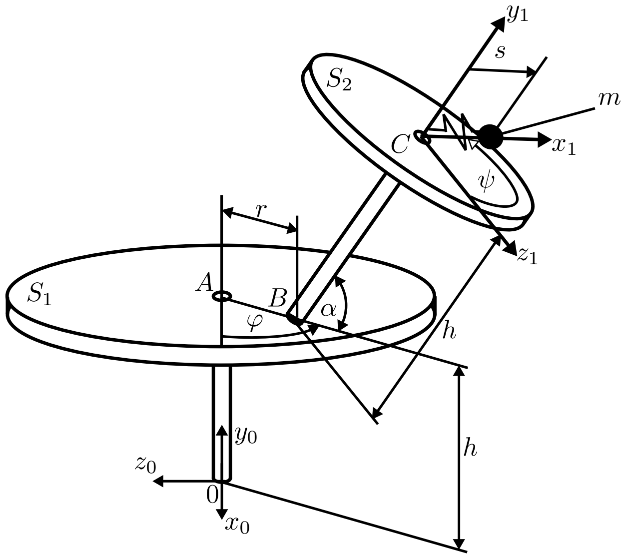

Abb. 2: Kombiniert translatorische und rotatorische Bewegung.

Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben:

(i) Bestimmen Sie die Ortsvektoren $\boldsymbol{p}_0^B$, $\boldsymbol{p}_0^C$ und $\boldsymbol{p}_0^m$ zu den Punkten B und C sowie zur Masse m im Inertialsystem $(0x_0y_0z_0)$ an. Führen Sie hierzu ggf. geeignete körperfeste Koordinatensysteme ein. | 4 P

(ii) Ermitteln Sie die Drehwinkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_0^1$ zwischen dem Inertialsystem $(0x_0y_0z_0)$ und dem körperfesten Koordinatensystem $(0x_1y_1z_1)$. | 2 P

b) Gegeben ist die in Abbildung 3 dargestellte Struktur im Schwerefeld (Erdbeschleunigung g) bestehend aus zwei quaderförmigen Grundkörpern Q_1 und Q_2 und einer masselosen Scheibe. Alle Komponenten sind miteinander durch masselose Verbindungen verknüpft. Die Quader sind homogen und besitzen einheitlich die Dichte ρ.

Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben:

(i) Bestimmen Sie den Vektor $\boldsymbol{p}_0^{S,a}$ vom Urspung des Koordinatensystems $(0xyz)$ zum Gesamtschwerpunkt der Struktur. | 3 P

(ii) Auf der masselosen Scheibe soll ein dritter Quader Q_3 der Dimension entsprechend Q_1 so platziert werden, dass der Schwerpunkt $\boldsymbol{p}_0^{S,b}$ der sich ergebenden Gesamtstruktur auf der z–Achse liegt. Ermitteln Sie die dazu notwendige Position des Quaders Q_3. | 2.5 P

(iii) Befindet sich das Gesamtsystem bestehend aus den drei Quadern Q_1, Q_2 und Q_3 im Gleichgewicht? Begründen Sie Ihre Antwort. | 0.5 P

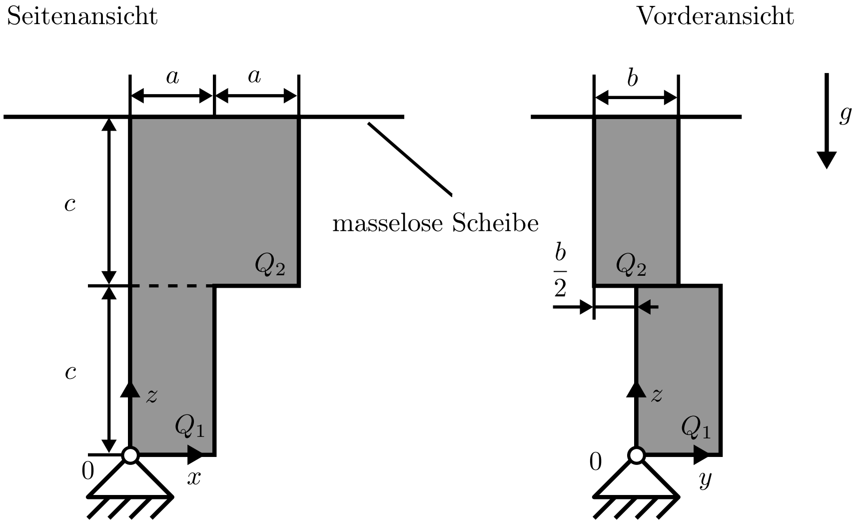

Abb. 3: Zur Schwerpunktsbestimmung.

c) Eine mit heißer Milch gefüllte Babyflasche soll so schnell wie möglich auf Trinktemperatur gebracht werden. Hierzu soll die heiße Flasche unter ständigem Schütteln unter kaltes fließendes Wasser gehalten werden.

