C	A	U	Christian-Albrechts-Universität zu Kiel	Technische Fakultät

Deckblatt zu einer Klausur am Institut für Elektrotechnik und Informationstechnik

Modulprüfung	
Modulname	**Mathematische Modellierung**
Datum	**12.10.2015**
Prüfpersonen	
1. Prüfperson	**Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Meurer**
ggf. 2. Prüfperson	
Kandidat/in	
Matrikelnummer	
Name, Vorname	

Erklärung der/des Kandidatin/Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.

Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: ______________________________

Korrektur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Punkte										

Summe der Punkte: ____________ Note: ____________

Einsicht / Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Note einverstanden bin. Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den ____________ Unterschrift: ______________________________

Mathematische Modellierung (WS 14/15) Klausur (12.10.2015)

Prof. Dr.–Ing. habil. Thomas Meurer
Lehrstuhl für Regelungstechnik

Bitte beachten Sie:

- Diese Klausur enthält 3 Aufgaben auf den Seiten 3-9.
- Dauer der Klausur: 120 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: **6 Seiten A4 einseitig bzw. 3 Blätter A4 doppelseitig handschriftlich beschrieben**. Elektronische Hilfsmittel, das Vorlesungsskript oder andere Literatur sind **nicht** zugelassen.
- Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf alle Blätter, die Sie abgeben.
- Legen Sie bitte Ihren Studierenden- und Ihren Personalausweis bereit.
- Geben Sie dieses Deckblatt und die Klausuraufgaben mit Ihrer Klausur ab.

Aufgabe 1. Eine homogener Würfel (Masse m, Trägheitsmoment $I_{S,w}$ bzgl. Schwerpunkt) kann sich reibungsfrei auf einem homogenen Stab (Masse M, Länge $2L$, Trägheitsmoment $I_{S,s} = M(2L)^2/12$ bzgl. Schwerpunkt) bewegen. Der Würfel ist durch eine Feder (Federsteifigkeit c, ungespannte Federlänge L) mit dem rechten Stabende verbunden. Der Stab ist über eine masselose symmetrische Aufhängung mit dem Lager 0 verbunden. Der Abstand von der Stabmitte zum Lager 0 beträgt L. Die Drehung um das Lager 0 erfolgt reibungsfrei. Die Aufhängung ist mit einem Dämpfungselement (Dämpfungskonstante d, Kraft proportional zur Winkelgeschwindigkeit) zur Horizontalen verbunden. Auf den Stab wirkt eine Kraft $f(t)$, deren Angriffspunkt und Orientierung während der Bewegung des Systems unverändert bleibt. Die in Abbildung 1 eingezeichneten Anschläge für die Bewegung des Würfels werden **nicht** berücksichtigt.

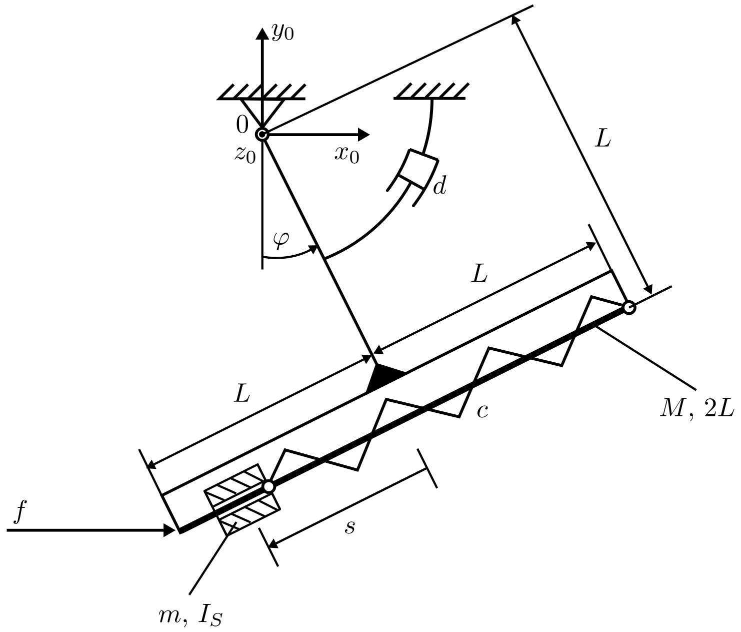

Abb. 1: Konfiguration des Mehrkörpersystems.

Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben für die in Abbildung 1 dargestellte Konfiguration:

a) Bestimmen Sie die Anzahl n der Freiheitsgrade des dargestellten Systems und legen Sie geeignete generalisierte Koordination q_j, $j = 1, \dots, n$ fest. | 0.5 P

b) Bestimmen Sie die Orts– und Geschwindigkeitsvektoren der Schwerpunkte des Stabes und des Würfels. | 1.5 P

c) Geben Sie die kinetische Energie des Systems in Abhängigkeit von den generalisierten Koordinaten und deren zeitlichen Ableitungen an. | 4 P

d) Ermitteln Sie die potenzielle Energie des Systems in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten und geben Sie die Rayleighsche Dissipationsfunktion an. | 3 P

e) Bestimmen Sie den Vektor der generalisierten Kräfte $\boldsymbol{Q}_f$. | 2 P

f) Geben Sie **eine** der Bewegungsgleichungen des Systems durch Auswertung der Euler–Lagrange Gleichungen an. | 3 P

Lösung zu Aufgabe 1:

a) $n = 2$ und $\boldsymbol{q} = [\varphi, s]^T$

b) Es gelten die folgenden Zusammenhänge (s für Stab, w für Würfel)

$$\boldsymbol{p}_0^{S,s} = \begin{bmatrix} L\sin(\varphi) \\ -L\cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_0^{S,w} = \begin{bmatrix} L\sin(\varphi) - s\cos(\varphi) \\ -L\cos(\varphi) - s\sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_0^{S,s} = \begin{bmatrix} L\dot{\varphi}\cos(\varphi) \\ L\dot{\varphi}\sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \dot{\boldsymbol{p}}_0^{S,w} = \begin{bmatrix} L\dot{\varphi}\cos(\varphi) - \dot{s}\cos(\varphi) + s\dot{\varphi}\sin(\varphi) \\ L\dot{\varphi}\sin(\varphi) - \dot{s}\sin(\varphi) - s\dot{\varphi}\cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

c) Die kinetische Energie ergibt sich zu

$$W_{\text{kin}} = \left(\frac{2}{3}ML^2 + \frac{1}{2}mL^2 + \frac{1}{2}I_{S,w}\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\left(s^2\dot{\varphi}^2 + \dot{s}^2 - 2L\dot{s}\dot{\varphi}\right).$$

d) Für die potenzielle Energie gilt

$$W_{\text{pot}} = -MgL\cos(\varphi) - mg(L\cos(\varphi) + s\sin(\varphi)) + \frac{1}{2}cs^2.$$

Die Rayleighsche Dissipationsfunktion ergibt sich zu

$$R = \frac{1}{2}d\varphi^2.$$

e) Zur Berechnung der Manipulator Jacobi–Matrix $J_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{q})$ wird der Ortsvektor zum Kraftangriffspunkt ermittelt, d.h.

$$\boldsymbol{p}_0^f = \begin{bmatrix} L(\sin(\varphi) - \cos(\varphi)) \\ -L(\sin(\varphi) + \cos(\varphi)) \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

womit sich

$$J_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} L(\sin(\varphi) + \cos(\varphi)) & 0 \\ L(\sin(\varphi) - \cos(\varphi)) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ergibt. Dies führt mit $\boldsymbol{f} = [f, 0, 0]^T$ auf

$$\boldsymbol{Q}_f = (J_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{q}))^T \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} fL(\sin(\varphi) + \cos(\varphi)) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

f) Die Bewegungsgleichungen folgen aus der Auswertung der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art zu

$$\begin{aligned} &\left(I_{S,w} + m(L^2 + s^2) + \frac{4L^2M}{3}\right)\ddot{\varphi} - mL\ddot{s} + gL(m + M)\sin(\varphi) + ms(2\dot{s}\dot{\varphi} - g\cos(\varphi)) \\ &\qquad = fL(\sin(\varphi) + \cos(\varphi)) \\ &cs - gm\sin(\varphi) - Lm\ddot{\varphi} + m\ddot{s} - ms\dot{\varphi}^2 = 0. \end{aligned}$$

Gefragt wurde nach einer der beiden Differenzialgleichungen.

