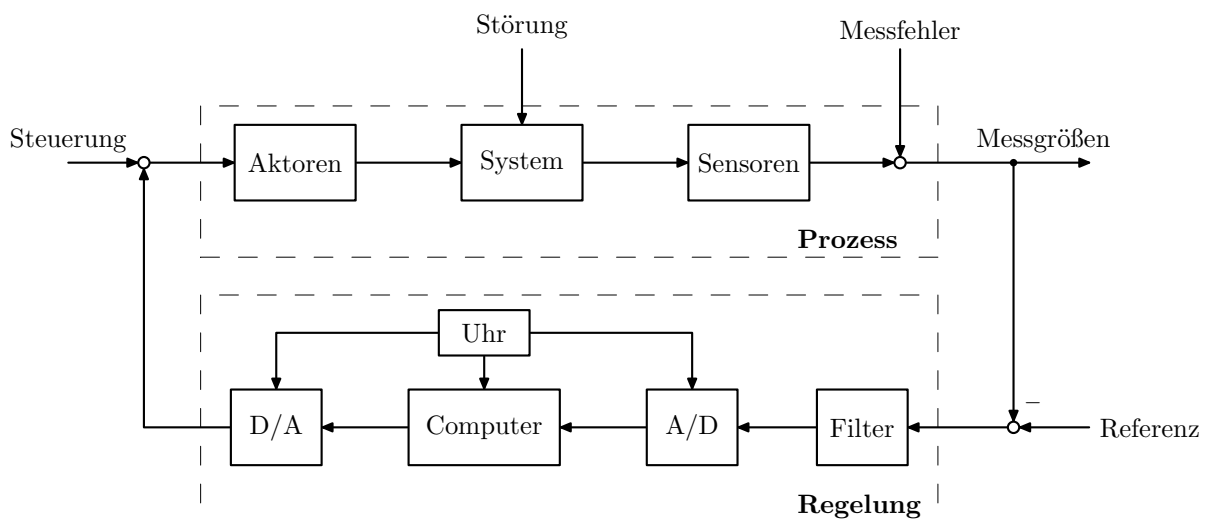


## 1.1 Problemstellung

Technische Prozesse und Anlagen sind äußeren Einwirkungen ausgesetzt, die zu Störungen des gewünschten Prozess- bzw. Anlagenverhalten führen können. Beispiele umfassen Laständerungen eines Motors oder Generators, Ausfälle von Komponenten in elektrischen Übertragungsnetzen, Wind- bzw. Wettereinflüsse auf Kraftfahrzeuge oder Flugzeuge, fahrdynamische Grenzsituationen, Variabilitäten in den Ausgangsstoffen von Produktionsanlagen, Temperaturschwankungen in chemischen Reaktoren, oder auch Zulaufänderungen in Destillationskolonnen. Die Aufgabe der *Regelungstechnik* besteht nun darin, einen zeitlich veränderlichen Prozess so zu beeinflussen, dass dieser in einer gewünschten Weise abläuft. Hierzu ist es notwendig bestimmte Prozessgrößen zu messen, um eine Quantifizierung der Differenz zwischen dem gewünschten und dem aktuellen Verhalten zu erhalten. Diese Differenz wird letztendlich in geeigneter Art und Weise dem System über extern beeinflussbare Größen zugeführt, woraus ein *Regelkreis* entsteht. Dies ist schematisch in Abbildung 1.1 dargestellt. Dabei werden zudem oftmals Nebenbedingungen in Form von Optimalitätskriterien formuliert, wie beispielsweise der Erreichung des vorgegebenen Prozessverlaufs unter gleichzeitiger Minimierung der eingesetzten Energie und Ressourcen oder innerhalb eines minimalen Zeitintervalls.



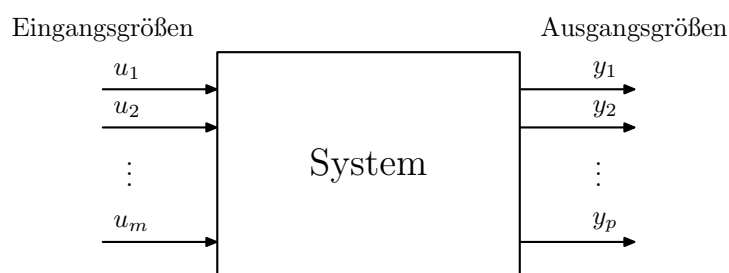
**Abb. 1.1.:** Schematische Darstellung der Komponenten eines Regelkreises für einen gegebenen Prozess. Der gestrichelt dargestellte obere Teil stellt die Prozessdynamik dar, bestehend aus den Aktoren, dem eigentlichen System und den Sensoren. Zudem wirken Störungen auf das System und die Sensoren weisen Messfehler auf, z.B. in Form von Messrauschen. Die Regelung, durch die die Differenz von Mess- und Referenzwert verarbeitet wird, ist im unteren Teil zusammengefasst und besteht aus Filtern, Analog/Digital (A/D) und Digital/Analog (D/A) Wandlern sowie der rechnergestützten Implementierung des Regelalgorithmus. Die Systemuhr dient der Synchronisation der Komponenten. Zudem kann mittels eines Steuerungssignals das transiente Verhalten gezielt beeinflusst werden.

Neben den vielfältigen ingenieurwissenschaftlichen Aufgabenstellungen sind regelungstechnische und verwandte Problemstellungen heutzutage auch in vielen naturwissenschaftlichen und nicht-technischen Gebieten anzutreffen. Beispiele umfassen wirtschaftliche Prozesse und Systeme, Regelung und Überwachung von Verkehrsströmen, soziale Netzwerke, biologische Prozesse und deren technische Nutzung, sowie Anwendungen der Plasma- oder Quantenphysik in Tokamak-Reaktoren oder Quantencomputern.

Die Regelungstechnik basiert auf der mathematischen Modellierung physikalischer Systeme und nutzt die dabei ermittelte Systembeschreibung in Form algebraischer Gleichungssysteme und/oder gewöhnlicher sowie partieller Differenzialgleichungen zur Entwicklung geeigneter Strategien zur Lösung der jeweiligen regelungstechnischen Problemstellungen. Dabei bilden die Konzepte der Systemtheorie die systematische Grundlage zur Entwicklung mathematischer Modelle, die sowohl eine Quantifizierung der Qualität des resultierenden Modells als auch die Nachvollziehbarkeit des Modellierungsvorgangs ermöglichen. Die Zielsetzung der allgemeinen Systemtheorie besteht darin, *Systeme* aus unterschiedlichen Wissenschaftsgebieten mit einem einheitlichen methodischen Instrumentarium zu behandeln.

## 1.2 Systemkonzept

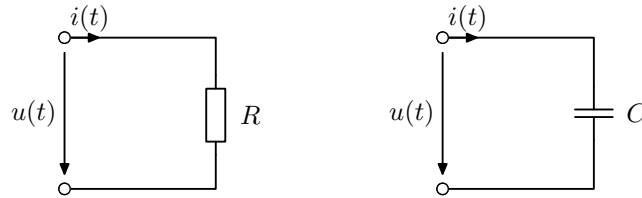
Der Begriff eines Systems wird in den verschiedensten wissenschaftlichen und nichtwissenschaftlichen Bereichen verwendet, wobei oftmals keine genaue Definition gegeben wird. Vereinfacht formuliert ist *ein System die Verbindung unterschiedlicher, miteinander in Interaktion stehender Komponenten, zu einem Ganzen zum Zwecke der Durchführung bestimmter Aufgaben*. Eine detaillierte, jedoch sinngemäß identische Definition ist beispielsweise in DIN 19226-1 (Regelungs- und Steuerungstechnik) angegeben.



**Abb. 1.2.:** Eingangs- und Ausgangsgrößen eines Systems.

Die Wechselwirkung des Systems mit der Systemumgebung erfolgt über die so genannten *Eingangs-* bzw. *Ausgangsgrößen* entsprechend Abbildung 1.2. Die Eingangsgrößen  $u_1, u_2, \dots, u_m$  sind dabei Größen, die von der Systemumgebung auf das System einwirken, jedoch unabhängig vom Systemverhalten, d.h. *rückwirkungsfrei*, sind. Man unterscheidet dabei zwischen Eingangsgrößen, mit denen das System gezielt (regelungstechnisch) beeinflusst werden kann (*Stellgrößen*) und Eingangsgrößen, die nicht unserer Kontrolle unterliegen (*Störgrößen*). Die Ausgangsgrößen  $y_1, y_2, \dots, y_p$  sind Größen, die vom System generiert werden und ihrerseits die Systemumgebung beeinflussen. Ausgangsgrößen, die messtechnisch erfassbar sind, nennt man *Messgrößen*. Systeme, die mit ihrer Umgebung in Wechselwirkung treten, d.h. deren Eingangs- und Ausgangsgrößen nicht verschwinden, werden als *offene Systeme* bezeichnet. Demgegenüber wechselwirken *geschlossene Systeme* nicht mit der Systemumgebung.

Zur weiteren Erläuterung werden die beiden einfachen elektrischen Systeme aus Abbildung 1.3 betrachtet. Hierbei stellt jeweils die Stromstärke  $i(t)$  die Eingangsgröße dar, während die Spannung  $u(t)$  als Ausgangsgröße vorliegt. Gemäß dem Ohmschen Gesetz ist im Fall des Widerstands die



**Abb. 1.3.:** Beispiele für statische und dynamische Systeme.

Ausgangsgröße zu jedem Zeitpunkt  $t$  eindeutig durch die Eingangsgröße zum selben Zeitpunkt bestimmt, da gilt

$$u(t) = Ri(t).$$

Systeme, deren Ausgangsgrößen lediglich vom Augenblickswert der Eingangsgrößen abhängen, werden als *statische Systeme* bezeichnet. Dem gegenüber bedingt die Berechnung der Spannung  $u(t)$  beim idealen Kondensator  $C$  zum Zeitpunkt  $t$  die Kenntnis des Eingangstroms  $i(\tau)$  für die gesamte Vergangenheit  $\tau \leq t$ , da gilt

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \underbrace{\frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(\tau) d\tau}_{u(t_0)=u_0} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau = u_0 + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau.$$

Offensichtlich erfordert die Bestimmung von  $u(t)$  bei Kenntnis der Eingangsgröße  $i(\tau)$  im Intervall  $t_0 \leq \tau \leq t$  die Kenntnis der Spannung  $u(t_0) = u_0$  des Kondensators zum Zeitpunkt  $t_0$  als Anfangsbedingung. Insbesondere beinhaltet die Anfangsbedingung  $u_0$  die gesamte Information über die Vergangenheit  $\tau < t_0$ . Man sagt auch, dass  $u_0$  den internen *Zustand* des Systems Kondensator zum Zeitpunkt  $t_0$  beschreibt. Systeme, deren Ausgangsgrößen nicht nur vom Augenblickswert der Eingangsgrößen sondern auch von deren Historie abhängen, werden als *dynamische Systeme* bezeichnet.

Wenn für ein System nach Abbildung 1.2 die Werte der Ausgangsgrößen  $y_1(t), \dots, y_p(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  ausschließlich vom Verlauf der Eingangsgrößen  $u_1(\tau), \dots, u_m(\tau)$  für  $\tau \leq t$  abhängen, dann wird das System als *kausal* bezeichnet. Da alle technisch realisierbaren Systeme kausal sind, werden sich die weiteren Ausführungen ausschließlich auf diesen Fall beschränken.

Diese anfänglichen Ausführungen erlauben uns nun die allgemeine Definition der *Zustandsgrößen eines dynamischen Systems* anzugeben.

#### **Definition 1.1: Zustand**

Existieren für ein dynamisches System Größen  $x_1, \dots, x_n$  mit der Eigenschaft, dass die Ausgangsgrößen  $y_1, \dots, y_p$  zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  eindeutig durch den Verlauf der Eingangsgrößen  $u_1(\tau), \dots, u_m(\tau)$  auf dem Intervall  $t_0 \leq \tau \leq t$  und den Werten von  $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$  festgelegt sind, dann werden die Größen  $x_1, \dots, x_n$  als *Zustandsgrößen* des Systems bezeichnet.

Man unterscheidet zwischen dynamischen Systemen mit *finitem Zustand (der Ordnung  $n$ )* bzw. so genannten *konzentriert-parametrischen Systemen*, die sich durch eine endliche Anzahl von  $n$  Zustandsgrößen charakterisieren lassen und solchen mit *infinitem Zustand* bzw. so genannten *verteilt-parametrischen Systemen*. Erstere werden durch mathematische Modelle in Form gewöhnlicher Differenzialgleichungen und algebraischer Gleichungen beschrieben, während letztere durch partielle Differenzialgleichungen abgebildet werden. Im Weiteren werden ausschließlich Systeme mit fini-

tem Zustand betrachtet, die eine Beschreibung durch ein *explizites mathematisches Modell* in  $n$  Zustandsdifferenzialgleichungen mit Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), & t > t_0, & & x_1(t_0) &= x_{1,0} \\ \frac{d}{dt}x_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), & t > t_0, & & x_2(t_0) &= x_{2,0} \\ & \vdots & & & & \\ \frac{d}{dt}x_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), & t > t_0, & & x_n(t_0) &= x_{n,0} \end{aligned}$$

und  $p$  Ausgangsgleichungen

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), & t \geq t_0 \\ y_2 &= h_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), & t \geq t_0 \\ & \vdots \\ y_p &= h_p(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), & t \geq t_0 \end{aligned}$$

erlauben. Durch die Einführung der Spaltenvektoren

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$$

und der Schreibweise, dass  $\frac{d}{dt}$  durch einen Punkt über der abzuleitenden Größe dargestellt wird, lassen sich die Gleichungen in kompakter Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad t > t_0, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.1a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad t \geq t_0 \quad (1.1b)$$

angeben. Die Größen  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{y}$  werden einfach als *Zustand*, *Eingang* und *Ausgang* des dynamischen Systems bezeichnet.

**Aufgabe 1.1.** Überführen Sie die lineare Differenzialgleichung  $n$ -ter Ordnung

$$p_0 y + p_1 \dot{y}(t) + \dots + p_{n-1} y^{(n-1)}(t) + y^{(n)}(t) = q_0 u(t), \quad y^{(j)}(0) = y_j$$

in die Form (1.1).

**Lösung 1.1.** Gemäß Definition 1.1 können die Zustandsgrößen zu  $x_{j+1}(t) = y^{(j)}(t)$  gewählt werden, was auf

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \dots & -p_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q_0 \end{bmatrix} u(t)$$

führt.

**Aufgabe 1.2.** Überführen Sie die lineare Differenzialgleichung 3-ter Ordnung

$$p_0 y(t) + p_1 \dot{y}(t) + p_2 y^{(2)}(t) + y^{(3)}(t) = q_0 u(t) + q_1 \dot{u}(t) + q_2 u^{(2)}(t)$$

$$y^{(j)}(0) = y_j, \quad j = 0, 1, 2$$

in die Form (1.1).

**Lösung 1.2.** Aufgrund der auftretenden Ableitungen von  $u(t)$  ist zur Lösung der Aufgabe ein anderer Weg einzuschlagen. Hierzu wird die Differenzialgleichung zunächst nach der höchsten Ableitung aufgelöst

$$y^{(3)}(t) = q_0 u(t) - p_0 y(t) + q_1 \dot{u}(t) - p_1 \dot{y}(t) + q_2 u^{(2)}(t) - p_2 y^{(2)}(t)$$

und anschließend 3-fach formal integriert, was die folgende Einführung von Zuständen motiviert

$$y(t) = \int_0^t \left[ \int_0^t \left[ \int_0^t \underbrace{[q_0 u(\tau) - p_0 y(\tau)]}_{= \dot{x}_1(t)} d\tau + q_1 u(t) - p_1 y(t) \right] d\tau + q_2 u(t) - p_2 y(t) \right] dt.$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{= \dot{x}_2(t)}$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{= \dot{x}_3(t)}$$

Dies führt auf die Zustandsdarstellung

$$\dot{x}_1(t) = q_0 u(t) - p_0 y(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + q_1 u(t) - p_1 y(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_2(t) + q_2 u(t) - p_2 y(t)$$

für  $t > 0$  mit der Ausgangsgleichung

$$y(t) = x_3(t), \quad t \geq 0.$$

Es ist zu beachten, dass  $y(t) = x_3(t)$  in die Zustandsdifferenzialgleichung einzusetzen ist. Zudem ist zu bemerken, dass die Zustandsdarstellung keine Ableitungen der Eingangsgröße  $u(t)$  umfasst. Zuletzt sind die entsprechenden Anfangsbedingungen zu ermitteln. Mit  $y^{(j)}(0) = y_j$ ,  $j = 0, 1, 2$  und  $x_3(t) = y(t)$  bzw.  $x^{(j)}(t) = y^{(j)}(t)$  folgen die Beziehungen

$$x_3(0) = y(0) = y_0$$

$$x_2(0) = \dot{x}_3(0) - q_2 u(0) + p_2 y(0) = y_1 + p_2 y_0 - q_2 u(0)$$

$$x_1(0) = \underbrace{\ddot{x}_3(0) - q_2 \dot{u}(0) + p_2 \dot{y}(0)}_{= \dot{x}_2(0)} - q_1 u(0) + p_1 y(0) = y_2 + p_2 y_1 + p_1 y_0 - q_1 u(0) - q_2 \dot{u}(0).$$

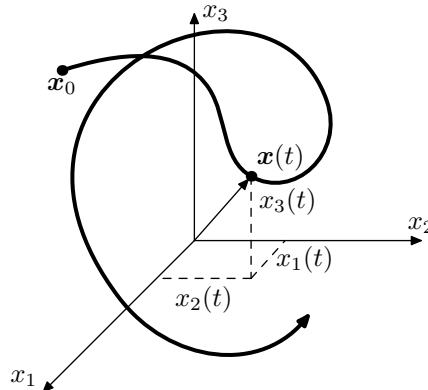
#### Anmerkung 1.1

Die beispielhaft in den Aufgaben 1.1 und 1.2 diskutierten Vorgehensweisen zur Überführung einer Differenzialgleichung höherer Ordnung in ein gekoppeltes System von Differenzialgleichungen erster Ordnung der Form (1.1) ist — neben der Systemtheorie, Regelungstechnik und Signalverarbeitung — insbesondere in der Simulationstechnik von Bedeutung: Mit wenigen Ausnahmen basieren Lösungsverfahren für gewöhnliche Differenzialgleichungen auf einer Beschreibung in der Form (1.1).