Es gelten die folgenden Annahmen:

- Die Flasche wird vereinfachend als Zylinder (Durchmesser d, Höhe h) angesehen, der vollständig mit Milch gefüllt ist.
- Das Glas speichert keine Energie und leistet keinen Beitrag zum Wärmewiderstand.
- Energie wird sowohl in radialer (Berandung) als auch axialer (Deckel und Boden) Richtung übertragen. Es wird angenommen, dass der Deckel und Boden nicht vom fließenden Wasser überströmt werden.
- Die Milch in der Flasche wird als ideal durchmischt angesehen.

Für die Parameter gilt:

- Der konvektive Wärmeübergangskoeffizient zwischen Luft und Flasche bzw. zwischen fließenden Wasser und Flasche wird mit α_L bzw. α_W bezeichnet. Die spezifische (isobare) Wärmekapazität der Milch ist c_p und λ bezeichnet deren Wärmeleitfähigkeit.
- Die Temperatur der umgebenden Luft T_L und des Wassers T_W sind konstant.
- Die zu erreichende Trinktemperatur T_K beträgt 1/5 der Ausgangstemperatur $T(0) = T_0$ der Milch, d. h. $T_K = T_0/5$.

(i) Leiten Sie die Differenzialgleichung für die zeitliche Entwicklung der Temperatur der Milch in der Flasche her. | 3 P

(ii) Ermitteln Sie einen allgemeinen Ausdruck für die notwendige Kühlzeit t_K. | 3 P

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Es gelten die folgenden Teilergebnisse

(i) Die Ortsvektoren ergeben sich zu

$$\boldsymbol{p}_0^B = \begin{bmatrix} r\cos(\varphi) \\ h \\ -r\sin(\varphi) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_0^C = \begin{bmatrix} (r + h\sin(\alpha)\cos(\varphi) \\ h(1+\cos(\alpha)) \\ -(r + h\sin(\alpha))\sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}_0^m = \begin{bmatrix} [r + s\cos(\psi)\cos(\alpha) + h\sin(\alpha)]\cos(\varphi) - s\sin(\psi)\sin(\varphi) \\ h - s\cos(\psi)\cos(\alpha) + h\cos(\alpha) \\ -[r + s\cos(\psi)\cos(\alpha) + h\sin(\alpha)]\sin(\varphi) - s\sin(\psi)\cos(\varphi) \end{bmatrix}.$$

(ii) Für die Drehwinkelgeschwindigkeit gilt

$$\boldsymbol{\omega}_0^1 = \begin{bmatrix} \dot{\psi}\sin(\alpha)\cos(\varphi) \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos(\alpha) \\ -\dot{\psi}\sin(\alpha)\sin(\varphi) \end{bmatrix}.$$

b) Es ergeben sich die folgenden Teilergebnisse:

(i) Es gilt für den Gesamtschwerpunkt

$$\boldsymbol{p}_0^{S,a} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5a \\ b \\ 7c \end{bmatrix}.$$

(ii) Es gilt für die Position des zu platzierenden Quaders

$$\boldsymbol{p}_0^{S,3} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -5a \\ -b \\ 5c \end{bmatrix}.$$

(iii) Das System befindet sich im Gleichgewicht.

c) Es ergeben sich die folgenden Teilergebnisse:

(i) Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = mc_p\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\dot{Q}_{ab} = -\big(\alpha_L A_{\mathrm{Deckel}}(T - T_L) + \alpha_L A_{\mathrm{Boden}}(T - T_L) + \alpha_W A_{\mathrm{Umfang}}(T - T_W)\big).$$

Mit den Angaben führt dies nach kurzer Zwischenrechnung auf die gesuchte Differenzialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{\rho c_p}\left(\frac{\alpha_L}{h}(T - T_L) + \frac{2\alpha_W}{d}(T - T_W)\right), \quad T(0) = T_0.$$

(ii) Einführung der folgenden Abkürzungen

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \underbrace{-\frac{2}{\rho c_p}\left(\frac{\alpha_L}{h} + \frac{2\alpha_W}{d}\right)}_{=\mu} T + \underbrace{\frac{2\alpha_L}{\rho c_p h}T_L + \frac{4\alpha_W}{\rho c_p d}T_W}_{=u}, \quad T(0) = T_0$$

mit $u =$ konstant gemäß Aufgabenstellung führt auf die Lösung der Differenzialgleichung

$$T(t) = e^{-\mu t} T_0 + \frac{1}{\mu}\left(1 - e^{-\mu t}\right) u.$$

Hieraus ergibt sich die Kühlzeit t_K zu

$$t_K = -\frac{1}{\mu} \ln\left(\frac{T_K - \frac{u}{\mu}}{T_0 - \frac{u}{\mu}}\right).$$

