

Deckblatt zu einer Klausur am Institut für Elektrotechnik und Informationstechnik

Modulprüfung	
Modulname	Mathematische Modellierung
Datum	02.04.2015
Prüfpersonen	
1. Prüfperson	Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Meurer
ggf. 2. Prüfperson	
Kandidat/in	
Matrikelnummer	
Name, Vorname	

Erklärung der/des Kandidatin/Kandidaten vor Beginn der Prüfung
<p>Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.</p> <p>Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.</p> <p style="text-align: right;">Unterschrift: _____</p>

Korrektur										
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Punkte										
Summe der Punkte: _____						Note: _____				

Einsicht / Rückgabe
<p>Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Note einverstanden bin. Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.</p> <p>Kiel, den _____ Unterschrift: _____</p>

Bitte beachten Sie:

- Diese Klausur enthält 3 Aufgaben auf den Seiten 3-8.
- Dauer der Klausur: 120 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: **6 Seiten A4 einseitig bzw. 3 Blätter A4 doppelseitig handschriftlich beschrieben**. Elektronische Hilfsmittel, das Vorlesungsskript oder andere Literatur sind **nicht** zugelassen.
- Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf alle Blätter, die Sie abgeben.
- Legen Sie bitte Ihren Studierenden- und Ihren Personalausweis bereit.
- Geben Sie dieses Deckblatt und die Klausuraufgaben mit Ihrer Klausur ab.

Aufgabe 1. Eine Stange BC der Masse $2m$ und Länge $2L$ wird mittels zweier Stangen AB und CD (beide homogen, jeweils der Masse m und Länge $2L$) entsprechend Abbildung 1 geführt. Die Stäbe AB und BC sind durch eine Drehfeder (Federsteifigkeit c , entspannt für $\varphi = 0$) verbunden. Im Mittelpunkt E der Stange BC ist ein Pendel (Masse m , Länge $2l$) drehbar gelagert. Am Lagerpunkt D wirkt das externe Moment τ . Reibungseinflüsse werden, wenn nichts anderes angegeben ist, vernachlässigt.

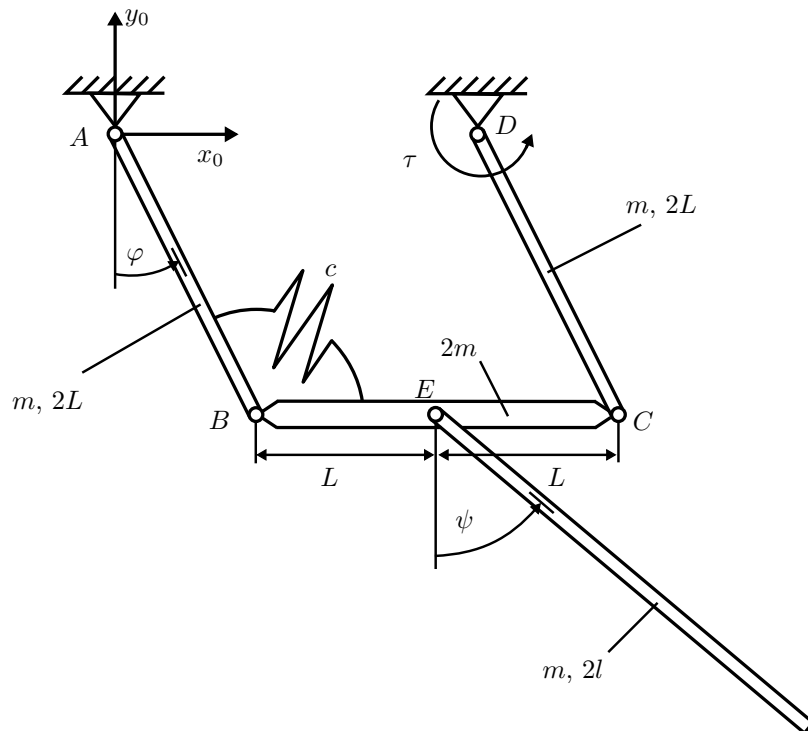


Abb. 1: Konfiguration des Mehrmassenschwingers.

Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben:

- Bestimmen Sie die Anzahl n der Freiheitsgrade des dargestellten Systems und legen Sie geeignete generalisierte Koordination q_j , $j = 1, \dots, n$ fest. | 0.5 P
- Bestimmen Sie die Orts- und Geschwindigkeitsvektoren der Schwerpunkte des Stabes BC und des Pendels. | 1.5 P
- Geben Sie die kinetische Energie des Systems in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten und deren zeitlichen Ableitungen an. Es gilt $\cos(\varphi) \cos(\psi) + \sin(\varphi) \sin(\psi) = \cos(\varphi - \psi)$. | 5 P
- Ermitteln Sie die potenzielle Energie des Systems in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten. | 2.5 P
- Bestimmen Sie den Vektor der generalisierten Momente \mathbf{Q}_τ . | 1 P
- Gegen Sie allgemein die Bewegungsgleichungen des Systems in Form der Euler-Lagrange Gleichungen an. | 3.5 P
- Wie sind die Euler-Lagrange Gleichungen zu modifizieren, wenn im Gelenk C eine geschwindigkeitsproportionale Reibung mit Reibfaktor k auftritt? | 1 P

Beachten Sie, dass hier keine nochmalige Angabe der Bewegungsgleichungen erforderlich ist, sondern nur allgemein eine Angabe der ggf. auftretende Modifikationen in den Gleichungen.

Lösung zu Aufgabe 1:

a) $n = 2$ und $\mathbf{q} = [\varphi, \psi]^T$

b) Es gelten die folgenden Zusammenhänge

$$\mathbf{p}_0^{S,BC} = \begin{bmatrix} L + 2L \sin(\varphi) \\ -2L \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_0^{S,Pendel} = \mathbf{p}_0^{S,BC} + \begin{bmatrix} l \sin(\psi) \\ -l \cos(\psi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_0^{S,BC} = \begin{bmatrix} 2L\dot{\varphi} \cos(\varphi) \\ 2L\dot{\varphi} \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{p}}_0^{S,Pendel} = \dot{\mathbf{p}}_0^{S,BC} + \begin{bmatrix} l\dot{\psi} \cos(\psi) \\ l\dot{\psi} \sin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Mit $I_A^{AB} = \frac{1}{12}m(2L)^2 + mL^2 = \frac{4}{3}mL^2$ und $I_E^{Pendel} = \frac{1}{12}m(2l)^2 = \frac{1}{3}ml^2$ folgt

$$W_{\text{kin}} = I_A^{AB}(\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}I_E^{Pendel}(\dot{\psi})^2 + 4mL^2(\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}[4L^2(\dot{\varphi})^2 + l^2(\dot{\psi})^2 + 4Ll\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos(\varphi - \psi)]$$

d) Es gilt

$$W_{\text{pot}} = -8mgL \cos(\varphi) - mgl \cos(\psi) + \frac{1}{2}c\varphi^2$$

e) Mit der Manipulator Jacobi-Matrix

$$J_{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

und $\boldsymbol{\tau} = [0, 0, \tau]^T$ folgt

$$\mathbf{Q}_{\tau}^{nc} = (J_{\omega})^T \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

f) Mit der Lagrange-Funktion $L = W_{\text{kin}} - W_{\text{pot}}$ folgt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L - \frac{\partial}{\partial q_j} L = Q_j^{nc}, \quad j = 1, 2 \quad q_1 = \varphi, \quad q_2 = \psi$$

bzw. nach Zwischenrechnung die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} [2I_A^{AB} + 12mL^2] \ddot{\varphi} + [2mlL \cos(\varphi - \psi)] \ddot{\psi} + 2mlL(\dot{\psi})^2 \sin(\varphi - \psi) + 8mgL \sin(\varphi) + c\varphi &= \tau \\ [2mlL \cos(\varphi - \psi)] \ddot{\varphi} + [I_E^{Pendel} + ml^2] \ddot{\psi} - 2mlL(\dot{\varphi})^2 \sin(\varphi - \psi) + mgl \sin(\psi) &= 0 \end{aligned}$$

g) Ergänzung um Rayleighsche Dissipationsfunktion $R = \frac{1}{2}k(\dot{\varphi})^2$ führt auf

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L - \frac{\partial}{\partial q_j} L + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} R = Q_j^{nc}, \quad j = 1, 2 \quad q_1 = \varphi, \quad q_2 = \psi$$

$$\text{mit } \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} R = k\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} R = 0$$

Aufgabe 2. Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

- a) Bestimmen Sie für die Pyramide aus Abbildung 2 den Vektor \mathbf{p}_0^S zum Schwerpunkt S . Gehen Sie dabei von einer konstanten Dichte ρ aus. | 3 P

Beachten Sie, dass sich das Volumen der Pyramide beispielsweise aus

$$V = \int_0^h \int_{-f(z_0)}^{f(z_0)} \int_{-f(z_0)}^{f(z_0)} 1 dx_0 dy_0 dz_0 = 4 \int_0^h (f(z_0))^2 dz_0$$

mit $f(z_0) = \frac{a(h-z_0)}{2h}$ ermitteln lässt.