Aufgabe 2. Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst

a) Es wird die in Abbildung 2 dargestellte kombinierte translatorische und rotatorische Bewegung mit den drei Koordinatensystemen $(0_0 x_0 y_0 z_0)$, $(0_1 x_1 y_1 z_1)$ und $(0_2 x_2 y_2 z_2)$ betrachtet. Geben Sie die zugehörigen homogenen Transformationen H_0^1, H_1^2 und H_0^2 an. | 3 P

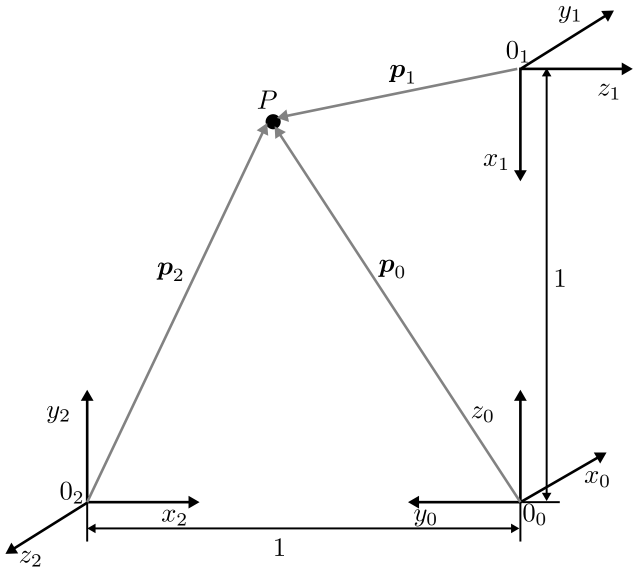

Abb. 2: Kombiniert translatorische und rotatorische Bewegung.

b) Abbildung 3 zeigt eine dünne, homogene Scheibe, die in den Punkten A und B drehbar gelagert ist und durch ein Moment τ angetrieben wird. Der Einfluss des zur Lagerung genutzten Stabes auf die Bewegung wird vernachlässigt.

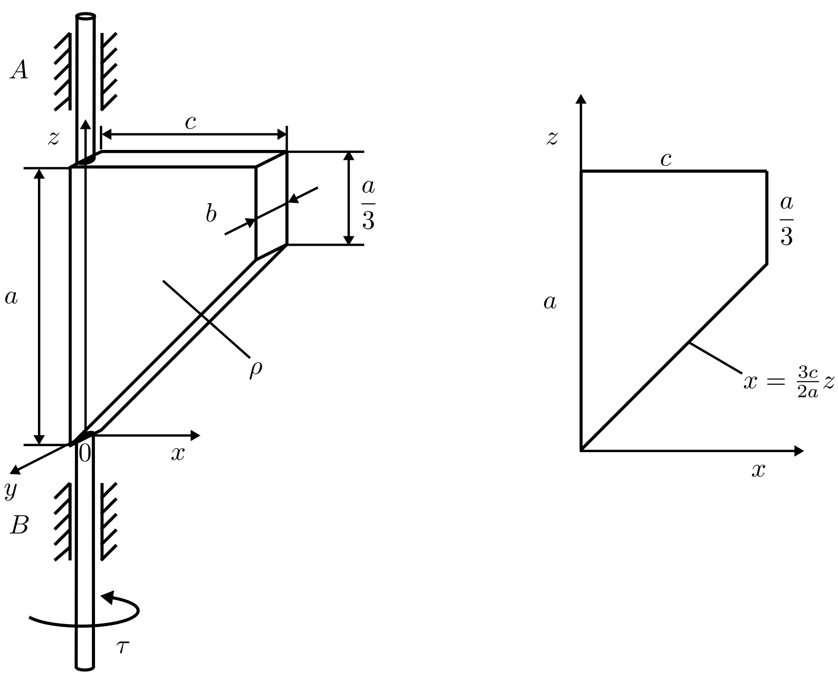

Abb. 3: Rotierende Scheibe.

Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen soll der Momentensatz bzw. Drehimpulssatz genutzt werden. Nutzen Sie hierzu ein **mitbewegtes** rotierendes Koordinatensystem $(0xyz)$, dessen Ursprung mit dem unteren Ende der Scheibe zusammenfällt (vgl. Abbildung 3, rechts).

(i) Ermitteln Sie unter Zuhilfenahme des dargestellten Koordinatensystems **nur** die zur Bestimmung der Bewegungsgleichung(en) mittels des Momentensatzes notwendigen Massenträgheits– und Deviationsmomente. | 3 P

(ii) Geben Sie die Bewegungsgleichung(en) der rotierenden Scheibe unter Verwendung des Momentensatzes an. | 1 P

(iii) Wie könnten die an den Punkten A und B wirkenden Lagerkräfte f_x^A, f_y^A bzw. f_x^B, f_y^B in x– und y–Richtung bestimmt werden? Eine Ermittlung der Werte ist nicht gefragt. | 1 P

c) Betrachtet wird der in Abbildung 4 dargestellte Quader, dessen Dichte durch die Gleichung

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

gegeben ist.

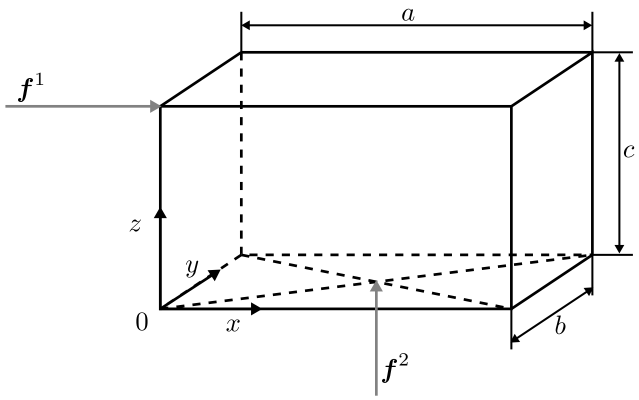

Abb. 4: Zur Bestimmung des Schwerpunkts.

(i) Bestimmten Sie den Ortsvektor $\boldsymbol{p}_0^S$ zum Schwerpunkt des Quaders. Für die Masse des Quaders gilt $m = 3\rho_0 abc/2$. | 2 P

(ii) Auf den Quader wirken die beiden Kräfte $\boldsymbol{f}^1$ und $\boldsymbol{f}^2$. Ermitteln Sie die Kraft $\boldsymbol{f}^A$ und eine Gleichung zur Bestimmung des Ortsvektors $\boldsymbol{p}_0^A$ zum Kraftangriffspunkt A, um das System im Gleichgewicht zu halten. | 2 P

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Es gelten die folgenden Beziehungen

$$\boldsymbol{d}_0^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad R_0^1 = R_{y,\frac{\pi}{2}} R_{x,\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad R_1^2 = R_{x,\frac{\pi}{2}} R_{z,\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und damit

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_0^2 = H_0^1 H_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Es ergeben sich die folgenden Teilergebnisse:

(i) Für das Massenträgheitsmoment I_{zz} gilt

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \rho \int_0^{\frac{2a}{3}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^{\frac{3c}{2a}z} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z + \rho \int_{\frac{2a}{3}}^{a} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^{c} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \\ &= \rho \frac{abc}{36} \left(2c^2 + b^2\right) + \rho \frac{abc}{36} \left(b^2 + 4c^2\right) = \rho \frac{abc}{18} \left(3c^2 + b^2\right). \end{aligned}$$

Die Bestimmung weiterer Komponenten des Trägheitstensors ist zur Ermittlung der Bewegungsgleichung(en) nicht notwendig.