**Aufgabe 1.3.** Bestimmen Sie Zustandsgröße bei einer Induktivität und begründen Sie Ihre Wahl.

**Lösung 1.3.** Als Zustandsgröße ist hier der Strom durch die Induktivität zu wählen.

Wird der Zustand  $\mathbf{x}$  als Element eines  $n$ -dimensionalen Vektorraums betrachtet, dann nennt man diesen Vektorraum auch *Zustandsraum*. Der Zustand eines Systems zum Zeitpunkt  $t$  kann dann als Punkt im  $n$ -dimensionalen Zustandsraum dargestellt werden. Die Kurve all dieser Punkte im Zustandsraum für veränderliche  $t$  in einem Zeitintervall wird auch als *Trajektorie* bezeichnet. Eine graphische Illustration für den Fall  $n = 3$  zeigt Abbildung 1.4.



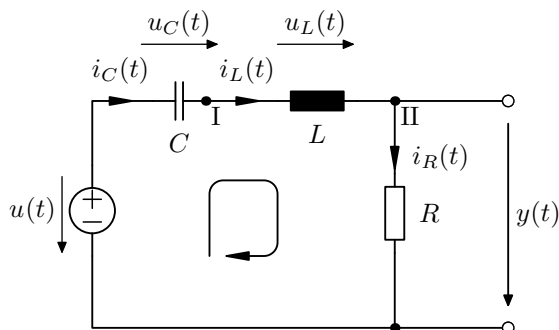
**Abb. 1.4.:** Veranschaulichung einer Trajektorie im Zustandsraum  $\mathbb{R}^3$ .

### 1.3 Modellierung physikalischer Beispielsysteme

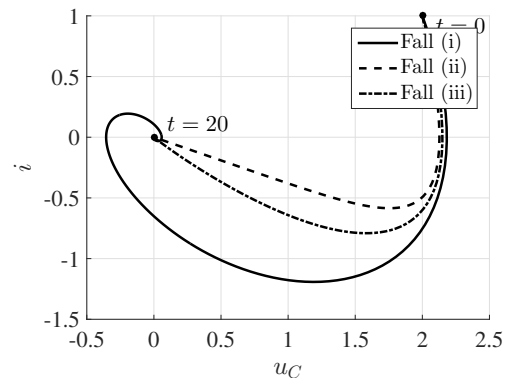
Mathematische Systemmodelle bilden die Grundlage sowohl für die Systemanalyse als auch den Systementwurf zur Beeinflussung der dynamischen Systemeigenschaften. Im Folgenden werden deshalb zunächst einige Beispiele aus verschiedenen physikalischen Bereichen betrachtet und ihre mathematische Modellierung diskutiert.

#### 1.3.1 Elektrisches System

Das mathematische Modell des in Abbildung 1.5(a) dargestellten Serienschwingkreis mit der Eingangsspannung  $u(t)$  und der Ausgangsspannung  $y(t)$  kann unmittelbar aus den Kirchhoffschen Gesetzen abgeleitet werden. Dabei gelten



(a) Schaltbild des Serienschwingkreises.



(b) Trajektorie des Serienschwingkreises.

**Abb. 1.5.:** Schaltbild und Trajektorien eines Serienschwingkreises bei Variation von  $R$ .

$$\begin{aligned}
u_C(t) + u_L(t) + u_R(t) - u(t) &= 0 && \text{(Maschengleichung)} \\
i_C(t) - i_L(t) &= 0 && \text{(Knotengleichung I)} \\
i_L(t) - i_R(t) &= 0 && \text{(Knotengleichung II)}
\end{aligned}$$

zusammen mit den Gleichungen für die einzelnen Bauelemente

$$\begin{aligned}
C \frac{d}{dt} u_C(t) &= i_C(t), && u_C(0) = u_{C,0} && \text{(Kapazität } C) \\
L \frac{d}{dt} i_L(t) &= u_L(t), && i_L(0) = i_{L,0} && \text{(Induktivität } L) \\
R i_R(t) &= y(t) && && \text{(Widerstand } R).
\end{aligned}$$

Mit der Wahl der Zustandsgrößen als Strom  $i(t) = i_L(t)$  durch die Induktivität und Spannung  $u_C(t)$  am Kondensator erhält man unmittelbar analog zu (1.1a) die Zustandsdifferenzialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u(t), \quad t > 0, \quad \begin{bmatrix} u_C(0) \\ i(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{C,0} \\ i_0 \end{bmatrix} \quad (1.2a)$$

mit der Ausgangsgleichung

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix}. \quad (1.2b)$$

Mit  $u(t) = 0$  und

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

ergeben sich dabei die nachfolgend zusammengefassten Lösungen von (1.2a):

$$\text{(i) } \frac{1}{\sqrt{CL}} > \frac{R}{2L}$$

$$\begin{aligned}
u_C(t) &= e^{-\alpha t} \left( \frac{\alpha C u_{C,0} + i_0}{\omega C} \sin(\omega t) + u_{C,0} \cos(\omega t) \right) \\
i(t) &= -e^{-\alpha t} \left( \left[ \frac{\alpha}{\omega} i_0 + \frac{u_{C,0}}{\omega L} \right] \sin(\omega t) - i_0 \cos(\omega t) \right)
\end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\text{(ii) } \frac{1}{\sqrt{CL}} < \frac{R}{2L}$$

$$\begin{aligned}
u_C(t) &= e^{-\alpha t} \left( \frac{\alpha C u_{C,0} + i_0}{\omega C} \sinh(\omega t) + u_{C,0} \cosh(\omega t) \right) \\
i(t) &= -e^{-\alpha t} \left( \left[ \frac{\alpha}{\omega} i_0 + \frac{u_{C,0}}{\omega L} \right] \sinh(\omega t) - i_0 \cosh(\omega t) \right)
\end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\text{(iii) } \frac{1}{\sqrt{CL}} = \frac{R}{2L}$$

$$u_C(t) = e^{-\alpha t} \left( u_{C,0} + \left[ \frac{i_0}{C} + \alpha u_{C,0} \right] t \right) \quad i(t) = e^{-\alpha t} \left( -\alpha u_{C,0} + \left[ \frac{i_0}{C} + \alpha u_{C,0} \right] (1 - \alpha t) \right). \quad (1.5)$$

Die entsprechenden Trajektorien im Zeitintervall  $t \in [0, 20]$  für die Anfangsbedingung  $i_0 = 1$  und  $u_{C,0} = 2$  und  $C = L = 1$  bei Variation von  $R \in \{1, 2, 3\}$  zeigt Abbildung 1.5(b). Für die jeweiligen Werte von  $R$  werden dabei alle drei Fälle durchlaufen.

**Aufgabe 1.4.** Bestimmen Sie zu dem in Abbildung 1.6 dargestellten elektrischen Kreis die Zustandsdifferenzialgleichung und die Ausgangsgleichung entsprechend (1.1). Wählen Sie hierzu geeignete Zustandsgrößen und verwenden Sie die Kirchhoffschen Gesetze.

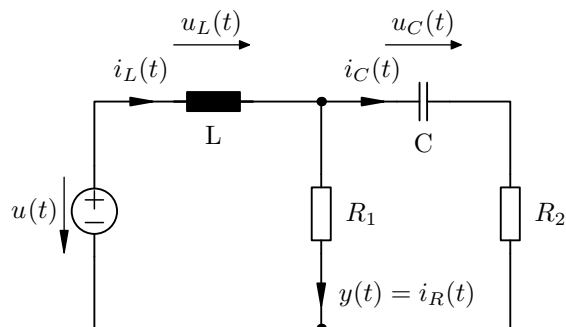


Abb. 1.6.: Schaltbild des elektrischen Kreises.

**Lösung 1.4.** Mit der Wahl von  $i_L(t)$  und  $u_C(t)$  als Zustandsgrößen ergeben sich

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} \\ \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} & -\frac{1}{C(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad t > 0$$

mit

$$\begin{bmatrix} i_L(0) \\ u_C(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{L,0} \\ u_{C,0} \end{bmatrix}$$

sowie

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1 + R_2} & \frac{1}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix}, \quad t \geq 0.$$

**Aufgabe 1.5.** Nachfolgend wird die in Abbildung 1.7 dargestellte Operationsverstärkerschaltung eines Integrators mit Differenzbildung analysiert.

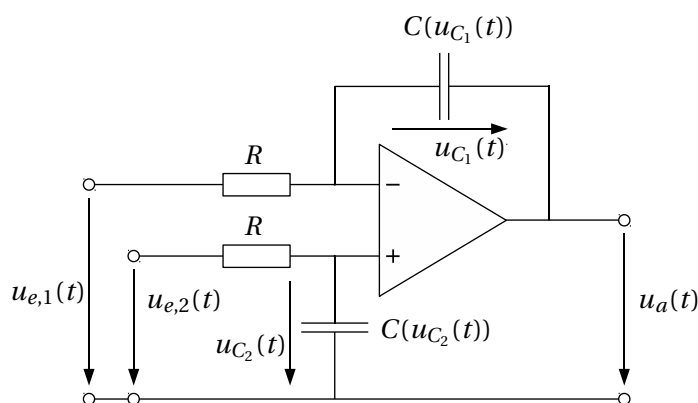


Abb. 1.7.: Schaltbild der Operationsverstärkerschaltung.



Dabei soll die Kapazität  $C$  der Kondensatoren eine Funktion der Spannung sein gemäß

$$C(u_C) = C_0 + C_1 u_C^2, \quad C_0, C_1 > 0.$$

Der Operationsverstärker sei ideal (unendliche Verstärkung, keine Input-Bias Ströme, keine Offset Spannungen). Die Eingänge des Systems sind die Spannungen  $u_{e1}(t)$  und  $u_{e2}(t)$ , der Ausgang ist die Spannung  $u_a(t)$ .

Wählen Sie für die dargestellte Schaltung geeignete Zustandsgrößen  $\mathbf{x}(t)$  und bestimmen Sie das zugehörige mathematische Modell in der Form (1.1).

**Lösung 1.5.** Mit der Wahl des Zustandsvektors  $\mathbf{x}(t) = [u_{C_1}(t), u_{C_2}(t)]^T$  ergibt sich die Zustandsdifferentialgleichung zu

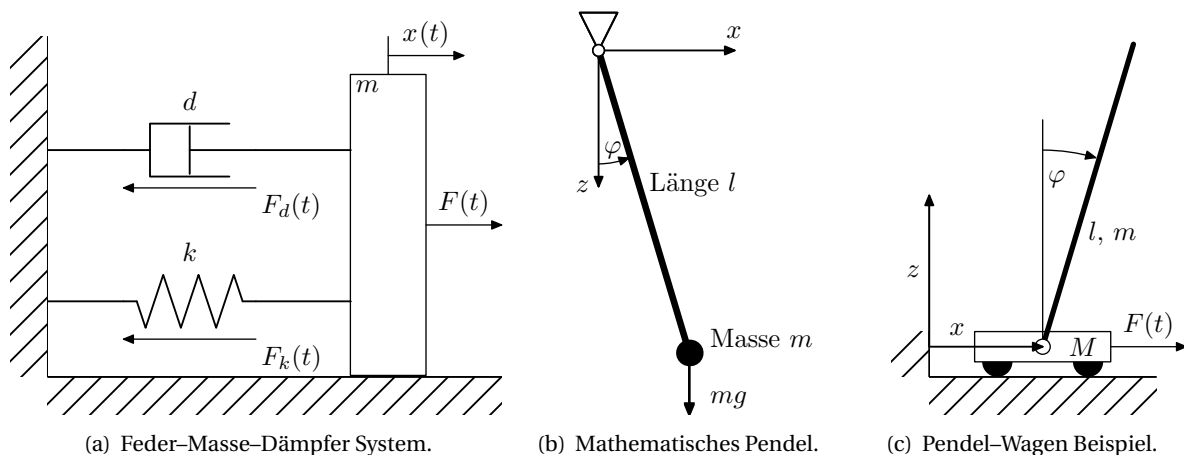
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{C_1}(t) \\ u_{C_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R(C_0 + 3C_1 u_{C_1}^2(t))} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R(C_0 + 3C_1 u_{C_2}^2(t))} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C_2}(t) - u_{e,1}(t) \\ u_{e,2}(t) - u_{C_2}(t) \end{bmatrix}, \quad t > 0$$

mit

$$\begin{bmatrix} u_{C_1}(0) \\ u_{C_2}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{C_1,0} \\ u_{C_2,0} \end{bmatrix}.$$

### 1.3.2 Mechanisches System

Zur Bestimmung des mathematischen Modells des in Abbildung 1.8(a) dargestellten Feder-Masse-Dämpfer Systems mit einer in  $x$ -Richtung auf die Masse  $m$  wirkenden Kraft  $F(t)$  erfolgt leicht durch die Anwendung der Newtonschen Grundgesetze (siehe z.B. [4]). Dabei werden jeweils lineare Feder-



**Abb. 1.8.:** Beispiele einfacher mechanischer Systeme.

und Dämpfer-Charakteristiken angenommen, so dass sich die Rückstellkraft der Feder  $F_k(t)$  und die Dämpfungskraft  $F_d(t)$  zu

$$F_k(t) = kx(t), \quad F_d(t) = d \frac{d}{dt} x(t)$$

ergeben. Aus dem Impulserhaltungssatz in  $x$ -Richtung ergibt sich somit die Bewegungsgleichung für das Feder-Masse-Dämpfer System zu

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -d \frac{d}{dt} x(t) - kx(t) + F(t).$$

Wählt man die Position  $x(t)$  und die Geschwindigkeit  $v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$  als Zustandsgrößen und die angreifende Kraft  $F(t)$  als Eingangsgröße, so lauten die Zustandsdifferenzialgleichungen entsprechend (1.1a)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F(t), \quad t > 0, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

Dabei ist es notwendig zwei Anfangsbedingungen  $x_0$  und  $v_0$  für die Position und die Geschwindigkeit der Masse zum Zeitpunkt  $t = 0$  vorzugeben. Ein Vergleich von (1.6) mit dem mathematischen Modell des elektrischen Serienschwingkreises (1.2a) zeigt, dass beide Systeme eine identische Struktur besitzen und somit ein ähnliches dynamisches Verhalten aufweisen. Die zum mechanischen System analogen Größen des Serienschwingkreises sind Tabelle 1.1 zu entnehmen.

Mechanische Größen	↔	Elektrische Größen
Weg $x(t)$		Ladung $q_C(t) = C u_C(t)$
Geschwindigkeit $v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$		Strom $i_C(t) = \frac{d}{dt}q_C(t) = C \frac{d}{dt}u_C(t)$
Kraft $F(t)$		Eingangsspannung $u(t)$
Masse $m$		Spule (Induktivität) $L$
Federkonstante $k$		Kondensator (1/Kapazität) $1/C$
Dämpfungskonstante $d$		Widerstand $R$

**Tab. 1.1.:** Analogien zwischen dem Feder–Masse–Dämpfer System aus Abbildung 1.8(a) und dem Serienschwingkreis aus Abbildung 1.5(a).

**Aufgabe 1.6.** Zeigen Sie unter Verwendung von Tabelle 1.1, dass die Ersetzung der mechanischen Größen in (1.6) durch die äquivalenten elektrischen Größen unmittelbar auf (1.2a) führt. Bestimmen Sie damit die Lösung der Zustandsdifferenzialgleichung (1.6) für den Fall  $F(t) = 0$  mit Hilfe von (1.3)–(1.5).

**Aufgabe 1.7.** Gegeben ist das mathematische Pendel mit dem masselosen Stab der Länge  $l$  und der Punktmasse  $m$  gemäß Abbildung 1.8(b). Berechnen Sie die Zustandsdifferenzialgleichungen und die Ausgangsgleichung, wenn als Ausgangsgröße  $y(t)$  die Auslenkung der Punktmasse  $m$  von der unteren Ruhelage in  $z$ -Richtung herangezogen wird. Es wird dabei angenommen, dass der Winkel  $\varphi$  des Pendels aus Konstruktionsgründen auf den Bereich  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$  beschränkt ist. Wählen Sie zuerst als Zustandsgrößen den Winkel  $\varphi(t)$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t)$  und anschließend die Auslenkung  $x(t)$  der Masse  $m$  in  $x$ -Richtung und deren zeitliche Ableitung  $v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ .

**Lösung 1.7.** Für den Fall des Zustandsvektors  $\mathbf{x}(t) = [\varphi(t), \omega(t)]^T$  ergeben sich die Zustandsdifferenzialgleichungen mittels des Drallsatzes zu

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ -\frac{g}{l} \sin(\varphi) \end{bmatrix}, \quad t > 0 \quad \begin{bmatrix} \varphi(0) \\ \omega(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \omega_0 \end{bmatrix} \quad (1.7a)$$

mit der Ausgangsgleichung

$$y(t) = -l[1 - \cos(\varphi)], \quad t \geq 0. \quad (1.7b)$$

Bei der Wahl des Zustandsvektors  $\mathbf{x}(t) = [x(t), v(t)]^T$  ergeben sich die Zustandsdifferenzialgleichungen aus dem Impulssatz als

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ -\frac{x(t)v^2(t)}{l^2 - x^2(t)} - \frac{x(t)g}{l^2} \sqrt{l^2 - x^2(t)} \end{bmatrix}, \quad t > 0 \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

mit der Ausgangsgleichung

$$y(t) = \sqrt{l^2 - x^2(t)} - l, \quad t \geq 0.$$

**Aufgabe 1.8.** Eine Erweiterung des mathematischen Pendels ist das Pendel–Wagen System in Abbildung 1.8(c) mit  $l$  und  $m$  der Pendellänge und –masse sowie  $M$  der Wagenmasse. Die am Wagen eingeprägte Kraft  $F(t)$  dient als Eingangsgröße und kann durch einen entsprechenden Antrieb realisiert werden. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen des Pendel–Wagen Systems und überführen Sie diese in die Darstellung (1.1a) mit einem geeigneten Zustandsvektor  $\mathbf{x}(t)$  und dem Eingang  $u(t) = F(t)$ .