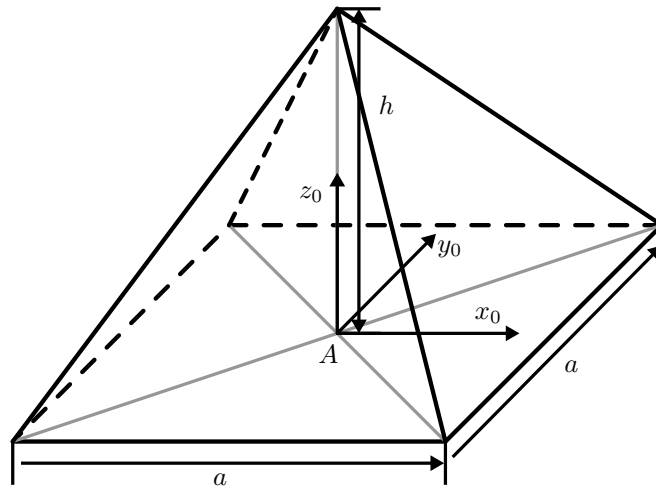


Abb. 2: Zur Bestimmung des Schwerpunkts.

- b) Durch was zeichnet sich ein Hauptachsensystem aus und wie kann dieses für einen allgemeinen Trägheitstensor I_A ermittelt werden? | 1 P
- c) Zwei Koordinatensysteme $(0_0x_0y_0z_0)$ und $(0_1x_1y_1z_1)$ sind durch die homogene Transformation

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} & \cos(\alpha) & -\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{2}} & -1 \\ -\frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{2}} & \sin(\alpha) & \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mit $\alpha = \alpha(t)$ miteinander verknüpft.

- (i) Bestimmen Sie den Vektor der Drehwinkelgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\omega}_0^1(t)$. Treffen Sie eine Aussage über die Art der rotatorischen Bewegung von $(0_1x_1y_1z_1)$ bezüglich $(0_0x_0y_0z_0)$ und begründen Sie, ob rein aus der Kenntnis von $\boldsymbol{\omega}_0^1(t)$ die Rotationen zwischen den Koordinatensystemen eindeutig bestimmt werden können. | 2.5 P
- (ii) Bezeichne $\mathbf{v}_1(t)$ den Geschwindigkeitsvektor eines Massepunkts mit Ortsvektor $\mathbf{p}_1(t)$ bezüglich $(0_1x_1y_1z_1)$. Geben Sie den Geschwindigkeitsvektor dieses Massepunkts bezüglich $(0_0x_0y_0z_0)$ zunächst allgemein und dann für den Spezialfall $\mathbf{v}_1(t) = [1, 0, 0]^T$ an. | 2.5 P

- d) Abbildung 3 zeigt schematisch einen Ventilator, bei dem das Gehäuse eine Schwenkbewegung um die vertikale z_0 -Achse mit Winkel $\alpha(t)$ ausführt. Der Rotor wird durch einen (nicht weiter berücksichtigten) Motor angetrieben, so dass die Winkelgeschwindigkeit der Rotorblätter $\dot{\beta} = \text{konstant}$ beträgt.

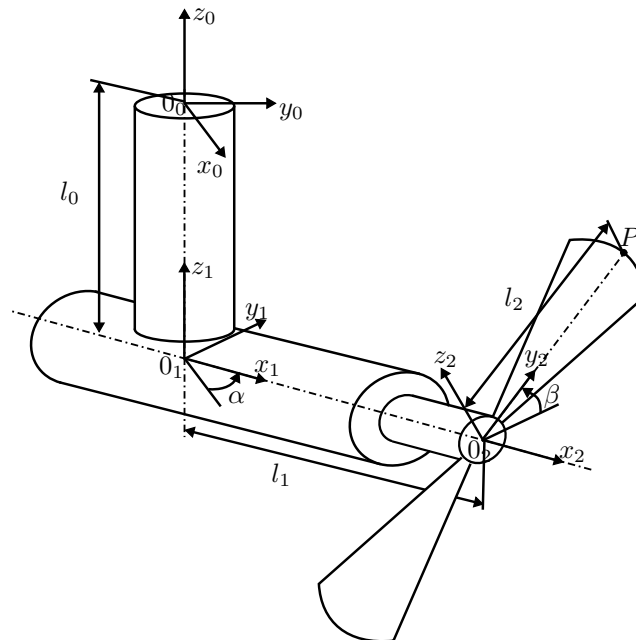


Abb. 3: Konfiguration des Ventilators.