(ii) Mit dem Momentensatz gilt

$$I_{zz} \dot{\omega}_z = \tau .$$

(iii) Auswertung der Kräftbilanz in $x-$ und y–Richtung kombiniert mit den nicht berücksichtigten Anteilen des Momentensatzes, d.h. $I_{xz}\dot{\omega}_z = \dots$ und $I_{yz}\dot{\omega}_z = \dots$.

c) Es ergeben sich die folgenden Teilergebnisse:

(i) Für den Vektor zum Schwerpunkt gilt unter Berücksichtigung der angegebenen Masse

$$\boldsymbol{p}_0^S = \rho_0 \begin{bmatrix} \frac{5a}{9} \\ \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} \end{bmatrix}.$$

(ii) Um das System im Gleichgewicht zu halten müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}^A &= -\left(\boldsymbol{f}^1 + \boldsymbol{f}^2\right) \\ \boldsymbol{0} &= \boldsymbol{p}_0^{A,f_1} \times \boldsymbol{f}^1 + \boldsymbol{p}_0^{A,f_2} \times \boldsymbol{f}^2 \end{aligned}$$

mit

$$\boldsymbol{p}_0^{f,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_0^{f,2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a \\ c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_0^{A,f_1} = \boldsymbol{p}_0^{f,1} - \boldsymbol{p}_0^A, \quad \boldsymbol{p}_0^{A,f_2} = \boldsymbol{p}_0^{f,2} - \boldsymbol{p}_0^A.$$

Aufgabe 3. Eine Klimakammer soll durch eine Kälteanlage auf der Temperatur $T_l < 0\,°\mathrm{C}$ gehalten werden. In die Kammer sollen N dünne Kunststoffplättchen (Dicke δ, Breite b, Höhe h) eingebracht und in einer Zeit τ von einer Anfangstemperatur T_0 auf eine mittlere Temperatur T_τ mit $T_l < T_\tau < T_0$ abgekühlt werden (siehe Abbildung 5).

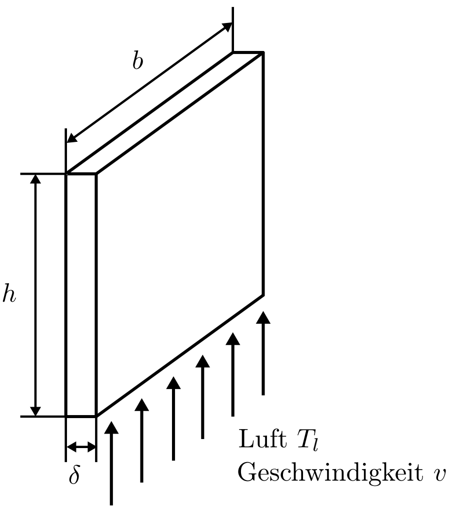

Abb. 5: Zum Abkühlvorgang in einer Kältekammer.

Es gelten die folgenden Annahmen:

- In jedem Plättchen herrscht zu jedem Zeitpunkt eine einheitliche Temperatur.
- Die Wärmeübertragung durch die Stirnflächen der Plättchen wird vernachlässigt.

Für die Materialparameter gilt:

(i) Kunststoff: Dichte ρ, spezifische Wärmekapazität c_p

(ii) Luft: Wärmeleitfähigkeit λ_l, kinematische Viskosität ν_{kin}, Prandtl–Zahl $\mathrm{Pr} \in [0.7, 1.0]$

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

a) Bestimmen Sie die Differenzialgleichung zur Beschreibung der zeitlichen Änderung der Temperatur $T(t)$ der Plättchen und lösen Sie diese. Gehen Sie dabei von einem mittleren Wärmeübergangskoeffizienten $\bar{\alpha}$ zwischen Plättchen und der umgebenden Luft aus. Skizzieren Sie qualitativ die Temperaturentwicklung in den Plättchen über der Zeit. | 6 P

b) Ermitteln Sie allgemein den Wert von $\bar{\alpha}$ der notwendig ist, um die Plättchen in der vorgegebenen Zeit von T_0 auf T_τ abzukühlen. | 1 P