**Lösung 1.8.** Mittels des Lagrange–Formalismus ergibt sich

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{6g(m+M)\sin(\varphi(t)) - 3\cos(\varphi(t))(2F(t) + lm\dot{\varphi}^2(t)\sin(\varphi(t)))}{l(m+4M+3m\sin^2(\varphi(t)))}$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{8F(t) + 4lm\dot{\varphi}^2(t)\sin(\varphi(t)) - 3mg\sin(2\varphi(t))}{5m+8M-3m\cos(2\varphi(t))}.$$

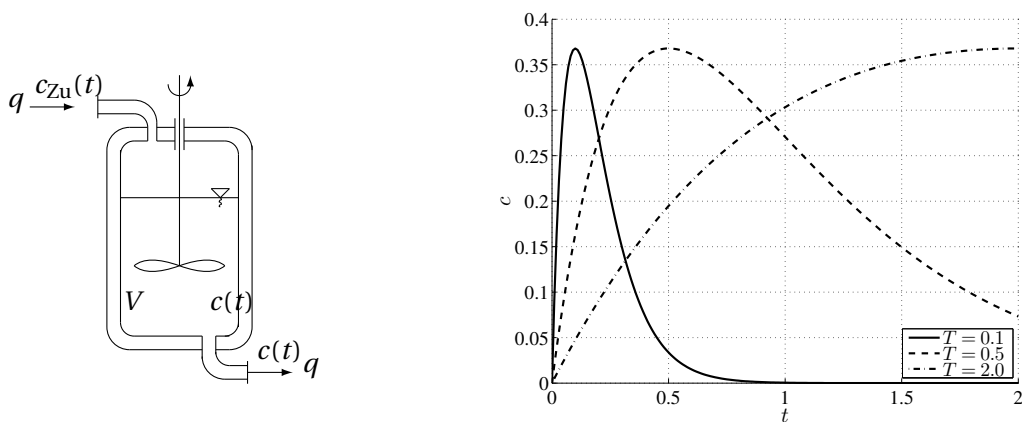
Mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x}(t) = [\varphi(t), \dot{\varphi}(t), x(t), \dot{x}(t)]^T$  ergibt sich die Zustandsdifferenzialgleichung

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \\ x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}(t) \\ \frac{6g(m+M)\sin(\varphi(t)) - 3\cos(\varphi(t))(lm\dot{\varphi}^2(t)\sin(\varphi(t)))}{l(m+4M+3m\sin^2(\varphi(t)))} \\ \dot{x}(t) \\ \frac{4lm\dot{\varphi}^2(t)\sin(\varphi(t)) - 3mg\sin(2\varphi(t))}{5m+8M-3m\cos(2\varphi(t))} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-6\cos(\varphi(t))}{l(m+4M+3m\sin^2(\varphi(t)))} \\ 0 \\ \frac{8}{5m+8M-3m\cos(2\varphi(t))} \end{bmatrix} F(t)$$

für  $t > 0$  mit entsprechender Anfangsbedingung zum Zeitpunkt  $t = 0$ .

### 1.3.3 Chemisches System

Im Folgenden werden die Modellgleichungen für einen Rührkesselreaktor entsprechend der schematischen Darstellung in Abbildung 1.9(a) ermittelt (siehe z.B. [1, 2]). Hierzu wird angenommen, dass der Reaktor ideal durchmischt ist. Dem Reaktor wird eine Komponente A der (molaren) Konzentration  $c_{Zu}(t)$  am Zufluss mit dem konstanten Volumenstrom  $q$  zugeführt. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist keine Komponente A im Reaktor vorhanden. Die Bilanzierung der zeitlichen Änderung der im Reaktor



(a) Schematische Darstellung des Rührkesselreaktors.

(b) Konzentrationsverlauf für  $c_{Zu}(t)$  aus (1.9).

**Abb. 1.9.:** Schematische Darstellung und Lösungsverhalten bei Variation von  $T = V/q$ .

gespeicherten Gesamtmasse  $m(t)$  führt wegen

$$\frac{d}{dt} m(t) = \rho q_{Zu} - \rho q_{Ab} = 0$$

auf  $m(t) = m = \rho V$ . Hierbei bezeichnet  $\rho$  die Dichte des Fluids im Kessel. Da der zugeführte und abgeführte Volumenstrom identisch sind bleibt offensichtlich das Volumen des Fluids im Kessel konstant. Zur Bestimmung der zeitlichen Änderung der Konzentration  $c(t)$  der Substanz  $A$  führt eine Bilanzierung der Masse  $m_A(t)$  der Komponente  $A$  (Komponentenmassenbilanz) auf

$$\frac{d}{dt} m_A(t) = \dot{m}_{A,Zu}(t) - \dot{m}_{A,Ab}(t) + \dot{m}_{\text{Reakt}}(t).$$

Dabei bezeichnen  $\dot{m}_{A,Zu}(t)$  und  $\dot{m}_{A,Ab}(t)$  den zu- bzw. abgeführten Massenstrom, wobei im betrachteten Fall mit  $q_{Zu} = q_{Ab} = q$  gilt, dass

$$\dot{m}_{A,Zu/Ab}(t) = \rho_{A,Zu/Ab}(t) q.$$

Der Term  $\dot{m}_{\text{Reakt}}(t)$  stellt die Produktion oder den Verbrauch von  $A$  durch eine chemische Reaktion dar. Dessen Bestimmung erfordert es, gewisse Annahmen über den Reaktionsmechanismus zu treffen. Im Allgemeinen ist  $\dot{m}_{\text{Reakt}}(t)$  eine nichtlineare Funktion in  $c_A(t)$ .

Zu Ermittlung des mathematischen Modells ist es noch notwendig  $\rho_{A,Zu/Ab}(t)$  durch die entsprechenden molaren Konzentrationen  $c_{A,Zu/Ab}(t)$  zu ersetzen. Mit  $M_A$  der so genannten molaren Masse oder Molmasse der Substanz  $A$  gilt

$$\rho_{A,Zu/Ab}(t) = M_A c_{A,Zu/Ab}(t).$$

In der dargestellten Konfiguration gelten dabei  $c_{A,Zu}(t) = c_{Zu}(t)$  und  $c_A(t) = c_{A,Ab}(t) = c(t)$ , wobei letztere Gleichung unmittelbar aus der idealen Durchmischung des Reaktors folgt. Dies führt schließlich auf das mathematische Modell des ideal durchmischten Rührkesselreaktors

$$\frac{d}{dt} m_A(t) = \frac{d}{dt} (\rho_A(t) V) = \frac{d}{dt} (M_A V c(t)) = M_A c_0(t) q - M_A c(t) q + \dot{m}_{\text{Reakt}}(t)$$

bzw.

$$\frac{d}{dt} c(t) = \frac{q}{V} (c_0(t) - c(t)) + \frac{\dot{m}_{\text{Reakt}}(t)}{V M_A}, \quad t > 0, \quad c(0) = 0. \quad (1.8)$$

Beispielhaft soll im Folgenden die Lösung der Zustandsdifferenzialgleichung (1.8) für eine Zuflusskonzentration

$$c_{Zu}(t) = c_{Zu}^0 \exp(-q/Vt) \sigma(t) \quad (1.9)$$

bestimmt werden, wobei  $\sigma(t)$  die Heaviside-Funktion darstellt, die wie folgt definiert ist

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \text{undefiniert} & \text{für } t = 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Des Weiteren wird  $\dot{m}_{\text{Reakt}}(t) = 0$  angenommen. Wegen  $c(0) = 0$  kann leicht durch die Ermittlung der homogenen und partikulären Lösung von (1.8) gezeigt werden, dass gilt

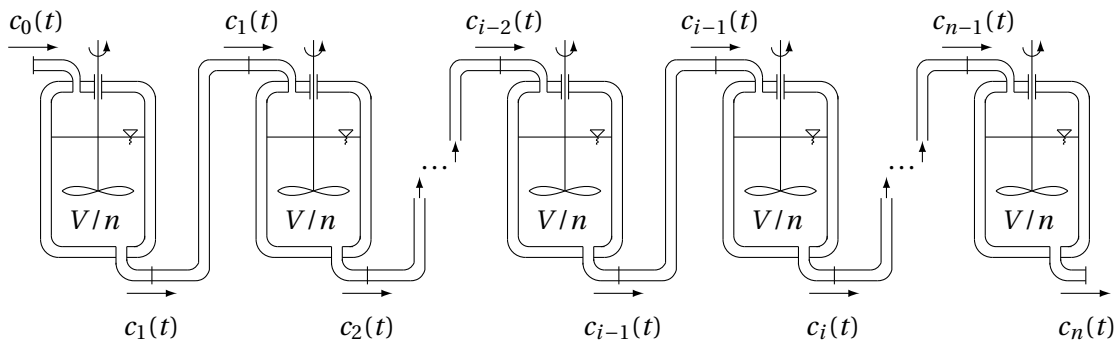
$$c(t) = \frac{1}{T} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T}} c_{\text{Zu}}(\tau) d\tau,$$

wobei  $T = V/q$  ist. Speziell führt dies mit der angegebenen Zuflusskonzentration auf

$$c(t) = \frac{c_{\text{Zu}}^0 t}{T} e^{-\frac{t}{T}} \sigma(t).$$

Eine graphische Darstellung der Zuflusskonzentration für  $c_{\text{Zu}}^0 = 1$  und der sich dazu einstellenden Konzentration im Reaktor bei Variation von  $T \in \{0.1, 0.5, 2.0\}$  zeigt Abbildung 1.9(b).

**Aufgabe 1.9 (Rührkesselkaskade: Modell und Zeitverhalten).** Die in Abbildung 1.10 dargestellte Rührkesselkaskade besteht aus  $n$  hintereinandergeschalteten Rührkesseln.



**Abb. 1.10.:** Schematische Darstellung der Rührkesselkaskade.

Die einzelnen Kessel seien alle gleich groß und ideal durchmischt, das Gesamtvolumen der Kaskade sei  $V$ . Sie wird vom konstanten Volumenfluß  $q$  durchflossen. Zur Untersuchung des dynamischen Verhaltens der Kaskade wird im Zulauf eine Markierungssubstanz  $A$  mit der Konzentration  $c_{\text{Zu}}(t)$  zugegeben. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  sei der Stoff  $A$  in keinem der Kessel vorhanden.

- Die Zulaufkonzentration  $c_{\text{Zu}}(t)$  wird zum Zeitpunkt  $t = 0$  sprunghaft von 0 auf  $\hat{c}_{\text{Zu}}$  erhöht. Wie ändern sich die Konzentrationen  $c_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  in den einzelnen Kesseln?
- Diskutieren Sie die Abhängigkeit des zeitlichen Konzentrationsverlaufs  $c_n(t)$  im letzten Kessel in Abhängigkeit von der Kesselzahl  $n \rightarrow \infty$  für die in a) berechnete Sprungantwort.
- Wie sehen die Sprungantwort und Impulsantwort des letzten Kessels für  $n \rightarrow \infty$  (unendlich stufige Kaskade mit konstantem Gesamtvolumen  $V$ ) aus?

### 1.3.4 Biologisches System

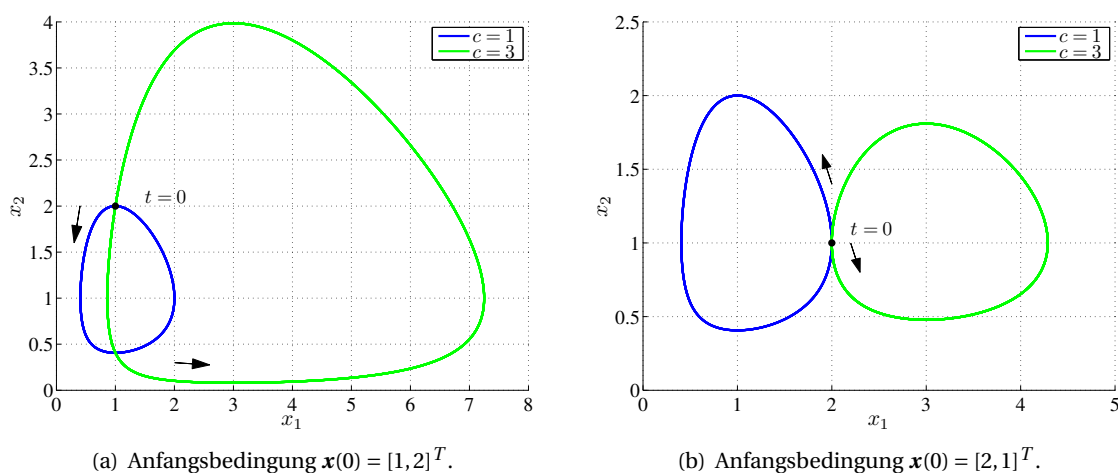
Betrachtet man die Räuber–Beute–Beziehung zweier Populationen, so kann die dynamische Populationsentwicklung mit Hilfe der Lotka–Volterra–Differenzialgleichungen beschrieben werden. Das mathematische Modell beruht dabei auf der Annahme, dass die Anzahl der Beutetiere exponentiell mit der Wachstumsrate  $a > 0$  zunimmt, wenn keine Räuber vorhanden sind. Umgekehrt nimmt man an, dass bei Nicht–Vorhandensein von Beutetieren die Anzahl der Räuber exponentiell mit der Rate  $c > 0$  abnimmt. Für den Fall, dass beide Populationen vorhanden sind, setzt man die Anzahl der „feindlichen“ Begegnungen proportional dem Produkt der beiden Populationen an. Dabei liegt dem Modell der Ansatz zu Grunde, dass die Anzahl der Beutetiere mit den „feindlichen“ Begegnungen dezimiert

(Proportionalitätskonstante  $b > 0$ ) und die Anzahl der Räuber erhöht (Proportionalitätskonstante  $d > 0$ ) werden.

Bezeichnet man nun die Anzahl der Beutetiere mit  $x_1(t)$  und die der Räuber mit  $x_2(t)$ , dann lautet das zugehörige mathematische Modell

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_1(t) &= a x_1(t) - b x_1(t) x_2(t) \\ \frac{d}{dt} x_2(t) &= -c x_2(t) + d x_1(t) x_2(t) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Abbildung 1.11 zeigt die Trajektorien des Räuber–Beute–Systems in der  $(x_1, x_2)$ –Ebene für die spezielle Wahl der Parameter  $a = b = d = 1$  und  $c = 1$  (blau) bzw.  $c = 2$  (grün). Die Anfangsbedingungen sind dabei  $\mathbf{x}(0) = [1, 2]^T$  (links) bzw.  $\mathbf{x}(0) = [2, 1]^T$  (rechts). Offensichtlich weist das Räuber–Beute–System eine *geschlossene Trajektorie*, auch *Grenzyklus* genannt, auf.



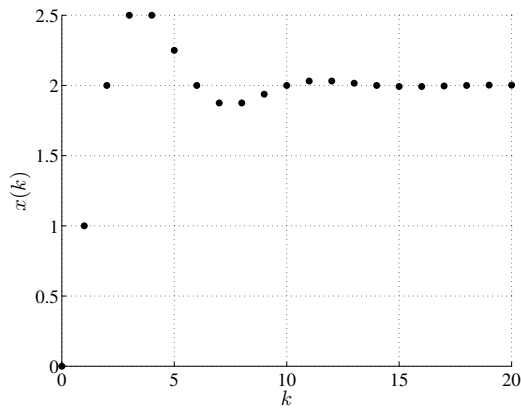
**Abb. 1.11.:** Trajektorien des Räuber–Beute–Systems für  $a = b = d = 1$  und  $c \in \{1, 3\}$  sowie zwei verschiedene Anfangsbedingungen. Die Pfeile geben die jeweilige Durchlaufrichtung der Trajektorien an.

### 1.3.5 Ökonomisches (diskretes) System

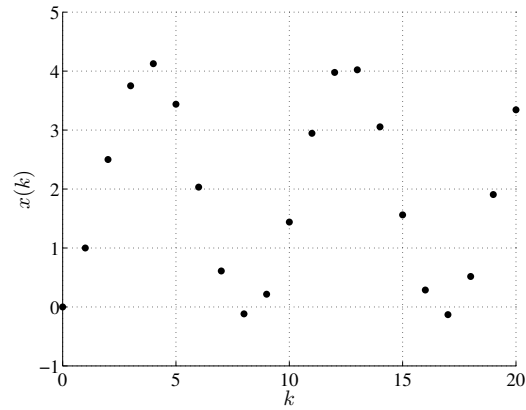
Die bisher behandelten Systeme gehören zur Klasse der *zeitkontinuierlichen Systeme* bei denen die Eingangs-, Zustands- und Ausgangsgrößen Funktionen der kontinuierlichen Zeitvariablen  $t \in \mathbb{R}$  sind. Dem gegenüber stehen die *zeitdiskreten Systeme*, die durch eine Folge  $(\mathbf{x}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  bzw.  $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  von Punkten  $\mathbf{x}(k)$  bzw.  $\mathbf{x}_k$  im Raum  $\mathbb{R}^n$  beschrieben werden mit dem fortlaufenden Index  $k \in \mathbb{Z}$ . Diese Folgenwerte können beispielsweise in äquidistanten Zeitabschnitten, wie dies bei Regelungsaufgaben mit digitalen Prozessoren in Kombination mit A/D- und D/A-Wandlern der Fall ist, oder ohne genau festgelegte Abfolge auftreten. Im Gegensatz zu zeitkontinuierlichen Systemen, die auf einer mathematischen Modellbeschreibung in Form von Differentialgleichungen basieren, werden im zeitdiskreten Fall *Differenzgleichungen* zur Modellierung herangezogen.