Aufgabe 3. Abbildung 4 zeigt einen Ausschnitt aus einem Luftkanal, in dem die Lufttemperatur T_L gemessen werden soll. Das Thermometer wird vereinfachend als zylindrischer Stab (Wärmeleitfähigkeit λ_{Th}) vom Durchmesser d und Länge s betrachtet. Die vom Thermometer angezeigte Temperatur T_S wird an der Spitze des Thermometers bei $x = s$ ermittelt. Die Kanalwand besitzt einheitlich die konstante Temperatur T_W. Zudem herrscht im Thermometerstab auf Höhe der inneren Oberfläche der Kanalwand $x = 0$ ebenfalls die Temperatur T_W.

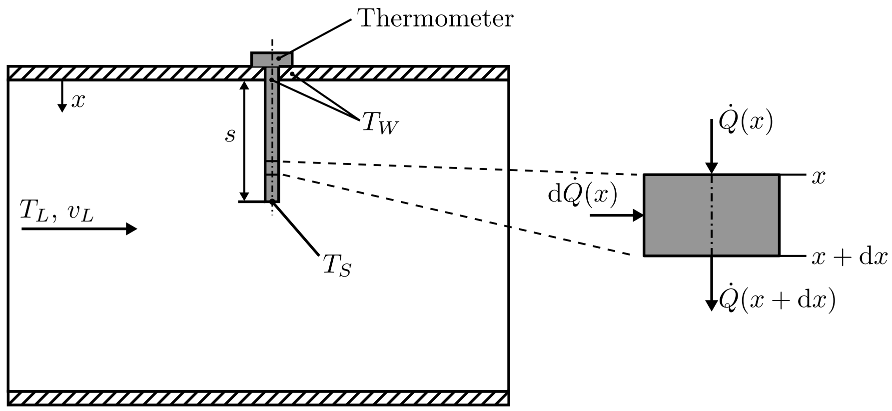

Abb. 4: Zur Temperaturmessung in einem Luftkanal.

Es gelten die folgenden Annahmen:

- Zeitlich transientes Verhalten kann vernachlässigt werden.
- Die das Thermometer umströmende Luft besitzt die konstante Temperatur T_L und die konstante Strömungsgeschwindigkeit v_L.

Für die Parameter gilt:

(i) *Thermometer:* Länge $s = 0.05\,\mathrm{m}$, Durchmesser $d = 0.01\,\mathrm{m}$, Wärmeleitfähigkeit $\lambda_{Th} = 20\,\mathrm{W/(Km)}$, Wandtemperatur $T_W = 500\,\mathrm{K}$

(ii) *Luft:* Strömungsgeschwindigkeit $v_L = 45\,\mathrm{m/s}$, Temperatur $T_L = 600\,\mathrm{K}$, Wärmeleitfähigkeit $\lambda_L = 0.06\,\mathrm{W/(Km)}$, kinematische Viskosität $\nu_{\mathrm{kin}} = 10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}$, Prandtl–Zahl $\mathrm{Pr} = 0.7$

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

a) Geben Sie allgemein die Differenzialgleichung der Temperatur $T(x)$ im Thermometer an. Nutzen Sie hierzu das in Abbildung 4 skizzierte differenzielle Kontrollvolumen des Thermometerkörpers. | 2 P

b) Wie lauten die zugehörigen Randbedingungen? Wählen Sie ggf. physikalisch sinnvolle Randbedingungen und begründen Sie Ihre Wahl. | 1 P

c) Ist die Luftströmung laminar oder turbulent? Als charakteristische Länge ist der Durchmesser des Thermometers zu wählen. | 1 P

d) Ermitteln Sie den konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten α. Hierzu kann von der Beziehung nach Eckert für querangeströmte Zylinder | 2 P

$$\mathrm{Nu} = \begin{cases} \left(0.477 + 0.533\mathrm{Re}^{0.5}\right)\mathrm{Pr}^{0.3}, & 1 < \mathrm{Re} < 4000 \\ \left(0.477 + 0.193\mathrm{Re}^{0.618}\right)\mathrm{Pr}^{0.3}, & 4000 < \mathrm{Re} < 4 \times 10^4 \end{cases}$$

Gebrauch gemacht werden. Eine graphische Darstellung von Nu in Abhängigkeit von Re für verschiedene Werte der Prandtl–Zahl Pr zeigt Abbildung 5. Runden Sie zur weiteren Auswertung ganzzahlig.