Für die **weiteren** Auswertungen wird $\bar{\alpha}$ als bekannt angenommen. Zudem wird angenommen, dass die Plättchen mit Luft der Temperatur T_l und einheitlicher Geschwindigkeit v angeblasen werden.

c) Skizzieren Sie das Geschwindigkeits– und das Temperaturprofil an der unteren Kante, der Mitte und in der Nähe des oberen Endes der Plattenoberfläche. | 3 P

d) Ermitteln Sie die Strömungsgeschwindigkeit v der Luft, die zur Erreichung des geforderten mittleren Wärmeübergangskoeffizienten $\bar{\alpha}$ notwendig ist. Gehen Sie davon aus, dass Randeffekte keine Rolle spielen und dass laminare Strömung vorliegt. Was ist nach Abschluss der Rechnung zu kontrollieren? | 3 P

e) Die Kälteanlage soll durch eine geeignete Regelung in der Lage sein, die Lufttemperatur in der Klimakammer konstant auf T_l zu halten. Dazu ist es notwendig, den durch die Wände eindringenden und den durch die Plättchen abgegebenen Wärmestrom abzuführen.

(i) Bestimmen Sie den Wärmestrom durch die Wände der Klimakammer, wenn die Außentemperatur T_u beträgt. Gehen Sie von einer mittleren (effektiven) Oberfläche A_w der Klimakammer (Wände, Boden, Decke), einer Wanddicke von d_w und einer Wärmeleitfähigkeit des Wandmaterials von λ_w aus. Die Wärmeübergangskoeffizienten innen und außen sind $\alpha_{w,i}$ und $\alpha_{w,a}$. | 1 P

(ii) Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an dem die erforderliche Kälteleistung maximal ist und bestimmen Sie die maximale Leistung explizit. | 2 P

Hinweis Für eine längsangeströmte ebene Platte (von Vorderkante an beheizt oder gekühlt) gelten die folgenden Korrelationen:

$\mathrm{Nu}_x = \frac{1}{\pi}\sqrt{\mathrm{Re}_x \mathrm{Pr}},$	$\mathrm{Pr} \to \infty,$ laminar
$\mathrm{Nu}_x = 0.332\sqrt{\mathrm{Re}_x}\sqrt[3]{\mathrm{Pr}},$	$0.5 \le \mathrm{Pr} \le 1000$ $\mathrm{Re}_x \le 5 \times 10^5$
$\mathrm{Nu}_x = 0.339\sqrt{\mathrm{Re}_x}\sqrt[3]{\mathrm{Pr}},$	$\mathrm{Pr} \to \infty$ $\mathrm{Re}_x \le 5 \times 10^5$
$\overline{\mathrm{Nu}} = 0.664\sqrt{\mathrm{Re}_x}\sqrt[3]{\mathrm{Pr}},$	$0.5 \le \mathrm{Pr} \le 1000$ $\mathrm{Re}_x \le 5 \times 10^5$
$\overline{\mathrm{Nu}} = \frac{0.037\mathrm{Re}_x^{0.8}\mathrm{Pr}}{1 + 2.443\mathrm{Re}_x^{-0.1}(\mathrm{Pr}^{\frac{2}{3}} - 1)},$	$0.6 \le \mathrm{Pr} \le 2000$ $5 \times 10^5 < \mathrm{Re}_x < 10^7$

Lösung zu Aufgabe 3:

a) Mit dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik folgt

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\dot{Q},$$

wobei

$$\mathrm{d}U = mc_p\mathrm{d}T = \rho bh\delta c_p\mathrm{d}T, \quad \dot{Q} = \bar{\alpha}A(T(t) - T_l)$$

für $A = 2bh$. Dies führt wegen $T_l = \text{konst.}$ auf

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(T(t) - T_l)}{\mathrm{d}t} = -\frac{2\bar{\alpha}}{\rho\delta c_p}(T(t) - T_l), \quad T(0) = T_0$$

bzw.

$$T(t) = T_l + (T_0 - T_l)\exp\left(-\frac{2\bar{\alpha}}{\rho\delta c_p}t\right). \tag{2}$$

Eine qualitative Darstellung zeigt Abbildung 6.