Dies wird im Folgenden für ein einfaches Modell zur Beschreibung der Entwicklung des Volkseinkommens in einem Staat illustriert [5] (siehe auch [3]). Dabei bezeichnet  $x(k)$  das Volkseinkommen,  $c(k)$  den Volkskonsum,  $i(k)$  die (privaten) Investitionen und  $g(k)$  die Staatsausgaben im Jahr  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Die volkswirtschaftliche Gesamtrechnung ergibt, dass

$$x(k) = c(k) + i(k) + g(k)$$



(a) Verlauf für  $r = 1$ .



(b) Verlauf für  $r = 2$ .

**Abb. 1.12.:** Entwicklung des Volkseinkommens  $x(k)$  nach (1.12)–(1.13) für  $g_k = 1$ ,  $m = 0.5$ ,  $c_0 = 0$ ,  $i_0, x_0 = 0$  bei Variation von  $r \in \{1, 2\}$ .

Zur weiteren Beschreibung werden zwei Annahmen (nach Hansen) eingeführt, d.h.

$$\begin{aligned} c(k+1) &= mx(k), & 0 < m < 1 \\ i(k+1) &= r(c(k+1) - c(k)), & r > 0. \end{aligned}$$

Diese besagen, dass der individuelle Volkskonsum einen gewissen (konstanten) Anteil  $m$  des Volkseinkommens aus dem Vorjahr ausmacht und dass die Investitionsmenge proportional zur Änderung des Volkskonsums zwischen den beiden Jahren  $k+1$  und  $k$  ist. Zusammenfassend ergibt sich

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(k+1) \\ c(k+1) \\ x(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(k) \\ c(k) \\ x(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} g(k), \quad k > 0, \quad \begin{bmatrix} i(0) \\ c(0) \\ x(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_0 \\ c_0 \\ x_0 \end{bmatrix}.$$

Dieses System von Differenzgleichungen kann leicht in eine Differenzgleichung 2. Ordnung überführt werden

$$x(k+1) = m(1+r)x(k) - rmx(k-1) + g(k+1), \quad k > 0 \tag{1.12}$$

mit den Anfangswerten

$$x(0) = x_0, \quad x(1) = m(1+r)x_0 - rc_0 + g_1. \tag{1.13}$$

Für konstante Staatsausgaben  $g_k = 1$  zeigt Abbildung 1.12 den Verlauf des Volkseinkommens für  $m = 0.5$ ,  $c_0 = 0$ ,  $i_0, x_0 = 0$  bei Variation von  $r \in \{1, 2\}$ . Offensichtlich stellt sich für  $r = 1$  ein konstanter Verlauf von  $x(k)$  ein während  $r = 2$  auf ein schwingendes Verhalten führt.

## Literatur

- [1] H.D. Baehr und K. Stephan. *Wärme- und Stoffübertragung*. 2. Aufl. Berlin: Springer-Verlag, 1996 (zitiert auf Seite 11).
- [2] H.A. Jakobsen. *Chemical Reactor Modeling – Multiphase Reactive Flows*. Berlin Heidelberg: Springer, 2008 (zitiert auf Seite 11).
- [3] D.G. Luenberger. *Introduction to System Dynamics*. New York: John Wiley & Sons, 1979 (zitiert auf Seite 14).
- [4] L. Meirovitch. *Principles and Techniques of Vibrations*. New Jersey: Prentice Hall, 1997 (zitiert auf Seite 9).
- [5] P.A. Samuelson. „Interactions between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration“. In: *Rev. Econ. Statistics* 21.2 (1939), S. 75–78 (zitiert auf Seite 14).



# Eigenschaften dynamischer Systeme

Im Folgenden werden einige wichtige Grundlagen und Eigenschaften linearer und nichtlinearer dynamischer Systeme zusammengefasst. Diese bilden unmittelbar die Basis für den in den weiteren Kapiteln ausführlich behandelten Regelungsentwurf für lineare, zeitinvariante Systeme. Der Ausgangspunkt dieser Ausführungen ist durch die in (1.1) eingeführte mathematische Beschreibung zeitkontinuierlicher dynamischer Systeme gegeben, d.h.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad t > t_0, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad t \geq t_0 \quad (2.1b)$$

mit dem Zustand  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , dem Eingang  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  und dem Ausgang  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ .

## 2.1 Lösungsexistenz und Eindeutigkeit

Eine der grundlegenden mathematischen Fragestellungen für nichtlineare Systeme beschäftigt sich mit der Existenz und der Eindeutigkeit einer Lösung. Hierzu wird im Weiteren angenommen, dass keine Eingangsgrößen  $\mathbf{u}$  auf das System (2.1) wirken. Ein solches System wird *frei* genannt. Ein *freies, nichtlineares System* kann somit allgemein in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad t > t_0, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t), \quad t \geq t_0 \quad (2.2b)$$

angeschrieben werden. Für Systeme der Form (2.2) liefert der folgende Satz eine hinreichende Bedingung für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung [2].

### Satz 2.1: Lokale Existenz und Eindeutigkeit

Es sei  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  stückweise stetig in  $t$  und erfülle die Lipschitz-Bedingung

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, t)\| \leq L\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \quad 0 < L < \infty \quad (2.3)$$

für alle  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{B} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r\}$  für alle  $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ . Dann existiert ein  $\delta > 0$  so, dass

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad t > t_0, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

genau eine Lösung für  $t \in [t_0, t_0 + \delta]$  besitzt.

Der Beweis dieser Aussage ist beispielsweise in [3, Kapitel 3] zu finden. Der Schlüssel hierzu ist die Lipschitz-Bedingung (2.3) mit der Lipschitz-Konstanten  $L$ . Um dies zu illustrieren betrachte man das System

$$\dot{x} = 3x^{\frac{2}{3}}, \quad t > 0, \quad x(0) = x_0 = 0.$$

Es ist unmittelbar ersichtlich, dass  $x(t) = 0$  eine Lösung der Differentialgleichung ist. Darüber hinaus erfüllt jedoch auch  $x(t) = t^3$  die Differentialgleichung und Anfangsbedingung, da  $\frac{d}{dt} t^3 = 3t^2 = 3(t^3)^{2/3}$  mit  $x(0) = 0$ . Die offensichtliche Stetigkeit von  $f(x) = 3x^{2/3}$  in  $x$  impliziert somit nicht die Eindeutigkeit der Lösung. Zudem existiert in einer hinreichend kleinen Umgebung um  $x_0 = 0$  keine Lipschitz-Konstante  $L$  so, dass (2.3) erfüllt wird. Da  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und somit  $\|\cdot\| = |\cdot|$  kann dies leicht dadurch motiviert werden, dass in diesem Fall (2.3) äquivalent ist zu

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq L$$

für  $x_1, x_2 \in \mathcal{B}$ . Mit der Definition von  $\mathcal{B}$  und  $x(0) = x_0 = 0$  impliziert dies für das betrachtete Beispiel, dass in einer Umgebung des Ursprungs gelten muss, dass

$$\frac{d}{dx} f(x) < \infty, \quad x \in \mathcal{B}.$$

Dies ist offensichtlich für  $f(x) = 3x^{2/3}$  nicht erfüllt, weshalb Satz 2.1 nicht angewendet werden kann. Für weitere Möglichkeiten zum Nachweis der Lipschitz-Stetigkeit, d.h. der Existenz einer Lipschitz-Konstanten  $L \in (0, \infty)$  wird auf die Ausführungen in [3, Kapitel 3] verwiesen.

Der Beweis der Existenz beruht dabei im Wesentlichen auf der Anwendung der Picard-Iteration oder der Methode der sukzessiven Approximation nach Picard, deren Konvergenz unter den in Satz 2.1 getroffenen Voraussetzungen nachgewiesen werden kann. Eine Lösung  $\mathbf{x}(t)$  von (2.2a) genügt der (Volterraschen) Integralgleichung

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \tau) d\tau.$$

Insbesondere kann für den Fall, dass  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt, gezeigt werden, dass die Folge von Funktionen

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0(t) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(\tau), \tau) d\tau \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_k(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}(\tau), \tau) d\tau \end{aligned}$$

gegen die eindeutige Lösung von (2.2a) konvergiert. Es gilt also

$$\mathbf{x}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k(t).$$

**Beispiel 2.1.** *Beispielhaft wird die Anwendung dieses Schemas anhand der Differentialgleichung*

$$\dot{x} = \alpha x, \quad t > 0, \quad x(0) = x_0$$

*mit  $\alpha \in \mathbb{R}$  illustriert. Es gilt somit*

$$x_0(t) = x_0$$

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= x_0 + \int_0^t \alpha x_0 d\tau = x_0(1 + \alpha t) \\
x_2(t) &= x_0 + \int_0^t \alpha x_0(1 + \alpha\tau) d\tau = x_0\left(1 + \alpha t + \alpha^2 \frac{t^2}{2}\right) \\
&\vdots \\
x_k(t) &= x_0 + \int_0^t \alpha x_0\left(1 + \alpha\tau + \dots + \alpha^{k-1} \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!}\right) d\tau.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich für den Grenzwert  $k \rightarrow \infty$  die bekannte Lösung der Differenzialgleichung

$$x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = x_0 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \frac{t^k}{k!} = x_0 e^{\alpha t}.$$

Es sei betont, dass Satz 2.1 nur ein hinreichendes und insbesondere lokales Existenz und Eindeigkeitsresultat darstellt. Eine globale Erweiterung wird erhalten, wenn die Lipschitz–Stetigkeit nicht nur auf Elemente der um den Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  zentrierten Kugel  $\mathcal{B}$  beschränkt ist, sondern global gilt.

### Satz 2.2: Globale Existenz und Eindeutigkeit

Es sei  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  stückweise stetig in  $t$  und erfülle die Lipschitz–Bedingung

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, t)\| \leq L \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \quad 0 < L < \infty$$

für alle  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$  für alle  $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ . Dann existiert genau eine Lösung der Differenzialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad t > t_0, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

für  $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ .

Hierbei kann  $\tau$  beliebig groß sein. Dass die Aussagen sowohl von Satz 2.1 als auch Satz 2.2 nur hinreichend sind kann leicht anhand des Beispiels  $f(x) = -x^3$  gezeigt werden. Speziell ist  $f$  nicht global Lipschitz–stetig. Andererseits existiert für jede Anfangsbedingung  $x(0) = x_0$  eine eindeutige Lösung

$$x(t) = \text{sign}(x_0) \sqrt{\frac{x_0^2}{1 + 2x_0^2 t}},$$

die für alle  $t \geq 0$  wohl definiert ist.

## 2.2 Linearität und Zeitinvarianz

Nach diesem kurzen Exkurs in die Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme werden im Weiteren fast ausschließlich *lineare, zeitinvariante Systeme* betrachtet. Bekannterweise gilt hierbei u.a. das so genannte Superpositionsprinzip, was zur Lösung linearer Differenzialgleichungen eine wichtige Anwendung findet.

Wie die obige Abbildung 2.1 äquivalenter elektrischer Schaltungen unterstreicht, erfordert die Charakterisierung eines linearen Systems die Formulierung überprüfbarer formal mathematischer Kriterien. Speziell kann aus dem Vorhandensein offensichtlich nichtlinearer Elemente (z.B. Dioden in Abbildung

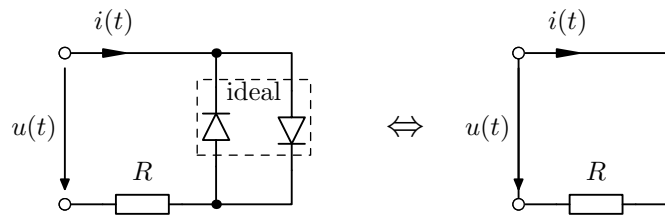


Abb. 2.1.: Beispiel äquivalenter Schaltungen.

2.1) nicht unmittelbar darauf geschlossen werden, dass das System nichtlineares Verhalten aufweist. Sei  $\varphi(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t), t, t_0)$  die Lösung der Differentialgleichung (2.1a) zum Zeitpunkt  $t$  für den Anfangswert  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  und die Eingangsgröße  $\mathbf{u}(\tau)$ ,  $t_0 < \tau < t$ .

### Definition 2.1: Linearität

Das System (2.1) nennt man linear, wenn für alle (zulässigen) Eingangsgrößen  $\mathbf{u}(t)$  und jeden beliebigen Anfangszeitpunkt  $t_0 \geq 0$  die Ausgangsgröße

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t), t) = \mathbf{h}(\varphi(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t), t, t_0), \mathbf{u}(t), t)$$

zu jedem Zeitpunkt  $t \geq t_0$  die Bedingungen

$$(i) \quad \mathbf{y}(\alpha_1 \mathbf{x}_{0,1} + \alpha_2 \mathbf{x}_{0,2}, \mathbf{0}, t) = \alpha_1 \mathbf{y}(\mathbf{x}_{0,1}, \mathbf{0}, t) + \alpha_2 \mathbf{y}(\mathbf{x}_{0,2}, \mathbf{0}, t) \quad (2.4a)$$

$$(ii) \quad \mathbf{y}(\mathbf{0}, \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2, t) = \beta_1 \mathbf{y}(\mathbf{0}, \mathbf{u}_1, t) + \beta_2 \mathbf{y}(\mathbf{0}, \mathbf{u}_2, t) \quad (2.4b)$$

$$(iii) \quad \mathbf{y}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, t) = \mathbf{y}(\mathbf{x}_0, \mathbf{0}, t) + \mathbf{y}(\mathbf{0}, \mathbf{u}, t) \quad (2.4c)$$

mit  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$  erfüllt.

Hierbei bezeichnet man die Eigenschaft (i) als *Superpositionsprinzip* oder *Zerlegungseigenschaft* bezüglich der Anfangswerte (*Nulleingangslinearität*), (ii) als das Superpositionsprinzip bezüglich der Eingangsgrößen (*Nullzustandslinearität*) und (iii) als das Superpositionsprinzip bezüglich der Eingangsgrößen mit den Anfangswerten (siehe z.B. [1]).

**Aufgabe 2.10.** Ist das System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a(t)x(t) + u(t) + 1, & t > t_0, & & x(t_0) &= x_0 \\ y(t) &= x(t) \end{aligned}$$

linear? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Lösung 2.10.** Das System erfüllt nicht die Eigenschaften (i) und (ii) und ist somit nicht linear.

Zur Überprüfung kann beispielsweise die Lösung der Differentialgleichung untersucht werden, welche sich mittels des Separationsansatzes zu

$$x(t) = e^{\alpha(t, t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{\alpha(t, \tau)} (u(\tau) + 1) d\tau$$

mit  $\alpha(t, \tau) = \int_{\tau}^t a(\tau) d\tau$  ergibt.

Zudem sei bemerkt, dass durch die Substitution  $u(t) = \bar{u}(t) - 1$  das System die Bedingungen (2.4) mit dem neuen Eingang  $\bar{u}(t)$  erfüllt. Dies lässt sich leicht anhand der angegebenen allgemeinen Lösung begründen.

Es gilt der folgende Satz.

### Satz 2.3: Lineares System

Das System (2.1) ist genau dann linear, wenn es sich in die Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t), \quad t > t_0, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.5a)$$

$$\mathbf{y}(t) = C(t)\mathbf{x}(t) + D(t)\mathbf{u}(t), \quad t \geq t_0 \quad (2.5b)$$

überführen lässt.

Die Einträge der  $(n \times n)$ -Matrix  $A(t)$ , der  $(n \times m)$ -Matrix  $B(t)$ , der  $(p \times n)$ -Matrix  $C(t)$  und der  $(p \times m)$ -Matrix  $D(t)$  dürfen dabei nur von der Zeit  $t$  abhängen.

**Aufgabe 2.11.** Sind die Systeme der Abschnitte 1.3.1–1.3.4 linear oder nichtlinear?

Ein weitere wichtige Eigenschaft dynamischer Systeme betrifft die *Zeitvarianz*. Hierzu sei bemerkt, dass in den folgenden Ausführungen mit  $\mathbf{f}(t - T)$ ,  $T > 0$ , die um die Zeit  $T$  nach rechts verschobene Zeitfunktion  $\mathbf{f}(t)$  gemeint ist.

### Definition 2.2: Zeitinvarianz

Das System (2.1) wird zeitinvariant genannt, wenn für alle (zulässigen) Eingangsgrößen  $\mathbf{u}(t)$  und jeden beliebigen Anfangszeitpunkt  $t_0 \geq 0$  die nachfolgende Bedingung für alle  $t \geq t_0$  und alle  $T \in \mathbb{R}$  erfüllt: Sei  $\mathbf{y}(t)$  die Ausgangsgröße des Systems zum Zeitpunkt  $t$  für den Anfangswert  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  und die Eingangsgröße  $\mathbf{u}(\tau)$ ,  $t_0 \leq \tau \leq t$ , dann ist  $\mathbf{y}(t - T)$  die Ausgangsgröße des Systems für den Anfangswert  $\mathbf{x}(t_0 + T) = \mathbf{x}_0$  und die Eingangsgröße  $\mathbf{u}(\tau - T)$ ,  $t_0 + T \leq \tau \leq t + T$ .

**Aufgabe 2.12.** Ist das System

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = x(t)$$

zeitinvariant?