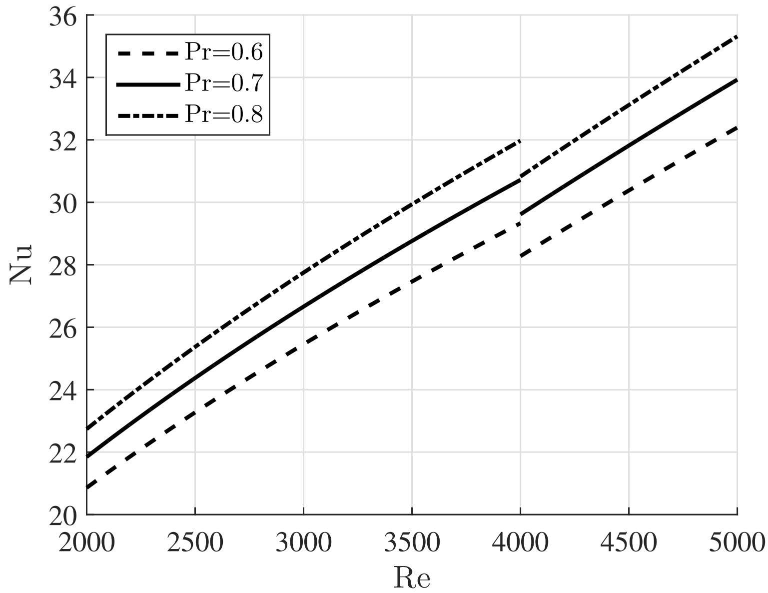

Abb. 5: Nußelt–Zahl nach Eckert für querangeströmten Zylinder.

e) Bestimmen Sie die Temperatur T_S an der Thermometerspitze $x = s$ für die genannten Bedingungen. *Beachten* Sie, dass eine numerische Auswertung nicht gefragt ist. | 4 P

Hinweis: Machen Sie hierbei von der Lösung

$$z(x) = C_1 \mathrm{e}^{ax} + C_2 \mathrm{e}^{-ax}$$

der Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}^2 z(x)}{\mathrm{d}x^2} - a^2 z(x) = 0$$

Gebrauch. Die Konstanten C_1 und C_2 sind durch die Auswertung der Randbedingungen zu ermitteln. Falls Sie in b) keine Lösung ermittelt haben, dann gehen Sie zur Lösung von d) und e) von den folgenden Randbedingungen aus

$$T(0) = \frac{T_W + T_L}{2}, \quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(s) = 0.$$

f) Durch welche Maßnahmen kann die Temperaturmessung in der betrachteten Konfiguration verbessert werden? Begründen Sie Ihre Antwort. | 1 P

Lösung zu Aufgabe 3:

a) Die stationäre Energiebilanz für das angegebene Bilanzelement führt mit

$$0 = \dot{Q}(x) - \dot{Q}(x + \mathrm{d}x) + d\dot{Q},$$

$d\dot{Q} = \alpha d\pi(T_L - T(x))\mathrm{d}x$ sowie $\dot{Q}(x) = -\lambda\frac{\pi d^2}{4}\dfrac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x}$ unter Berücksichtigung der Taylor–Entwicklung für $\dot{Q}(x + \mathrm{d}x)$ auf

$$\frac{\mathrm{d}^2T(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{4\alpha}{\lambda d}(T(x) - T_L).$$

b) Für die Randbedingungen gilt

$$T(0) = T_W, \quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(s) = 0.$$

c) Es gilt

$$\mathrm{Re} = \frac{v_L d}{\nu} = 4500$$

weshalb laminare Strömung vorliegt.

d) Wegen Re = 4500 ist der zweite Anteil der angegebenen Beziehung zu nutzen. Aus dem Diagramm folgt für Pr = 0.7 der Wert Nu = 32 (ungefähr). Mit $\mathrm{Nu} = \frac{\alpha d}{\lambda_{Th}}$ ergibt sich

$$\alpha = 192\ \mathrm{W/(Km^2)}$$

e) Wegen T_L = konstant ist die Differenzialgleichung aus a) äquivalent zu

$$\frac{\mathrm{d}^2z(x)}{\mathrm{d}x^2} = a^2z(x)$$

mit $z(x) = T(x) - T_L$ und $a^2 = \frac{4\alpha}{\lambda d}$. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen aus b) folgt

$$T(s) = T_L\left(1 - \frac{2e^{as}}{1 + e^{2as}}\right) + T_W\frac{2e^{as}}{1 + e^{2as}}.$$

f) Ziel der Messung wäre $T(s) = T_L$, was jedoch nicht exakt erreichbar ist. Die obige Lösung zeigt, dass der gewünschter Wert für $\frac{2e^{as}}{1+e^{2as}}$ erzielt wird, so dass Maßnahmen zu berücksichtigen sind, die $\frac{2e^{as}}{1+e^{2as}}$ möglichst klein werden lassen. D. h. für festes s muss a möglichst groß werden. Dies wird erreicht für große Werte des Wärmeübergangskoeffizienten α bzw. kleine Wert der Wärmeleitfähigkeit λ oder des Durchmessers d.