- (i) Geben Sie die Drehmatrizen R_0^1 und R_1^2 an. | 0.5 P
- (ii) Mit welcher Winkelgeschwindigkeit rotieren die Rotorblätter bezüglich des lagerfesten Koordinatensystems $(0_1 x_1 y_1 z_1)$? Geben Sie den Vektor der Winkelgeschwindigkeiten im Inertialsystem $(0_0 x_0 y_0 z_0)$ an. | 0.75 P
- (iii) Berechnen Sie den Positionsvektor von Punkt P in den Koordinatensystemen $(0_1 x_1 y_1 z_1)$ und $(0_0 x_0 y_0 z_0)$. | 1.75 P

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Mit

$$m = \rho V = \frac{\rho a^2 h}{3}$$

folgt

$$\mathbf{p}_{[0]}^S = \frac{\rho \int_0^h \int_{-f(z_0)}^{f(z_0)} \int_{-f(z_0)}^{f(z_0)} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} dx_0 dy_0 dz_0}{m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{h}{4} \end{bmatrix}$$

b) Die Trägheitsmatrix liegt in Diagonalform vor. Im allgemeinen Fall kann die Diagonalform dadurch erzielt werden, dass das Koordinatensystem (im Körperschwerpunkt) aus den Eigenvektoren der Trägheitsmatrix aufgebaut wird.

c) Es gilt für die homogene Transformation

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} R_0^1 & \mathbf{d}_0^1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Damit folgen

- (i) $\boldsymbol{\omega}_0^1 = [\dot{\alpha}, 0, 0]^T$ aus $S(\boldsymbol{\omega}_0^1) = \dot{R}_0^1 (R_0^1)^T$ und die Schlussfolgerung, dass mindestens eine Rotation um die x -Achse mit Winkel $\alpha(t)$ stattfindet, jedoch darüber hinaus weitere Rotationen mit jeweils konstanten Winkeln um die y - und z -Achse vorliegen können. Diese sind jedoch nicht (da konstant) in $\boldsymbol{\omega}_0^1$ sichtbar.
- (ii) Mit $\tilde{\mathbf{p}}_0 = H_0^1 \tilde{\mathbf{p}}_1$ folgt $\dot{\tilde{\mathbf{p}}}_0 = \dot{H}_0^1 \tilde{\mathbf{p}}_1 + H_0^1 \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_1$ bzw. mit $\mathbf{d}_0^1 = \mathbf{0}$ zudem $\mathbf{v}_0 = R_0^1 \mathbf{v}_1 + \dot{R}_0^1 \mathbf{p}_1$. Für den Spezialfall $\mathbf{v}_1 = [1, 0, 0]^T$ bzw. $\mathbf{p}_1 = [t, 0, 0]^T$ ergibt sich

$$\mathbf{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \sin(\alpha) + \dot{\alpha} t \cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) + \dot{\alpha} t \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

d) Es ergeben sich die folgenden Zusammenhänge

- (i) $R_0^1 = R_{z,\alpha}$, $R_1^2 = R_{x,\beta}$ (Matrizen siehe Skript)
- (ii) $\boldsymbol{\omega}_1^2 = [\dot{\beta}, 0, 0]^T$ und $\boldsymbol{\omega}_0^2 = \boldsymbol{\omega}_0^1 + R_0^1 \boldsymbol{\omega}_1^2 = [\dot{\beta} \cos(\alpha), \dot{\beta} \sin(\alpha), \dot{\alpha}]^T$
- (iii) $\mathbf{p}_1 = \mathbf{d}_1^2 + R_1^2 \mathbf{p}_2 = [l_1, l_2 \cos(\beta), l_2 \sin(\beta)]^T$, $\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 + R_0^1 \mathbf{p}_1 = [l_1 \cos(\alpha) - l_2 \cos(\beta) \sin(\alpha), l_1 \sin(\alpha) + l_2 \cos(\alpha) \cos(\beta), l_2 \sin(\beta) - l_0]^T$