**Lösung 2.12.** Das System ist zeitinvariant.

Es gilt der folgende Satz.

### Satz 2.4: Lineares zeitinvariantes System

Das System (2.1) ist genau dann linear und zeitinvariant, wenn es sich in die Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.6a)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t), \quad t \geq 0 \quad (2.6b)$$

überführen lässt.

Die Einträge der  $(n \times n)$ -Matrix  $A$ , der  $(n \times m)$ -Matrix  $B$ , der  $(p \times n)$ -Matrix  $C$  und der  $(p \times m)$ -Matrix  $D$  sind dabei reelle Zahlen. Es sei hierbei zudem beachtet, dass für lineare, zeitinvariante Systeme ohne Beschränkung der Allgemeinheit für den Anfangszeitpunkt  $t_0 = 0$  angenommen werden kann. In der Englischsprachigen Literatur werden Systeme der Form (2.6) auch abkürzend als *LTI-Systeme* bezeichnet.

**Aufgabe 2.13.** Die mathematische Beschreibung des Transportvorgangs auf einem Förderband der Länge  $l$ , das sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $v$  bewegt, führt auf  $x(t) = u(t - l/v)$ . Hierbei ist  $u(t)$  die am Bandanfang pro Zeiteinheit aufgebrauchte Materialmenge während  $x(t)$  die am Bandende pro Zeiteinheit abgeworfene Menge darstellt.

- a) Ist das System linear und zeitinvariant?  
 b) Kann das System in der Form (2.6) dargestellt werden?

**Lösung 2.13.** a) Ja; b) Nein.

## 2.3 Linearisierung nichtlinearer Systeme

Falls für ein nichtlineares, zeitvariantes System (2.1) nur kleine Auslenkungen um eine *Ruhelage* bzw. einen *Arbeitspunkt* betrachtet werden, dann kann das System sehr häufig durch eine *lokale Linearisierung* um die Ruhelage hinreichend genau approximiert werden.

### 2.3.1 Ruhelagen nichtlinearer Systeme

Der Begriff der Ruhelage wird im Allgemeinen für autonome bzw. freie Systeme definiert während ein Arbeitspunkt zudem vom Wert des Eingangs abhängt. Ein Arbeitspunkt  $(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)$  eines nichtlinearen Systems (2.1) ist dadurch charakterisiert, dass er einem Fixpunkt der Lösung  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R, t, t_0)$  der Differenzialgleichung (2.1a) mit der Anfangsbedingung  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_R$  für konstanten Eingang  $\mathbf{u}_R$  entspricht, d.h. es gilt

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R, t, t_0) = \mathbf{x}_R, \quad \forall t \geq t_0.$$

Für den Fall  $\mathbf{u}_R = \mathbf{0}$  bzw. für freie Systeme mit  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  wird  $\mathbf{x}_R$  als Fixpunkt der Lösung

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_R, t, t_0) = \mathbf{x}_R, \quad \forall t \geq t_0$$

auch als Ruhelage bezeichnet. Zur praktischen Berechnung der Ruhelagen bzw. Arbeitspunkte werden die folgenden Definitionen herangezogen.

#### Definition 2.3: Ruhelage

Ein Punkt  $\mathbf{x}_R \in \mathbb{R}^n$  ist eine Ruhelage von

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad t > t_0$$

wenn die folgende Bedingung für alle Zeiten  $t \geq t_0$  erfüllt ist.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, t) = \mathbf{0}. \tag{2.7}$$

#### Definition 2.4: Arbeitspunkt

Ein Punkt  $(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)$  mit  $\mathbf{x}_R \in \mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{u}_R \in \mathbb{R}^m$  ist ein Arbeitspunkt von

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad t > t_0$$

wenn die folgende Bedingung für alle Zeiten  $t \geq t_0$  erfüllt ist

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R, t) = \mathbf{0}. \tag{2.8}$$

Es sei hierbei bemerkt, dass nichtlineare Systeme im Allgemeinen eine beliebige Anzahl an Ruhelagen bzw. Arbeitspunkten aufweisen können.

**Beispiel 2.2.** Die folgenden nichtlinearen Systeme besitzen eine unterschiedliche Anzahl an Ruhelagen bzw. Arbeitspunkten, die sich unmittelbar aus (2.7) und (2.8) bestimmen lassen:

- (i)  $\dot{x} = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$  führt auf drei Ruhelagen  $x_{j,R} = a_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ .
- (ii)  $\dot{x} = x \sin(x)$  besitzt unendlich viele Ruhelagen  $x_{j,R} = j\pi$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ .
- (iii)  $\dot{x} = t + x \sin(x)$  besitzt keine Ruhelage.
- (iv)  $\dot{x} = x^2 + 1$  besitzt keine Ruhelage in  $\mathbb{R}$ .
- (v)  $\dot{x}_1 = x_2 \exp(-x_1)$ ,  $\dot{x}_2 = \sin(x_2)$  besitzt unendlich viele Ruhelagen  $\mathbf{x}_R = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0 \wedge x_1 \text{ beliebig}\}$ .
- (vi)  $\dot{x} = x^2 - u_R$  besitzt den Arbeitspunkt  $(\sqrt{u_R}, u_R)$  für  $u_R \geq 0$ . Für  $u_R < 0$  existiert kein Arbeitspunkt.

Bei linearen, zeitinvarianten, autonomen Systemen der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  und  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gibt es entweder genau eine Ruhelage  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$  oder unendlich viele Ruhelagen. Die Fälle sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst.

Fall	Anzahl Ruhelagen
A ist regulär ( $\det A \neq 0$ )	$\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ ist einzige Ruhelage
A ist singular ( $\det A = 0$ )	Unendlich viele Ruhelagen

**Tab. 2.1.:** Ruhelagen für lineare, zeitinvariante, autonome Systeme.

In analoger Weise erfolgt die Bestimmung der Arbeitspunkte für lineare, zeitinvariante Systeme

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

für konstanten Eingang  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_R$ . Die auftretenden Fälle sind in Tabelle 2.2 zusammengefasst.

Fall	Anzahl Arbeitspunkte
A ist regulär	$\mathbf{x}_R = -A^{-1}B\mathbf{u}_R$ einziger Arbeitspunkt
A ist singular, $\text{rang}(A) = \text{rang}([A, B\mathbf{u}_R])$	Unendlich viele Arbeitspunkte
A ist singular, $\text{rang}(A) \neq \text{rang}([A, B\mathbf{u}_R])$	Kein Arbeitspunkt

**Tab. 2.2.:** Arbeitspunkte für lineare, zeitinvariante Systeme.

Die Anwendung dieser Kriterien wird in den folgenden Beispielen illustriert.

**Beispiel 2.3.** Betrachtet wird das lineare System

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

mit den reellen Parametern  $a, b \in \mathbb{R}$ . Die Ruhelagen des Systems ergeben sich mit Tabelle 2.1 zu:

- (i) Für  $ab \neq 1$  (A regulär) folgt  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ .

(ii) Für  $ab = 1$  ( $A$  singularär) ergibt sich  $\mathbf{x}_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = -ax_2 \text{ mit } x_2 \text{ beliebig}\}$ .

**Beispiel 2.4.** Betrachtet wird das lineare System

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} u$$

mit den reellen Parametern  $a, b \in \mathbb{R}$ . Die Arbeitspunkte des Systems ergeben sich mit Tabelle 2.2 zu ( $A$  ist singularär):

(i) Für  $b \neq 3a$  existiert kein Arbeitspunkt.

(ii) Für  $b = 3a$  ergeben sich unendlich viele Arbeitspunkte  $\mathbf{x}_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = -2x_1 + au_R \text{ mit } x_1 \text{ beliebig}\}$ .

Im Weiteren werden die Begriffe Ruhelage und Arbeitspunkt teilweise synonym verwendet und die Unterscheidung wird durch die zugrunde liegende Systemstruktur (frei oder nichtautonom) impliziert.

### 2.3.2 Linearisierung um eine Ruhelage

Zur Vereinfachung und Verkürzung der Schreibweise werden die nachfolgenden Konventionen vereinbart. Für die partielle Ableitung einer Funktion  $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nach einer Komponente  $x_j$  an der Stelle  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R$  schreibt man

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_j} f(\mathbf{x}) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R} = \frac{\partial}{\partial x_j} f(\mathbf{x}_R).$$

Die Ableitung einer Funktion  $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nach  $\mathbf{x}$  an der Stelle  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R$  ist der Zeilenvektor

$$\left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}_R) = \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} f(\mathbf{x}_R) \quad \frac{\partial}{\partial x_2} f(\mathbf{x}_R) \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial x_n} f(\mathbf{x}_R) \right].$$

Damit ergibt sich die Ableitung der vektorwertigen  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})]^T$ , d.h. die *Jacobi-Matrix*, an der Stelle  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R$  zu

$$\left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_R} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_R) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(\mathbf{x}_R) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(\mathbf{x}_R) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(\mathbf{x}_R) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_n(\mathbf{x}_R) & \frac{\partial}{\partial x_2} f_n(\mathbf{x}_R) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_n(\mathbf{x}_R) \end{bmatrix}.$$

Die Grundlage der Linearisierung eines nichtlinearen Systems um eine Ruhelage bzw. um einen Arbeitspunkt ist die Formel nach Taylor.

#### Satz 2.5: Taylor-Formel zweiter Ordnung

Es seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  zweifach stetig differenzierbar und Punkte  $\mathbf{x}_R, \mathbf{x}_R + \Delta \mathbf{x} \in U$  so gegeben, dass ihre Verbindungsstrecke in  $U$  liegt. Dann gilt

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_R) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{r}(\mathbf{x}_R, \Delta \mathbf{x}), \quad (2.9)$$



wobei für das Restglied  $\mathbf{r}(\mathbf{x}_R, \Delta\mathbf{x})$  eine Konstante  $K$  so existiert, dass

$$\|\mathbf{r}(\mathbf{x}_R, \Delta\mathbf{x})\| \leq K\|\Delta\mathbf{x}\|^2 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\|\Delta\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{r}(\mathbf{x}_R, \Delta\mathbf{x})\|}{\|\Delta\mathbf{x}\|} = 0.$$

Hiermit lässt sich unmittelbar der folgende Satz zur *Linearisierung eines nichtlinearen, zeitinvarianten Systems um eine Ruhelage* formulieren.

**Satz 2.6: Linearisierung um Ruhelage bzw. Arbeitspunkt**

Es sei  $\mathbf{x}_R$  ein Arbeitspunkt des nichtlinearen, zeitinvarianten Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.10a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad t \geq 0 \quad (2.10b)$$

für  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_R$ . Die Änderungen  $\Delta\mathbf{x}(t)$  von  $\mathbf{x}(t)$  bzw.  $\Delta\mathbf{y}(t)$  von  $\mathbf{y}(t)$  bei hinreichend kleinen Abweichungen  $\Delta\mathbf{u}(t)$  von  $\mathbf{u}_R$  und  $\Delta\mathbf{x}_0$  von  $\mathbf{x}_R$  werden durch das lineare, zeitinvariante System

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = A\Delta\mathbf{x} + B\Delta\mathbf{u}, \quad t > 0, \quad \Delta\mathbf{x}(0) = \Delta\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_R \quad (2.11a)$$

$$\Delta\mathbf{y} = C\Delta\mathbf{x} + D\Delta\mathbf{u}, \quad t \geq 0 \quad (2.11b)$$

mit den Matrizen

$$A = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R), \quad B = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R), \quad C = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R), \quad D = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{h}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R) \quad (2.12)$$

beschrieben. Das System (2.11) wird auch als Linearisierung von (2.10) um die Ruhelage bzw. den Arbeitspunkt  $(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)$  bezeichnet.

Der Nachweis dieses Ergebnisses folgt unmittelbar durch die Nutzung der Taylor-Formel zweiter Ordnung. Da  $(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)$  nach Voraussetzung ein Arbeitspunkt von (2.10) ist, gilt mit Definition 2.4, dass

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R) = \mathbf{0},$$

womit sich aus (2.10b) der entsprechende Wert des Ausgangs zu

$$\mathbf{y}_R = \mathbf{h}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)$$

ergibt. Betrachtet man nun kleine Änderungen um den Arbeitspunkt, so können die Größen  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$  und  $\mathbf{y}(t)$  in der Form

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_R + \Delta\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_R + \Delta\mathbf{y}(t) \quad (2.13)$$

angegeben werden, wobei durch  $\Delta$  die jeweiligen Abweichungen von der Ruhelage symbolisiert werden. Einsetzen von (2.13) in (2.10a) und (2.10b) liefert

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\dot{\mathbf{x}}_R}_{=\mathbf{0}} + \Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}_R + \Delta\mathbf{u}), \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}(0)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_R + \Delta\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_R + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}_R + \Delta\mathbf{u}), \quad t \geq 0.$$

Mit Satz 2.5 und unter Vernachlässigung der Restglieder führt dies auf

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)}_{= \mathbf{0}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)}_{= A} \Delta \mathbf{x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)}_{= B} \Delta \mathbf{u}, \quad t > 0$$

mit

$$\Delta \mathbf{x}(0) = \Delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_R$$

und

$$\mathbf{y}_R + \Delta \mathbf{y} = \underbrace{\mathbf{h}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)}_{= \mathbf{y}_R} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)}_{= C} \Delta \mathbf{x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{h}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)}_{= D} \Delta \mathbf{u}(t), \quad t \geq 0.$$

Satz 2.6 folgt somit durch den Vergleich mit (2.11).

**Beispiel 2.5.** Die Anwendung von Satz 2.6 soll anhand der Zustandsdifferentialgleichung (1.7) des mathematischen Pendels von Aufgabe 1.7 illustriert werden. Offensichtlich existieren unendlich viele Ruhelagen da

$$\begin{bmatrix} \omega_R \\ -\frac{g}{l} \sin(\varphi_R) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

für  $\omega_R = 0$  und  $\varphi_R = j\pi$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  erfüllt wird. Von diesen sind jedoch nur  $(\varphi_R, \omega_R) = (0, 0)$  und  $(\varphi_R, \omega_R) = (0, \pi)$  entsprechend der unteren bzw. oberen Ruhelage physikalisch unterscheidbar. Mit Satz 2.6 führt die Linearisierung um eine allgemeine Ruhelage  $(\varphi_R, \omega_R)$  auf das linearisierte Modell

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \varphi \\ \Delta \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(\varphi_R) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \varphi \\ \Delta \omega \end{bmatrix}, \quad t > 0 \qquad \begin{bmatrix} \Delta \varphi(0) \\ \Delta \omega(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \varphi_0 \\ \Delta \omega_0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta y = -l \sin(\varphi_R).$$

Für die untere Ruhelage  $(\varphi_R, \omega_R) = (0, 0)$  liefert dies

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \varphi \\ \Delta \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \varphi \\ \Delta \omega \end{bmatrix}$$

$$\Delta y = 0$$

Es zeigt sich, dass die Wahl des Ausgangs als Auslenkung der Punktmasse  $m$  von der unteren Ruhelage in  $z$ -Richtung (vgl. Abbildung 1.8(b)) in der Linearisierung auf  $\Delta y(t) = 0$  führt. Somit liefert diese Wahl des Ausgangs keine Auskunft über den Zustand des um die untere Ruhelage linearisierten Systems. Für die obere Ruhelage  $(\varphi_R, \omega_R) = (0, \pi)$  ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \varphi \\ \Delta \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \varphi \\ \Delta \omega \end{bmatrix}$$

$$\Delta y = 0.$$

Es sei abschließend bemerkt, dass die übliche Näherung für kleine Winkel  $\sin(\varphi) \approx \varphi$  und  $\cos(\varphi) \approx 1$  nur für Betrachtungen in der Umgebung der Ruhelage  $\varphi = 0$  gültig ist.

### 2.3.3 Linearisierung um eine Trajektorie

Neben der Linearisierung um eine Ruhelage bzw. um einen Arbeitspunkt ist in regelungstechnischen Fragestellungen auch die *Linearisierung um eine Trajektorie* von Bedeutung.

#### Satz 2.7: Linearisierung um Trajektorie

Es sei  $\mathbf{x}^*(t)$  eine Trajektorie des nichtlinearen, zeitinvarianten Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^*(0) \quad (2.14a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad t \geq 0 \quad (2.14b)$$

für  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)$ . Die Änderungen  $\Delta\mathbf{x}(t)$  von  $\mathbf{x}(t)$  bzw.  $\Delta\mathbf{y}(t)$  von  $\mathbf{y}(t)$  bei hinreichend kleinen Abweichungen  $\Delta\mathbf{u}(t)$  von  $\mathbf{u}^*(t)$  und  $\Delta\mathbf{x}_0$  von  $\mathbf{x}^*(0)$  werden durch das lineare, zeitvariante System

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = A(t)\Delta\mathbf{x} + B(t)\Delta\mathbf{u}, \quad t > 0, \quad \Delta\mathbf{x}(0) = \Delta\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*(0) \quad (2.15a)$$

$$\Delta\mathbf{y} = C(t)\Delta\mathbf{x} + D(t)\Delta\mathbf{u}, \quad t \geq 0 \quad (2.15b)$$

mit den Matrizen

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*), & B(t) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*), \\ C(t) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*), & D(t) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{h}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \end{aligned} \quad (2.16)$$

beschrieben. Das System (2.15) wird auch als Linearisierung von (2.14) um die Trajektorie  $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$  bezeichnet.

Es ist hierbei zu beachten, dass die Linearisierung eines nichtlinearen, zeitinvarianten Systems der Form (2.14) um eine Ruhelage auf ein lineares, zeitinvariantes System führt, wohingegen die Linearisierung um eine Trajektorie ein lineares, zeitvariantes System ergibt.