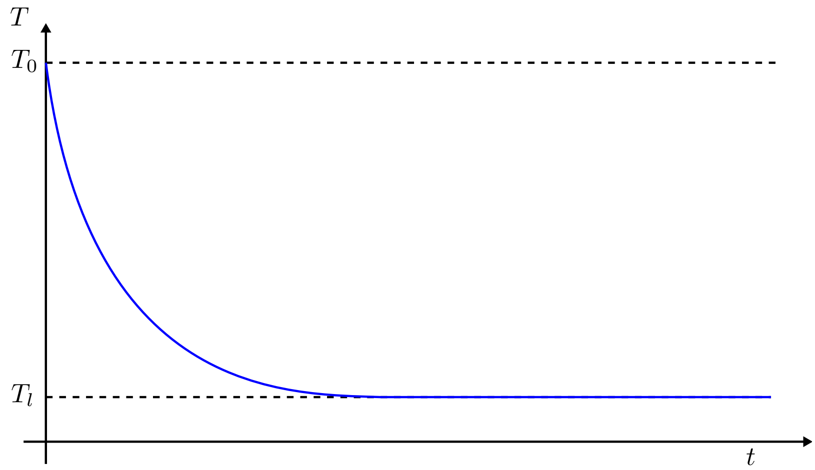

Abb. 6: Qualitative Darstellung des Temperaturverlaufs.

b) Mit (2) folgt

$$\bar{\alpha} = \frac{\rho\delta c_p}{2\tau}\ln\left(\frac{T_0 - T_l}{T(\tau) - T_l}\right).$$

c) Siehe Skript (Version WS 14/15), Abbildung 4.9.

d) Für eine laminare Strömung ($\mathrm{Pr} \in [0.7, 1.0]$ gemäß Angabe) gilt

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0.664\sqrt{\mathrm{Re}_x}\sqrt[3]{\mathrm{Pr}}$$

mit $\mathrm{Re}_x = vh/\nu_{\mathrm{kin}}$ und $\overline{\mathrm{Nu}} = \bar{\alpha}h/\lambda_l$. Auflösen nach v ergibt

$$v = \frac{\nu_{\mathrm{kin}}}{h(\mathrm{Pr})^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{\bar{\alpha}h}{0.664\lambda_l}\right)^2.$$

Es ist zu überprüfen, ob tatsächlich eine laminare Strömung vorliegt durch Einsetzen des ermittelten Wertes der Strömungsgeschwindigkeit in die Definition von Re_x und Überprüfung der Bedingung $\mathrm{Re}_x < 5 \times 10^5$.

e) Die beiden Teile können wie folgt gelöst werden:

(i) Es gilt

$$\dot{Q}_w = \frac{A_w}{R_w}(T_u - T_l), \quad R_w = \frac{1}{\alpha_{w,i}} + \frac{\delta}{\lambda_w} + \frac{1}{\alpha_{w,a}}.$$

(ii) Der von den N Plättchen abgegebene Wärmestrom ergibt sich zu

$$\dot{Q}_p(t) = 2bhN\bar{\alpha}(T(t) - T_l)$$

und ist wegen $T(t) \in [T_l, T_0]$ (vgl. Aufgabenteil a)) für $t = 0$ maximal. Damit ergibt sich die maximale Kälteleistung zu

$$\dot{Q}_{\max} = \dot{Q}_p(0) + \dot{Q}_w = 2bhN\bar{\alpha}(T_0 - T_l) + \frac{A_w}{R_w}(T_u - T_l).$$