Aufgabe 3. Der in Abbildung 4 (oben) dargestellte Weinkühler besteht aus zwei konzentrischen Plexiglaszylindern und einem Boden aus massiven Plexiglas. Der Raum zwischen den beiden Zylindern enthält Luft und ist durch einen kreisringförmigen Plexiglasdeckel verschlossen. Es gelten die folgenden Annahmen:

- Der Inhalt der Flasche ist stets ideal durchmischt.
- Das System Flasche/Kühler wird nur bis zur Füllhöhe $z = h$ betrachtet. In diesem Bereich kann die Flasche als zylindrisch angesehen werden (vergleiche Abbildung 4, unten).
- Die Flasche sei dünnwandig mit gegenüber der Getränkemasse vernachlässigbarer Masse. Das Glas soll dementsprechend nicht betrachtet werden.
- Die Luft zwischen der Flasche und der inneren Behälterwand sowie zwischen den beiden Hohlzylindern wird als ruhend angenommen.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich eine Flasche mit einem Getränk der Temperatur T_0 im Kühler. Die Umgebung einschließlich des Tisches besitzt die Temperatur $T_u = \text{konstant}$. Es gelten die folgenden Materialdaten:

- (i) Plexiglas: $\lambda_p = 0.184 \text{ W/(mK)}$
- (ii) Luft: $\lambda_l = 0.026 \text{ W/(mK)}$
- (iii) Getränk: $m = 0.5 \text{ kg}$, $c_p = 4000 \text{ J/(kgK)}$, $T_u = 300 \text{ K}$, $T_0 = 290 \text{ K}$

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

- a) Erklären Sie die Isolierwirkung des Weinkühlers | 2 P
 - (i) am oberen Ende und
 - (ii) am Umfang.
- b) Skizzieren Sie qualitativ den Temperaturverlauf in radialer Richtung im zylindrischen System Flasche/Kühler und in der außen angrenzenden Luft. Gehen Sie dabei von einem Zeitpunkt kurz nach Prozessbeginn $t = 0$ aus und berücksichtigen Sie die unterschiedlichen Wärmeleitkoeffizienten. | 2.5 P
- c) Geben Sie allgemein in Abhängigkeit von der radialen Koordinate r den Wärmedurchgangskoeffizient $k(r)$ und die Wärmestromdichte $\dot{q}(r)$ von der Umgebung zur Flasche an. | 2 P
- d) Die Flasche nimmt Wärme über den Boden, den Umfang und über die obere Stirnfläche auf. Die treibende Temperaturdifferenz ist dabei jeweils $T(t) - T_u$. Leiten Sie die Differenzialgleichung für die zeitliche Temperaturentwicklung $T(t)$ des Getränks unter den getroffenen Annahmen her. Gehen Sie dabei für die Stirnfläche und den Boden von einem Wärmedurchgangskoeffizient k_s bzw. k_b und einer effektiven Fläche A_s bzw. A_b aus. | 3 P
- e) Lösen Sie die ermittelte Differenzialgleichung für $T(t)$ und geben Sie an, zu welchem Zeitpunkt t^* der Wein die Temperatur $T^* = T_u - \Delta T$ für $\Delta T = \text{konstant}$ erreicht hat. Beachten Sie die getroffenen Annahmen. Numerische Werte sind hierbei nicht einzusetzen. | 2.5 P
- f) Welche Modifikationen sind in den vorangegangenen Aufgabenteilen vorzunehmen, wenn die Luft zwischen der Flasche und der inneren Behälterwand nicht mehr als ruhend angesehen werden kann? Begründen Sie Ihre Antwort. | 1 P