Der Nachweis von Satz 2.7 erfolgt analog zum vorherigen Abschnitt. Gemäß den Voraussetzungen des Satzes stellt  $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$  eine Lösung der Gleichungen (2.14) dar. Folglich gilt

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^* &= \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*), & t > 0, & & \mathbf{x}^*(0) &= \mathbf{x}_0^* \\ \mathbf{y}^* &= \mathbf{h}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*), & t \geq 0. & & & \end{aligned}$$

Für hinreichend kleine Abweichungen der Eingangsgröße  $\mathbf{u}(t)$  und des Anfangswertes  $\mathbf{x}_0$  von  $\mathbf{u}^*(t)$  und  $\mathbf{x}_0^*$  stellen sich (zumindest in einem hinreichend kleinen Zeitintervall  $t \in [0, T]$ ) nur kleine Abweichungen der Lösung  $\mathbf{x}(t)$  von  $\mathbf{x}^*(t)$  ein. Mit

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t) + \Delta\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t) + \Delta\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^*(t) + \Delta\mathbf{y}(t) \quad (2.17)$$

liefert die Auswertung von (2.14), dass

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \dot{\mathbf{x}}^* + \Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}^* + \Delta\mathbf{u}), & t > 0, & & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0^* + \Delta\mathbf{x}(0) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{y}^* + \Delta\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u}^* + \Delta\mathbf{u}), & t \geq 0. & & & \end{aligned}$$

Mit Satz 2.5 und unter Vernachlässigung der Restglieder führt dies auf

$$\dot{\mathbf{x}}^* + \Delta \dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)}_{=\dot{\mathbf{x}}^*} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \Delta \mathbf{x}}_{=A(t)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \Delta \mathbf{u}}_{=B(t)}, \quad t > 0$$

mit

$$\Delta \mathbf{x}(0) = \Delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^*$$

und

$$\mathbf{y}^* + \Delta \mathbf{y} = \underbrace{\mathbf{h}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)}_{=\mathbf{y}^*} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \Delta \mathbf{x}}_{=C(t)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{h}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \Delta \mathbf{u}(t)}_{=D(t)}, \quad t \geq 0.$$

Eine Vergleich mit (2.15) führt auf Satz 2.7.

**Beispiel 2.6.** Gegeben ist das nichtlineare, zeitinvariante System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} ax_2x_3 + u_1 \\ -ax_1x_3 + u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad t > 0 \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$y = \sin(x_1), \quad t \geq 0$$

mit konstantem Parameter  $a > 0$ . Für  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t) = [u_1^*(t), u_2^*(t), u_3^*(t)]^T = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^*$  ergibt sich die Lösung zu

$$\mathbf{x}^*(t) = \begin{bmatrix} x_{1,0}^* \cos(ax_{3,0}^* t) + x_{2,0}^* \sin(ax_{3,0}^* t) \\ -x_{1,0}^* \sin(ax_{3,0}^* t) + x_{2,0}^* \cos(ax_{3,0}^* t) \\ x_{3,0}^* \end{bmatrix}.$$

Die Linearisierung gemäß (2.15) mit (2.17) führt auf das lineare, zeitvariante System

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & ax_3^*(t) & ax_2^*(t) \\ -ax_3^*(t) & 0 & -ax_1^*(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}, \quad t > 0, \quad \Delta \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^*$$

$$\Delta y = [\cos(x_1^*(t)) \quad 0 \quad 0] \Delta \mathbf{x}.$$

## Literatur

- [1] C.-T. Chen. *Linear System Theory and Design*. New York: Oxford Univ. Press, 1999 (zitiert auf Seite 20).
- [2] H. Heuser. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. 5. Aufl. Wiesbaden: B.G. Teubner, 2006 (zitiert auf Seite 17).
- [3] H.K. Khalil. *Nonlinear Systems*. 3rd. Upper Saddle River (NJ): Prentice-Hall, 2002 (zitiert auf den Seiten 17, 18).



# Lineare dynamische Systeme im Zeitbereich

In diesem Kapitel werden einige grundlegende Konzepte zur Analyse linearer, zeitinvarianter dynamischer Systeme behandelt. Ausgangspunkt ist hierbei die in (2.6) eingeführte Systemdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}, \quad t \geq 0 \quad (3.1b)$$

mit Zustand  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ , Eingang  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ , Ausgang  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$  und den Matrizen  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$  und  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ .

## 3.1 Transitionsmatrix und Lösung der Zustandsdifferentialgleichung

Im Weiteren wird zunächst das freie bzw. autonome System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.2)$$

betrachtet. Mit Satz 2.1 kann unmittelbar auf die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (3.2) geschlossen werden. Mit  $\|\mathbf{A}\|$ , der induzierten Matrixnorm, kann leicht die Abschätzung

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}_1 - \mathbf{A}\mathbf{x}_2\| \leq \|\mathbf{A}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$$

gezeigt werden. Es ist somit leicht ersichtlich, dass (3.2) die Lipschitz-Bedingung (2.3) mit der Lipschitz-Konstanten  $L = \|\mathbf{A}\|$  erfüllt. Hieraus folgt, dass die Lösung von (3.2) mittels der Methode der sukzessiven Approximation nach Picard ermittelt werden kann, deren Anwendung auf die Folge

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0(t) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{x}_0(\tau) d\tau = (\mathbf{E} + \mathbf{A}t)\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_2(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{A}(\mathbf{E} + \mathbf{A}\tau)\mathbf{x}_0 d\tau = \left(\mathbf{E} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!}\right)\mathbf{x}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_k(t) &= \dots = \left(\mathbf{E} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!}\right)\mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

führt. Hierbei stellt  $\mathbf{E}$  die  $(n \times n)$ -Einheitsmatrix dar. Damit kann die Lösung von (3.2) in der Form

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0 \quad (3.3)$$

mit

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}, \quad A^0 = E \quad (3.4)$$

angegeben werden. Dabei wird  $\Phi(t)$  als *Transitionsmatrix* bezeichnet. Wegen der unmittelbaren Ähnlichkeit zur Exponentialreihe schreibt man auch

$$\Phi(t) = \exp(At). \quad (3.5)$$

Wie man sich leicht überzeugen kann gilt  $\Phi(0) = E$ . Somit erfüllt  $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0$  sowohl die Differentialgleichung (3.2) als auch die Anfangsbedingung  $\mathbf{x}(0) = \Phi(0)\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$ . Weitere Eigenschaften der Transitionsmatrix sind untenstehend zusammengefasst.

**Lemma 3.1: Eigenschaften der Transitionsmatrix**

Die Transitionsmatrix  $\Phi(t)$  erfüllt die Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \Phi(0) = E && \text{(Anfangswert)} \\ \text{(ii)} \quad & \Phi(t + \tau) = \Phi(t)\Phi(\tau) && \text{(Produkteigenschaft)} \\ \text{(iii)} \quad & \Phi^{-1}(t) = \Phi(-t) && \text{(Invertierbarkeit)} \\ \text{(iv)} \quad & \frac{d}{dt}\Phi(t) = A\Phi(t) && \text{(Differenzierbarkeit)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

**Aufgabe 3.14.** Beweisen Sie die Eigenschaften (3.6).

**Aufgabe 3.15.** Bestimmen Sie die Transitionsmatrix des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

und geben Sie damit die Lösung der Differentialgleichung an.

**Lösung 3.15.** Mittels vollständiger Induktion kann leicht gezeigt werden, dass gilt

$$A^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & a \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_1^j \lambda_2^{k-j-1} \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix},$$

was mit (3.4) und

$$\sum_{j=0}^{k-1} \lambda_1^j \lambda_2^{k-j-1} = \frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad k \geq 1$$

auf

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & a \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$



führt. Damit ergibt sich die Lösung der Differenzialgleichung zu

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} x_{1,0} + a \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} x_{2,0}, \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t} x_{2,0}.$$

Aufgrund der Linearität und Zeitinvarianz der betrachteten Systeme erlaubt die so eingeführte Transitionsmatrix die Lösung der nicht-autonomen Zustandsdifferenzialgleichung (3.1).

### Satz 3.1

Die allgemeine Lösung des Systems (3.1) lautet

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)B\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (3.7a)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \quad (3.7b)$$

mit der Transitionsmatrix  $\Phi(t)$  aus (3.5).

Die Herleitung der allgemeinen Lösung (3.7) erfolgt über die *Methode der Variation der Konstanten*. Die homogene Lösung für  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$  ist durch (3.3) gegeben. Für  $\mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}$  wird der Ansatz für die partikuläre Lösung

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{p}(t)$$

in (3.1a) eingesetzt, was auf

$$\frac{d}{dt}\Phi(t)\mathbf{p}(t) + \Phi(t)\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = A\Phi(t)\mathbf{p}(t) + B\mathbf{u}(t)$$

führt. Mit der Differenzierbarkeitseigenschaft (iv) aus (3.6) vereinfacht sich diese Gleichung auf

$$\Phi(t)\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = B\mathbf{u}(t)$$

und weiter mit der Invertierbarkeitseigenschaft (iii) aus (3.6) auf

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = \Phi(-t)B\mathbf{u}(t).$$

Die Integration über  $t$  führt auf

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + \int_0^t \Phi(-\tau)B\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

womit sich mit dem Lösungsansatz und der Produkteigenschaft (ii) aus (3.6)

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{p}_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi(-\tau)B\mathbf{u}(\tau)d\tau = \Phi(t)\mathbf{p}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

ergibt. Die Integrationskonstante  $\mathbf{p}_0$  kann somit leicht aus der Anfangsbedingung  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  zu  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{x}_0$  bestimmt werden, was zusammen mit der Gleichung (3.1b) für den Ausgang  $\mathbf{y}(t)$  auf (3.7) führt.

Es sei bemerkt, dass zur Berechnung der Transitionsmatrix  $\Phi(t)$  eine Reihe von sowohl analytischen als auch numerischen Verfahren existiert. Dabei seien insbesondere der *Entwicklungssatz nach Sylvester*, die Transformation der Systemmatrix  $A$  in *Diagonalform* bzw. *Jordansche Normalform* sowie

die Nutzung der *Laplace-Transformation* mit geeigneten Korrespondenztabelle genannt. Diese werden in den folgenden Abschnitten näher betrachtet.

Zudem sei der Vollständigkeit halber erwähnt, dass für lineare, zeitvariante Systeme (2.5) vollkommen analoge Überlegungen angestellt werden können, die in ähnlicher, jedoch etwas komplizierter Weise, auf die Existenz einer Transitionsmatrix schließen lassen. Hierzu sei beispielsweise auf die so genannte Peano–Baker Reihe verwiesen, die eine Lösung der entsprechenden sukzessiven Approximation nach Picard darstellt. Für eine ausführliche Analyse linearer, zeitvarianter Systeme wird beispielsweise auf [6, 2] verwiesen.

### 3.2 Zustands- und Ähnlichkeitstransformationen

Wie schon in den einführenden Beispielen in Abschnitt 1.3 angemerkt wurde, ist die Wahl der Zustandsgrößen zur Beschreibung eines dynamischen Systems keinesfalls eindeutig. Eine zur mathematischen Beschreibung des linearen, zeitinvarianten Systems (3.1) *äquivalente Darstellung* kann durch eine *reguläre Zustandstransformation* der Form

$$\mathbf{x}(t) = V\mathbf{z}(t) \tag{3.8}$$

in den *neuen Zustand*  $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^n$  mit der regulären  $(n \times n)$ -Matrix  $V$ ,  $\det V \neq 0$  erzielt werden. Angewandt auf (3.1) ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= V^{-1}A\mathbf{z} + V^{-1}B\mathbf{u}, & t > 0, & \mathbf{z}(0) = V^{-1}\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{z} + D\mathbf{u}, & t \geq 0. & \end{aligned}$$

bzw.

$$\dot{\mathbf{z}} = \tilde{A}\mathbf{z} + \tilde{B}\mathbf{u}, \quad t > 0, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \tag{3.9a}$$

$$\mathbf{y} = \tilde{C}\mathbf{z} + \tilde{D}\mathbf{u}, \quad t \geq 0. \tag{3.9b}$$

mit  $\tilde{A} = V^{-1}AV$ ,  $\tilde{B} = V^{-1}B$ ,  $\tilde{C} = CV$ ,  $\tilde{D} = D$ , und  $\mathbf{z}_0 = V^{-1}\mathbf{x}_0$ . Man sagt nun, dass die beiden Systeme  $\Sigma(A, B, C, D)$  und  $\Sigma(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$  äquivalent sind. Wird die quadratische Matrix  $A$  mit Hilfe der regulären quadratischen Matrix  $V$  gemäß der Vorschrift  $\tilde{A} = V^{-1}AV$  transformiert, dann spricht man auch von einer *Ähnlichkeitstransformation*. Die Matrizen  $A$  und  $\tilde{A}$  heißen *ähnlich*, und es gilt:

- (i) Die Matrizen  $A$  und  $\tilde{A}$  haben die selben Eigenwerte, d.h. die Eigenwerte sind invariant bezüglich einer Ähnlichkeitstransformation.
- (ii) Ist  $A$  symmetrisch, dann ist auch  $\tilde{A}$  symmetrisch falls  $V$  orthogonal ist, d.h.  $V^T V = E$ .

**Aufgabe 3.16.** Zeigen Sie, dass die beiden vorangegangenen Aussagen (i) und (ii) gültig sind.

**Lösung 3.16.** Ist  $\mathbf{v}$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ , dann ist  $\tilde{\mathbf{v}} = V^{-1}\mathbf{v}$  Eigenvektor von  $\tilde{A}$  zum selben Eigenwert, da aus  $(A - \lambda E)\mathbf{v} = \mathbf{0}$  und  $V^{-1}V = E$  folgt, dass

$$\mathbf{0} = V^{-1}(A - \lambda E)\mathbf{v} = V^{-1}(A - \lambda E)V\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{A} - \lambda E)\tilde{\mathbf{v}}$$

bzw. mit dem Determinantensatz gilt

$$\begin{aligned} \det(\tilde{A} - \lambda E) &= \det(V^{-1}AV - \lambda E) = \det(V^{-1}(A - \lambda E)V) \\ &= \det V^{-1} \det V \det(A - \lambda E) = \det(A - \lambda E). \end{aligned}$$

Die Umkehrung ist unmittelbar einsichtig. Sei nun  $A$  symmetrisch und gelte  $V^T V = E$ , dann gilt

$$A = A^T = (V \tilde{A} V^{-1})^T = V^{-T} \tilde{A}^T V^T = V \tilde{A}^T V^{-1} = V \tilde{A} V^{-1},$$

woraus die Symmetrie von  $\tilde{A}$  folgt.

Die äquivalente Systemdarstellung  $\Sigma(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$  im neuen Zustand  $\mathbf{z}(t)$  kann u.a. dazu genutzt werden, die Bestimmung der Lösung des Systems gemäß Satz 3.1, d.h.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi(t) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) B \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ \mathbf{y}(t) &= C \mathbf{x}(t) + D \mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

zu vereinfachen. Dazu ist die Transformationsmatrix  $V$  in (3.8) so zu wählen, dass die erhaltene Struktur der Matrix  $\tilde{A}$  eine möglichst einfache Bestimmung der zugehörigen Transitionsmatrix  $\tilde{\Phi}(t)$  erlaubt. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn  $\tilde{A}$  in Diagonalform oder Jordanscher Normalform vorliegt. Die Lösung des transformierten Systems (3.9) lautet mit Satz 3.1

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= \tilde{\Phi}(t) \mathbf{z}_0 + \int_0^t \tilde{\Phi}(t-\tau) \tilde{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ \mathbf{y}(t) &= \tilde{C} \mathbf{z}(t) + \tilde{D} \mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

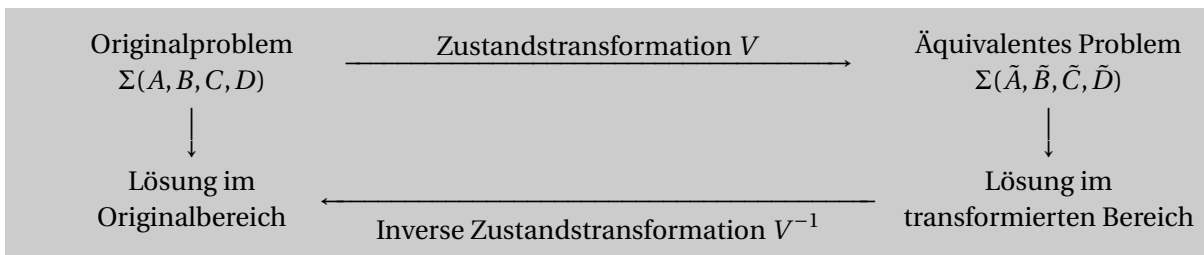
Mit (3.8) und den ermittelten Ausdrücken für die Matrizen  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$  und  $\tilde{D}$  führt die Rücktransformation auf

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= V \tilde{\Phi}(t) V^{-1} \mathbf{x}_0 + \int_0^t V \tilde{\Phi}(t-\tau) V^{-1} B \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ \mathbf{y}(t) &= C \mathbf{x}(t) + D \mathbf{u}(t), \end{aligned}$$

womit sich leicht der Zusammenhang zwischen den Transitionsmatrizen  $\Phi(t)$  und  $\tilde{\Phi}(t)$  als

$$\Phi(t) = V \tilde{\Phi}(t) V^{-1} \tag{3.10}$$

ableiten lässt. Diese Vorgehensweise ist graphisch in dem nachfolgenden Diagramm veranschaulicht.



Im Weiteren werden nun zwei wichtige Beispiele für Ähnlichkeitstransformationen betrachtet, nämlich die Transformation in Diagonalform sowie in die Jordansche Normalform. Hierzu werden zunächst einige wichtige Eigenschaften aus der linearen Algebra zu Eigenwerten und zugehörigen Eigenvektoren reeller Matrizen zusammengefasst.

### 3.2.1 Eigenwerte und Eigenvektoren reeller Matrizen

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine  $(n \times n)$ -Matrix mit reellen Einträgen. Das zugehörige Eigenwertproblem lautet bekannterweise

$$(A - \lambda E)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (3.11)$$

wobei  $\lambda$  den Eigenwert und  $\mathbf{v}$  den zugehörigen Eigenvektor bezeichnen. Mit Tabelle 2.1 folgt unmittelbar, dass das Eigenwertproblem nur dann eine von Null verschiedene Lösung aufweist, wenn die Matrix  $A - \lambda E$  singulär ist, d.h.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (3.12)$$

gilt. Dieses *charakteristische Polynom* der Matrix  $A$  habe  $m$  verschiedene Wurzeln  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$  mit entsprechenden Vielfachheiten  $n_1, n_2, \dots, n_m$ . Hierbei bezeichnet die Zahl  $n_k$  die *algebraische Vielfachheit* des Eigenwerts  $\lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , während die *geometrische Vielfachheit*  $g_k$  des Eigenwerts  $\lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  als die Dimension des Eigenraumes zum Eigenwert  $\lambda_k$  definiert ist, d.h.

$$g_k = \dim(\ker(A - \lambda_k E)).$$

Vereinfachend ausgedrückt, stellt  $g_k$  die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren dar, die  $A\mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k$  erfüllen. Dabei gilt  $1 \leq g_k \leq n_k$ , was bedeutet, dass es zu einem mehrfachen Eigenwert  $\lambda_k$ ,  $n_k > 1$  wenigstens einen und höchstens  $n_k$  linear unabhängige Eigenvektoren gibt. Zudem können die folgenden Eigenschaften leicht nachgewiesen werden (siehe z.B. [7]):

- (i) Die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist genau dann regulär, wenn  $\lambda_k \neq 0$  für alle  $k = 1, \dots, m$ .
- (ii) Ist  $\lambda_k$  Eigenwert von  $A$ , so ist  $1/\lambda_k$  Eigenwert von  $A^{-1}$ .
- (iii) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_k$  sind stets linear unabhängig.
- (iv) Sind alle Eigenwerte voneinander verschieden (disjunkt), dann gehört zu jedem Eigenwert  $\lambda_k$  genau ein linear unabhängiger Eigenvektor  $\mathbf{v}_k$ , der bis auf eine beliebige Konstante eindeutig bestimmt ist. In diesem Fall sind die  $n$  Eigenvektoren linear unabhängig und bilden damit eine Eigenbasis von  $A$ .
- (v) Treten mehrfache Eigenwerte auf, so kann die Gesamtzahl linear unabhängiger Eigenvektoren kleiner als  $n$  sein.
- (vi) Die Links- und Rechtseigenvektoren  $\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k$  zweier verschiedener Eigenwerte  $\lambda_j \neq \lambda_k$  einer Matrix  $A$  sind zueinander orthogonal, d.h.  $\mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_j = 0$  für  $j \neq k$ .

Für spezielle Matrizen, z.B. symmetrische ( $A = A^T$ ) oder hermitesche Matrizen ( $A = A^* = \overline{A^T}$ ,  $A$  komplexwertig), können zudem noch weiterführende Eigenschaften abgeleitet werden.

#### Geometrische Vielfachheit identisch zur algebraischen Vielfachheit

Sind für alle Eigenwerte die algebraische und geometrische Vielfachheit identisch, d.h.  $n_k = g_k$  für alle  $k = 1, \dots, m$ , so spannen die Eigenvektoren der Matrix  $A$  den Raum  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{C}^n$  auf und bilden eine Eigenbasis von  $A$ . Insbesondere gilt

$$(A - \lambda_k E)\mathbf{v}_{k_j} = \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, n_k, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$AV = V \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_m \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

mit

$$\Lambda_k = \text{diag}(\{\lambda_k\}_{j=1, \dots, n_k}) = \begin{bmatrix} \lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_k \times n_k} \quad (3.14)$$

$$V = [V_1 | V_2 | \dots | V_m], \quad (3.15)$$

wobei

$$V_k = [\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_2}, \dots, \mathbf{v}_{k_{g_k}}] \in \mathbb{C}^{n \times g_k}. \quad (3.16)$$

### Geometrische Vielfachheit echt kleiner als algebraische Vielfachheit

Ist für einen Eigenwert  $\lambda_k$  die geometrische Vielfachheit  $g_k$  echt kleiner als die algebraische Vielfachheit  $n_k$ , d.h.  $n_k \neq g_k$  für mindestens ein  $k = 1, \dots, m$ , dann müssen zusätzlich zu den Eigenvektoren die entsprechenden *Hauptvektoren* berechnet werden. Ein Vektor  $\mathbf{v}$  heißt dabei Hauptvektor  $r$ -ter Stufe, wenn gilt

$$(A - \lambda E)^r \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \wedge \quad (A - \lambda E)^{r-1} \mathbf{v} \neq \mathbf{0}.$$

Eigenvektoren sind somit Hauptvektoren erster Stufe. Die Gesamtheit aller Eigen- und Hauptvektoren zu einem Eigenwert  $\lambda_k$  nennt man den *algebraischen Eigenraum*, dessen Dimension gleich der algebraischen Vielfachheit  $n_k$  des Eigenwerts ist.

Um dies zu illustrieren wird angenommen, dass  $\lambda_k$  ein Eigenwert der  $(n \times n)$ -Matrix  $A$  ist mit der algebraischen Vielfachheit  $n_k$  und  $g_k < n_k$ . Neben den Eigenvektoren  $\{\mathbf{v}_{k_j}\}_{j=1, \dots, g_k}$ , die definitionsgemäß die Beziehung

$$(A - \lambda_k E) \mathbf{v}_{k_j} = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, g_k \quad (3.17)$$

erfüllen, existieren zudem  $n_k - g_k$  linear unabhängige Hauptvektoren  $\mathbf{v}_{k_j} \neq \mathbf{0}$ ,  $j = g_k + 1, \dots, n_k$ . Diese können aus der Lösung der jeweiligen Gleichungssequenz

$$(A - \lambda_k E) \mathbf{v}_{k_j}^{(l)} = \mathbf{v}_{k_j}^{(l-1)}, \quad l = 2, \dots, l_k \quad \text{mit} \quad \mathbf{v}_{k_j}^{(1)} = \mathbf{v}_{k_j} \quad j = 1, \dots, g_k. \quad (3.18)$$

ermittelt werden, wobei (3.18) auch als Jordan-Kette der Länge  $l_k$  bezeichnet wird [5]. Eine Basis des  $\mathbb{R}^{n \times n}$  (analog des  $\mathbb{C}^{n \times n}$ ) wird als Jordan-Basis der Matrix  $A$  bezeichnet, wenn sie aus den linear unabhängigen Elementen einer oder mehrerer Jordan-Ketten besteht. Dabei sind die Eigenvektoren, als Startwert der Jordan-Ketten, natürlich jeweils Bestandteil einer Jordan-Basis. Folglich gilt

$$\begin{aligned}
& A \left[ \mathbf{v}_{k_1}^{(2)}, \dots, \mathbf{v}_{k_1}^{(l_1)}, \dots, \mathbf{v}_{k_{g_k}}^{(2)}, \dots, \mathbf{v}_{k_{g_k}}^{(l_{g_k})} \right] \\
&= \lambda_k \left[ \mathbf{v}_{k_1}^{(2)}, \dots, \mathbf{v}_{k_1}^{(l_1)}, \dots, \mathbf{v}_{k_{g_k}}^{(2)}, \dots, \mathbf{v}_{k_{g_k}}^{(l_{g_k})} \right] \\
&\quad + \left[ \mathbf{0}, \mathbf{v}_{k_1}^{(l_1-1)}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{v}_{k_{g_k}}^{(l_{g_k}-1)} \right]
\end{aligned}$$

mit  $\sum_{j=1}^{g_k} l_j = n_k$  bzw. in Matrixschreibweise

$$AV_k = V_k \underbrace{(\lambda_k E + N_k)}_{J_k} \quad (3.19)$$

mit der  $(n_k \times n_k)$ -Einheitsmatrix  $E$ , der Matrix der Eigen- und Hauptvektoren

$$V_k = \left[ \mathbf{v}_{k_1}^{(2)}, \dots, \mathbf{v}_{k_1}^{(l_1)}, \dots, \mathbf{v}_{k_{g_k}}^{(2)}, \dots, \mathbf{v}_{k_{g_k}}^{(l_{g_k})} \right] \in \mathbb{C}^{n_k \times n_k} \quad (3.20)$$

und der  $(n_k \times n_k)$ -Matrix

$$N_k = \begin{bmatrix} N^{(1)} & & & & \\ & N^{(2)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & N^{(g_k)} & \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad N^{(j)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{l_j \times l_j} \quad (3.21)$$

Die in (3.19) eingeführte Matrix

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_k \times n_k} \quad (3.22)$$

wird auch als *Jordan-Block* bezeichnet [5]. Die Matrix  $N_k$  weist eine besondere Struktur auf, die sich darin zeigt, dass  $N_k$  *nilpotent der Ordnung*  $\max_j l_j$  ist, d.h.

$$N_k^{(\max_j l_j)-1} \neq 0 \quad \wedge \quad N_k^{\max_j l_j} = 0. \quad (3.23)$$

Es ist offensichtlich, dass (3.13)–(3.16) inhärent in (3.19)–(3.21) enthalten sind.

### 3.2.2 Transformation auf Diagonalforn

Die obigen Ausführung zeigen, dass die  $(n \times n)$ -Matrix  $A$  des linearen, zeitinvarianten Systems (3.1) genau dann durch eine Ähnlichkeitstransformation auf Diagonalforn gebracht werden kann, wenn für jeden Eigenwert  $\lambda_k$  gilt, dass  $g_k = n_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . Die Ähnlichkeitstransformation  $V$  ist dabei

durch (3.15) gegeben, womit sich die transformierte und diagonalisierte Dynamikmatrix aus (3.13) zu

$$\tilde{A} = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & & \\ & \Lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Lambda_m \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

mit  $\Lambda_k$  aus (3.14) ergibt. Die transformierte Transitionsmatrix folgt somit unmittelbar aus (3.4) bzw. (3.5) in der Form

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \exp(\Lambda_1 t) & & & \\ & \exp(\Lambda_2 t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp(\Lambda_m t) \end{bmatrix} \quad \text{mit } \exp(\Lambda_k t) = \text{diag}\{\{\exp(\lambda_k t)\}_{j=1, \dots, n_k}\}. \quad (3.25)$$

Die Transitionsmatrix des Originalproblems erhält man dann aus (3.10).

**Beispiel 3.1.** Man betrachte das autonome lineare zeitinvariante System

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Die Eigenwerte von  $A$  ergeben sich zu  $\lambda_1 = 3$  mit  $n_1 = 1$  und  $\lambda_2 = 1$  mit  $n_2 = 2$ . Da  $\text{rang}(A - \lambda_1 E) = 2$  und  $\text{rang}(A - \lambda_2 E) = 1$  folgt wegen<sup>a</sup>  $\dim(\ker(A - \lambda_k E)) = n - \text{rang}(A - \lambda_k E)$  für  $n = 3$ , dass  $g_1 = 1$  und  $g_2 = 2$ . Mit

$$(A - \lambda_1 E)\mathbf{v}_{1_1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{v}_{1_1} = \mathbf{0}$$

ergibt sich der Eigenvektor zu  $\lambda_1 = 3$  als  $\mathbf{v}_{1_1}^T = [1, 0, 0]$ . Für  $\lambda_2 = 1$  gilt

$$(A - \lambda_2 E)\mathbf{v}_{2_j} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_{2_j} = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2,$$

was auf  $\mathbf{v}_{2_1}^T = [0, 1, 1]$  und  $\mathbf{v}_{2_2}^T = [-1, 1, 0]$  führt. Die Transformationsmatrix ergibt sich mit (3.15) zu

$$V = [\mathbf{v}_{1_1}, \mathbf{v}_{2_1}, \mathbf{v}_{2_2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Einführen von  $\mathbf{x}(t) = V\mathbf{z}(t)$  führt damit auf das transformierte System

$$\dot{\mathbf{z}} = V^{-1}AV\mathbf{z} = \tilde{A}\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{z}, \quad t > 0, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 = V^{-1}\mathbf{x}_0.$$

Die Auswertung von (3.25) liefert die Transformationsmatrix des transformierten Systems

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \exp(3t) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(t) \end{bmatrix},$$

woraus sich mit (3.10) die Transformationsmatrix des Originalsystems ergibt, d.h.

$$\Phi(t) = V\tilde{\Phi}(t)V^{-1} = \begin{bmatrix} \exp(3t) & \exp(3t) - \exp(t) & \exp(t) - \exp(3t) \\ 0 & \exp(t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(t) \end{bmatrix}.$$

<sup>a</sup>Siehe z.B. [5, Theorem 2.49].

### 3.2.3 Transformation auf Jordansche Normalform

Existiert mindestens ein Eigenwert, dessen geometrische Vielfachheit echt kleiner ist als dessen algebraische Vielfachheit, dann kann mit (3.19)–(3.21) eine transformierte Systemdarstellung in der Jordanschen Normalform bestimmt werden. Die hierzu notwendige Ähnlichkeitstransformation folgt unmittelbar aus (3.20) für  $k = 1, 2, \dots, m$ , d.h.

$$V = [V_1 | V_2 | \dots | V_m], \quad (3.26)$$

mit  $V_k$  aus (3.16) falls  $g_k = n_k$  bzw. aus (3.20) für  $g_k < n_k$ . Mit (3.19) kann nun unmittelbar die transformierte Systemmatrix bestimmt werden, die sich hierbei allgemein zu

$$\tilde{A} = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

ergibt, wobei  $J_k = \Lambda_k$  falls  $g_k = n_k$ . Die so erhaltene Matrix  $\tilde{A}$  liegt in der *Jordanschen Normalform* vor und stellt eine Blockdiagonalmatrix dar, mit den entsprechenden Jordan-Blöcken  $J_k$  aus (3.19) entlang der Diagonalen. Mit der Eigenschaft der Nilpotenz der Ordnung  $p = \max_j l_j$  von  $N_k$  kann für jedes  $k \in \{1, \dots, m\}$  leicht auf die folgende Gleichungssequenz

$$\begin{aligned} \exp(J_k t) &= \underbrace{\exp((\lambda_k E + N_k) t)}_{(\star)} = \exp(\lambda_k E t) \exp(N_k t) \\ &= \exp(\lambda_k E t) \left( E + N_k t + \dots + \frac{N_k^{p-1} t^{p-1}}{p!} \right) \\ &\stackrel{(3.21)}{=} \exp(\lambda_k t) \begin{bmatrix} \exp(N_k^{(1)} t) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp(N_k^{(g_k)} t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.28)$$

mit

$$\exp(N_k^{(j)} t) = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{l_j-1}}{(l_j-1)!} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$



geschlossen werden, womit sich die transformierte Transitionsmatrix sehr einfach in geschlossener Form

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \exp(J_1 t) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(J_m t) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

angeben lässt. Es sei dabei bemerkt, dass  $(\star)$  in (3.28) nur deshalb gilt, weil die Matrizen  $E$  und  $N_k$  kommutieren, d.h. die Beziehung  $EN_k = N_kE$  gilt.

**Aufgabe 3.17.** Bestimmen Sie die transformierte Dynamikmatrix  $\tilde{A}$  in Jordanscher Normalform und die Transitionsmatrix  $\Phi(t) = \exp(At)$  für das System

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

**Lösung 3.17.** Für die Eigenwerte von  $A$  gilt  $\lambda_1 = 3$  mit  $n_1 = 2$  und  $g_1 = 1$ . Der zugehörige Eigen- und der Hauptvektor ergeben sich zu

$$\mathbf{v}_{1_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{1_1}^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

woraus die Transformationsmatrix

$$V = [\mathbf{v}_{1_1}, \mathbf{v}_{1_1}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

folgt. Dies führt auf die transformierte Dynamikmatrix in Jordanscher Normalform

$$\tilde{A} = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

sowie die transformierte Transitionsmatrix

$$\tilde{\Phi}(t) = \exp(\tilde{A}t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Wegen  $\Phi(t) = V\tilde{\Phi}(t)V^{-1}$  führt dies auf

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{3t}(1+2t) & 4te^{3t} \\ -te^{3t} & e^{3t}(1-2t) \end{bmatrix}.$$

**Aufgabe 3.18.** Bestimmen Sie die transformierte Dynamikmatrix  $\tilde{A}$  in Jordanscher Normalform und die Transitionsmatrix  $\Phi(t) = \exp(At)$  für das System

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Verifizieren Sie Ihre Berechnungen durch die Verwendung von MATHEMATICA. Nutzen Sie hierzu die Befehle `Eigensystem` und `JordanDecomposition`.

**Lösung 3.18.** Für die Transformationsmatrix und die transformierte Dynamikmatrix in Jordanscher Normalform gilt

$$V = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Eine  $(n \times n)$ -Matrix  $A$  mit rein reellen Elementen kann nur Eigenwerte besitzen, die entweder *reell* oder *konjugiert komplex* sind. Dies folgt unmittelbar aus dem Fundamentalsatz der Algebra für Nullstellen von Polynomen angewandt auf das charakteristische Polynom (3.12). Die eingeführte Methode der Diagonalisierung bzw. der Überführung in die Jordansche Normalform kann auch auf Systeme mit konjugiert komplexen Eigenwerten angewendet werden. In diesem Fall sind jedoch sowohl die Transformationsmatrix  $V$  als auch die transformierte Dynamikmatrix  $\tilde{A}$  komplexwertige Matrizen.

**Satz 3.2**

Besitzt eine Matrix  $A$  einen konjugiert komplexen Eigenwert, dann sind auch die zugehörigen Eigenvektoren konjugiert komplex.