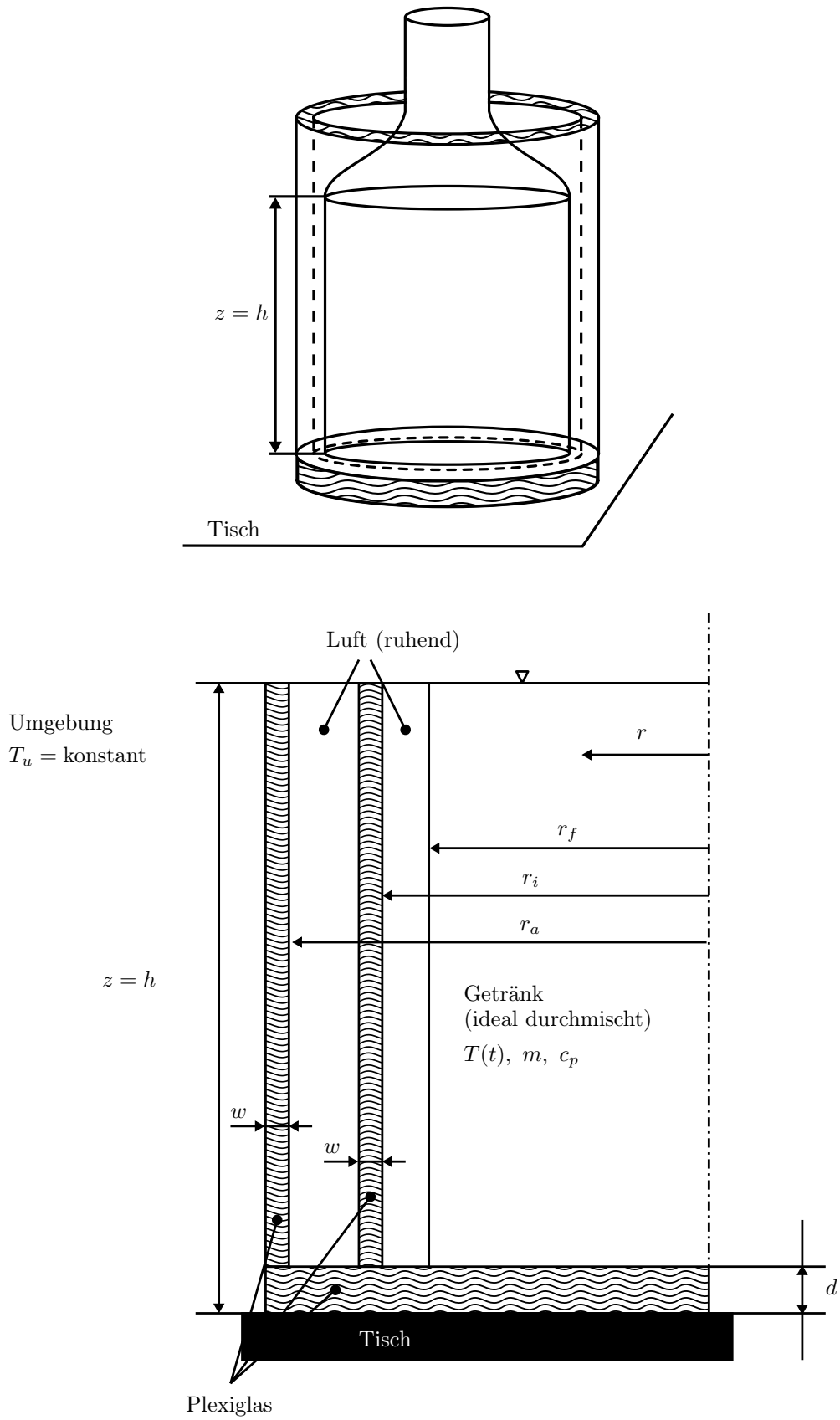


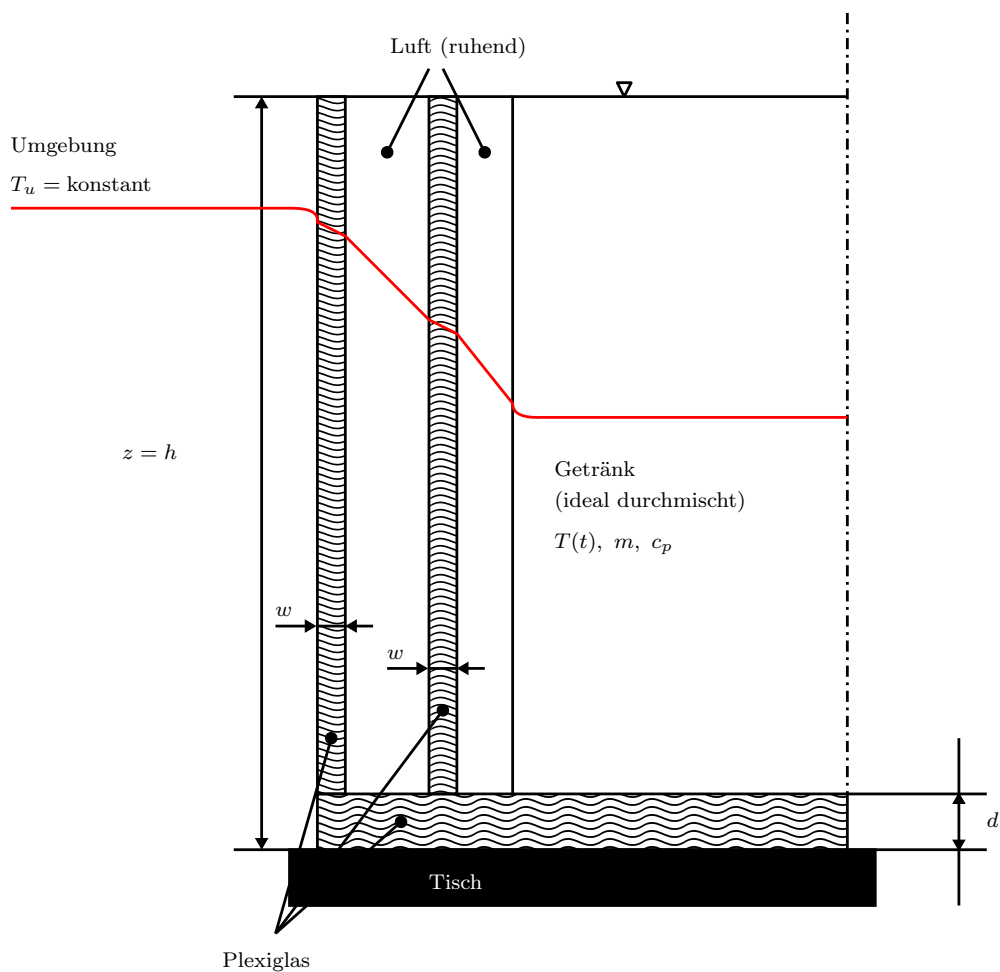
Abb. 4: Schematische Darstellung des Systems Flasche/Kühler.

Lösung zu Aufgabe 3:

a) Die Isolierwirkung ergibt sich wie folgt:

- (i) Es ergibt sich eine Luftschichtung aufgrund des vertikalen Temperaturunterschieds der Luft im Plexiglas (höhere Dichte unten als oben). Da die Luft eine geringere Wärmeleitfähigkeit besitzt, stellt die an die Flasche angrenzende Luftschicht einen Isolator dar.
- (ii) Die von außen zugeführte Wärme hat mehrere Widerstände zu überwinden, d.h. den Wärmeübergangswiderstand außen, zweimal den Wärmeleitwiderstand der Plexiglaswände und zweimal den Wärmeleitwiderstand der Luftschichten.

b) Siehe Abbildung



c) Es gilt $\dot{q}(r) = k(r)(T(t) - T_u)$ mit

$$k(r) = \frac{1}{r \frac{1}{r_f \alpha_0} + \frac{1}{\lambda_l} \ln \frac{r_i}{r_f} + \frac{1}{\lambda_p} \ln \frac{r_i+w}{r_i} + \frac{1}{\lambda_l} \ln \frac{r_a}{r_i+w} + \frac{1}{\lambda_p} \ln \frac{r_a+w}{r_a} + \frac{1}{(r_a+w)\alpha_u}},$$

wobei $\alpha_0 = 0$, da die Luft als ruhend angenommen wird

d) Mit dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik folgt

$$\frac{dU}{dt} = \dot{Q}_{Stirn} + \dot{Q}_{Umfang} + \dot{Q}_{Boden}$$

bzw.

$$m c_p \frac{dT(t)}{dt} = \underbrace{(k_{Stirn} A_{Stirn} + k_{Umfang} A_{Umfang} + k_{Boden} A_{Boden})}_{= kA} (T_u - T(t))$$

e) Mit $T_u = \text{konst.}$ folgt

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(T(t) - T_u) = -kA(T(t) - T_u)$$

bzw.

$$T(t) = T_u + e^{-\frac{kA}{m c_p} t} (T_0 - T_u).$$

Dies liefert $t^* = -\frac{m c_p}{kA} \ln \frac{\Delta T}{T_u - T_0}$.

f) Der konvektive Wärmeübergang ist zu berücksichtigen.