**Aufgabe 3.19.** Beweisen Sie Satz 3.2.

Dies stört zwar nicht, läuft jedoch dem Wunsch entgegen für eine reellwertige Systemdarstellung  $\Sigma(A, B, C, D)$  auch eine ebenfalls reellwertige transformierte Systemdarstellung  $\Sigma(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$  zu erhalten. Dies kann in Form der so genannten *reellen Jordanschen Normalform* erreicht werden, die für den Fall komplexwertiger Eigenwerte auf einer Umordnung der Eigen- bzw. Hauptvektoren basiert.

**Satz 3.3: Reelle Jordansche Normalform**

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $r$  reellen und  $(m - r)/2$  konjugiert komplexen Eigenwerten. Dann existiert eine Ähnlichkeitstransformation mit der Transformationsmatrix

$$V = [V_1 | \dots | V_r | \Re(\mathbf{v}_{(r+1)_1}), \Im(\mathbf{v}_{(r+1)_1}), \Re(\mathbf{v}_{(r+1)_1}^{(2)}), \Im(\mathbf{v}_{(r+1)_1}^{(2)}), \dots] \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.30)$$

bestehend aus linear unabhängigen (komplexwertigen) Eigen- und Hauptvektoren mit  $V_k$  aus (3.20) so, dass die transformierte Matrix die Form

$$\tilde{A} = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_l \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

annimmt. Hierbei bezeichnen  $J_k$  die Jordan-Blöcke, deren Struktur für reelle Eigenwerte durch (3.22), d.h.

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

bzw. für konjugiert komplexe Eigenwerte  $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$  in der Form

$$J_k = \begin{bmatrix} W & E_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & W & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W & E_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & W \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

mit

$$W = \begin{bmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ -\beta_k & \alpha_k \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

gegeben ist.

Der Beweis dieses Satzes ist beispielsweise in [3, 7, 5] zu finden. Das Vorgehen zur Bestimmung der zugehörigen transformierten Transitionsmatrix  $\tilde{\Phi}(t)$  entspricht im Wesentlichen dem aus (3.28), wobei zusätzlich zu beachten ist, dass gilt

$$\exp(Wt) = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} \cos(\beta t) & e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\ -e^{\alpha t} \sin(\beta t) & e^{\alpha t} \cos(\beta t) \end{bmatrix}.$$

Dies wird im nachfolgenden Beispiel anhand der Bestimmung der Transitionsmatrix eines Systems mittels der reellen Jordanschen Normalform illustriert.

**Beispiel 3.2.** *Im Weiteren wird Satz 3.3 zur Bestimmung der Transitionsmatrix des Systems*

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -6 & -8 & -10 \\ -\frac{3}{2} & 4 & 8 & 12 & 15 \\ 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{2} & -4 & -\frac{9}{4} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

*herangezogen. Die Eigenwerte von  $A$  ergeben sich zu  $\lambda_1 = -3$  mit  $n_1 = 1$  und  $\lambda_2 = 1 \pm 2i$  mit  $n_2 = 2$  und  $g_2 = 1$ . Die Eigenvektoren zu  $\lambda_1$  und  $\lambda_2 = 1 + 2i$  ergeben sich zu*

$$\mathbf{v}_{1_1}^T = \left[0, 0, 0, -\frac{5}{4}, 1\right], \quad \mathbf{v}_{2_1}^T = \left[\frac{8}{5} + \frac{4i}{5}, -\frac{12}{5} - \frac{6i}{5}, 0, 1, 0\right].$$

*Der zugehörige Hauptvektor folgt mit (3.18) zu*

$$\mathbf{v}_{2_1}^{(2)T} = \left[\frac{12}{5} - \frac{4i}{5}, -\frac{14}{5} + \frac{8i}{5}, \frac{4}{5} - \frac{8i}{5}, 0, 0\right].$$

*Damit lautet die Transformationsmatrix*

$$V = \left[ \mathbf{v}_{1_1}, \Re(\mathbf{v}_{2_1}), \Im(\mathbf{v}_{2_1}), \Re(\mathbf{v}_{2_1}^{(2)}), \Im(\mathbf{v}_{2_1}^{(2)}) \right] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{8}{5} & \frac{4}{5} & \frac{12}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{12}{5} & -\frac{6}{5} & -\frac{14}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{8}{5} \\ -\frac{5}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und die transformierte Dynamikmatrix in der reellen Jordanschen Normalform ergibt sich zu

$$\tilde{A} = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Mit den obigen Ausführungen kann somit die Transitionsmatrix des transformierten Systems als

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t \cos(2t) & e^t \sin(2t) & e^t t \cos(2t) & e^t t \sin(2t) \\ 0 & -e^t \sin(2t) & e^t \cos(2t) & -e^t t \sin(2t) & e^t t \cos(2t) \\ 0 & 0 & 0 & e^t \cos(2t) & e^t \sin(2t) \\ 0 & 0 & 0 & -e^t \sin(2t) & e^t \cos(2t) \end{bmatrix}$$

bestimmt werden, womit man die Transitionsmatrix des Originalsystems durch die Auswertung von  $\Phi(t) = V\tilde{\Phi}(t)V^{-1}$  erhält.

**Aufgabe 3.20.** Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Verifizieren Sie Ihre Berechnungen durch die Verwendung von MATHEMATICA oder MAXIMA. Nutzen Sie hierzu in MATHEMATICA die Befehle `Eigensystem` und `JordanDecomposition`. Zur Bestimmung der Hauptvektoren empfiehlt es sich eine symbolische Gauss-Elimination durch die Verwendung des Befehls `RowReduce` zu realisieren. Alternativ führt die Verwendung von MAXIMA auf die Jordansche Normalform durch die Nutzung der Befehle `eigenvectors` bzw. `jordan` gefolgt von der Anwendung des Befehls `displayJordan` auf das erhaltene Ergebnis. Dies erfordert zudem die Einbindung des Pakets `diag` mittels `load("diag")` \$.

**Lösung 3.20.** Es gilt

$$\tilde{A} = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Aufgabe 3.21.** Bestimmen Sie die reelle Jordansche Normalform der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Verifizieren Sie Ihre Berechnungen durch die Verwendung von MATHEMATICA oder MAXIMA. Nutzen Sie hierzu die Befehle `Eigensystem` und `JordanDecomposition`, die jeweils auf komplexwertige Darstellungen führen. Zur Bestimmung der Hauptvektoren empfiehlt es sich eine symbolische Gauss-Elimination durch die Verwendung des Befehls `RowReduce` zu realisieren. Alternativ führt die Verwendung von MAXIMA auf die Jordansche Normalform durch die Nutzung der Befehle `eigenvectors` bzw. `jordan` gefolgt von der Anwendung des Befehls `displayJordan` auf das erhaltene Ergebnis.

Dies erfordert zudem die Einbindung des Pakets `diag` mittels `load("diag")`\$. Auch hier wird eine komplexwertige Jordansche Normalform ermittelt, die entsprechend der genannten Vorgehensweise in MATHEMATICA in die reelle Jordansche Normalform überführt werden kann.

**Lösung 3.21.** Es gilt

$$\tilde{A} = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 3.3 Stabilität linearer Systeme

Mit den bisherigen Erkenntnissen können nun leicht Aussagen über das dynamische Verhalten und insbesondere die Stabilität linearer, zeitinvarianter, autonomer Systeme

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.35)$$

getroffen werden.

#### 3.3.1 Bedeutung der Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Eigenvektoren einer Matrix  $A$ , die bereits für die Transformation auf Diagonalfom bzw. in die Jordansche Normalform von Bedeutung waren, erlauben zudem eine geometrische Interpretation. Hierzu wird der Begriff eines *invarianten Unterraums* benötigt.

##### Definition 3.1

Es sei  $V$  ein linearer Unterraum von  $\mathbb{R}^n$  mit der Basis  $\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k\}$ . Man nennt  $V$  invariant gegenüber einer Abbildung  $A$ , wenn für alle  $\mathbf{x} \in V$  gilt, dass auch  $A\mathbf{x} \in V$ .

Aus der Definition (3.11) eines Eigenvektors ist unmittelbar einsichtig, dass der Unterraum

$$V = \text{span}\{\mathbf{v}_{1_1}, \dots, \mathbf{v}_{1_{g_1}}, \dots, \mathbf{v}_{m_1}, \dots, \mathbf{v}_{m_{g_m}}\}$$

invariant gegenüber der Abbildung  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist. Sei nun  $\lambda_k$  Eigenwert von  $A$  mit zugehörigem Eigenraum  $\mathcal{E}_k = \text{span}\{\mathbf{v}_{k_j}\}_{j=1, \dots, g_k}$  und sei der Anfangswert Element von  $\mathcal{E}_k$ , d.h.

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{j=1}^{g_k} \gamma_{j,0} \mathbf{v}_{k_j} \in \mathcal{E}_k.$$

Die weiteren Ausführungen beziehen sich nur auf den Fall, dass  $n_k = g_k$  für alle  $k = 1, \dots, m$  gilt. Aufgrund der Invarianzeigenschaft gilt offenbar, dass die von  $\mathbf{x}_0$  startende Trajektorie immer in  $\mathcal{E}_k$  liegt, was auf den Lösungsansatz

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^{g_k} \gamma_j(t) \mathbf{v}_{k_j} \in \mathcal{E}_k.$$

schließen lässt. Einsetzen in (3.35) ergibt

$$\sum_{j=1}^{g_k} \frac{d}{dt} \gamma_j(t) \mathbf{v}_{k_j} = \sum_{j=1}^{g_k} \gamma_j(t) A \mathbf{v}_{k_j} = \sum_{j=1}^{g_k} \gamma_j(t) \lambda_k \mathbf{v}_{k_j} = \lambda_k \sum_{j=1}^{g_k} \gamma_j(t) \mathbf{v}_{k_j}.$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Elemente von  $\mathcal{E}_k$  führt dies auf

$$\frac{d}{dt}\gamma_j(t) = \lambda_k \gamma_j(t), \quad t > 0, \quad \gamma_j(0) = \gamma_{j,0}, \quad j = 1, \dots, g_k.$$

Dies bedeutet, dass sich das System (3.35) reduziert auf den Eigenraum  $\mathcal{E}_k$  als gewöhnliche Differenzialgleichung 1. Ordnung anschreiben lässt. Deren Lösung folgt zu

$$\gamma_j(t) = \exp(\lambda_k t) \gamma_{j,0},$$

womit sich unmittelbar

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\lambda_k t) \sum_{j=1}^{g_k} \gamma_{j,0} \mathbf{v}_{k_j} = \exp(\lambda_k t) \mathbf{x}_0$$

ergibt. Diese Lösung wird auch als *Eigenschwingung des Systems* bezeichnet.

**Beispiel 3.3.** Als Beispiel betrachte man das folgende System 2. Ordnung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1.4 & -1.2 \\ -1.2 & 0.4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Die Eigenwerte der Dynamikmatrix  $A$  ergeben sich zu  $\lambda_1 = -1$  und  $\lambda_2 = 2$  mit den zugehörigen Eigenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -0.447 \\ -0.894 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -0.894 \\ 0.447 \end{bmatrix}.$$

Mit  $V = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$  ergibt sich die auf Diagonalform transformierte Systemmatrix zu

$$\tilde{A} = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Den Verlauf der Trajektorien und die Eigenvektoren  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  zeigt Abbildung 3.1(a).

**Beispiel 3.4.** Zur weiteren Illustration betrachte man das in Beispiel 3.1 analysierte Problem mit einem einfachen Eigenwert  $\lambda_1 = 3$  und einem doppelten Eigenwert  $\lambda_2 = 1$ . Wegen  $n_2 = g_2 = 2$  existiert zu  $\lambda_2$  ein Eigenraum  $\mathcal{E}_2 = \text{span}\{\mathbf{v}_{2_j}\}_{j=1,2}$  der Dimension 2, d.h. eine Ebene in  $\mathbb{R}^3$ . Den zugehörigen Verlauf der Trajektorien, den Eigenvektor  $\mathbf{v}_1$  und die durch  $\mathbf{v}_{2_1}$  und  $\mathbf{v}_{2_2}$  aufgespannte Ebene  $\mathcal{E}_2$  zeigt Abbildung 3.1(b).

### 3.3.2 Asymptotische Stabilität

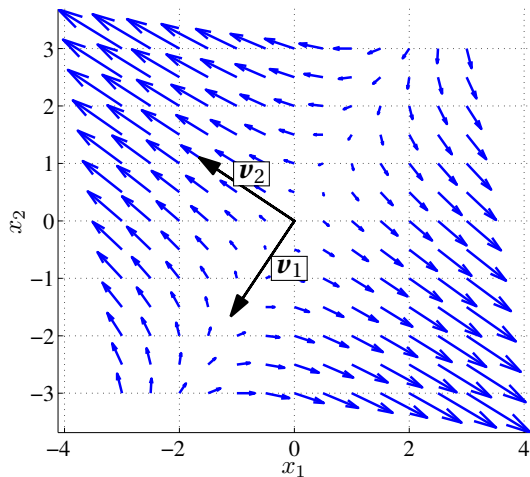
Mit den Ergebnissen aus dem vorangegangenen Abschnitt kann nun leicht auf das dynamische Verhalten von Systemen der Form (3.35) geschlossen werden [6, 4, 1].

#### Definition 3.2: Asymptotische Stabilität

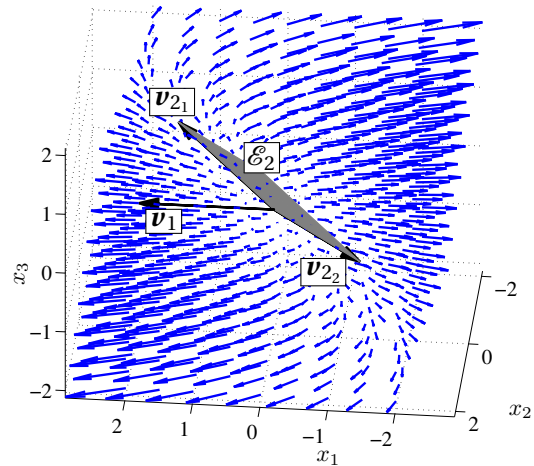
Das dynamische System (3.35) heißt asymptotisch stabil, wenn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t)\mathbf{x}_0\| = \mathbf{0} \quad (3.36)$$

für all  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ .



(a) Verlauf der Trajektorien für Beispiel 3.3.



(b) Verlauf der Trajektorien für Beispiel 3.4.

**Abb. 3.1.:** Trajektorien und Eigenräume für Beispiele 3.3 und 3.4.

Im Allgemeinen unterscheidet man zwischen *globaler und lokaler asymptotischer Stabilität*, wobei diese Unterscheidung bei linearen Systemen nicht notwendig ist, da hier die lokale asymptotische Stabilität äquivalent zur globalen asymptotischen Stabilität ist. Bei linearen Systemen werden wir im Weiteren somit nur den Begriff der asymptotischen Stabilität verwenden.

Speziell lässt sich der folgende Satz unmittelbar aus den Ergebnissen von Abschnitt 3.2 ableiten.

**Satz 3.4**

Jede Lösung des Systems (3.35) ist eine Linearkombination der Funktionen

$$t^{l_1} e^{\lambda t}, \quad t^{l_2} e^{\alpha t} \sin(\beta t), \quad t^{l_3} e^{\alpha t} \cos(\beta t)$$

für reelle Eigenwerte  $\lambda$  oder konjugiert komplexe Eigenwerte  $\lambda = \alpha \pm i\beta$  mit  $l_1, l_2, l_3 = 0, \dots, p-1$  mit  $p$  der Dimension der jeweiligen Jordan-Blöcke.

Damit folgt, dass die Trajektorien eines linearen, zeitinvarianten und zeitkontinuierlichen Systems der Form (3.35) weder in endlicher Zeit nach Null noch nach Unendlich streben können. Dies gilt jedoch nicht für nichtlineare, zeitkontinuierliche oder auch zeitdiskrete Systeme. Zudem ist das folgende Ergebnis leicht ersichtlich.

**Satz 3.5**

Das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  negativen Realteil besitzen. Man sagt dann, die Ruhelage  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$  ist asymptotisch stabil.

Der Beweis dieses Satzes erfolgt analog zu den bisherigen Ausführungen durch die Einführung der Ähnlichkeitstransformation (3.8) in die Jordansche Normalform  $\tilde{\mathbf{A}}$  der Matrix  $\mathbf{A}$ .

**Aufgabe 3.22.** Ist die Ruhelage  $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$  des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad t > 0,$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

mit

$$(i) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

$$(ii) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$(iii) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{mit } u = -[2, -6]\mathbf{x}$$

asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Lösung 3.22.** Mit Satz 3.5 folgt:

(i) Nein.

(ii) Nein für alle  $a \in \mathbb{R}$ .

(iii) Ja.



## Literatur

- [1] C.-T. Chen. *Linear System Theory and Design*. New York: Oxford Univ. Press, 1999 (zitiert auf Seite 46).
- [2] E. Freund. *Zeitvariable Mehrgrößensysteme*. Springer-Verlag, 1971 (zitiert auf Seite 34).
- [3] P.R. Halmos. *Finite-Dimensional Vector Spaces*. Princeton: D. van Nostrand Company, Inc., 1942 (zitiert auf Seite 43).
- [4] D.G. Luenberger. *Introduction to System Dynamics*. New York: John Wiley & Sons, 1979 (zitiert auf Seite 46).
- [5] P.J. Olver und C. Shakiban. *Applied Linear Algebra*. Upper Saddle River (NJ): Prentice-Hall, 2006 (zitiert auf den Seiten 37, 38, 40, 43).
- [6] D.M. Wiberg. *State Space and Linear Systems*. New York: McGraw-Hill, 1971 (zitiert auf den Seiten 34, 46).
- [7] R. Zurmühl und S. Falk. *Matrizen und ihre Anwendungen*. Bd. 1. Berlin: Springer-Verlag, 1984 (zitiert auf den Seiten 36, 43).

