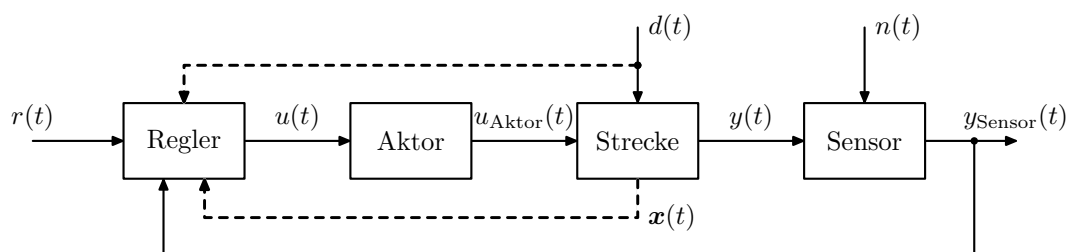


# Analyse und Entwurf von zeitkontinuierlichen Regelkreisen im Frequenzbereich

Die wesentlichen Komponenten eines Regelkreises sind in Abbildung 5.1 dargestellt. Hierbei versteht man unter der *Strecke* das zu regelnde System, welches über den *Aktor* mittels der so genannten *Stellgröße*  $u(t)$  gezielt beeinflusst werden kann. Sehr häufig ist der Aktor nicht als separater Block



**Abb. 5.1.:** Komponenten eines Regelkreises.

ausgeführt, sondern wird direkt der Strecke zugewiesen. Auf die Strecke wirken im Allgemeinen *externe Störungen*  $d(t)$ , die nicht unserer Kontrolle unterliegen und in den meisten Fällen auch nicht messtechnisch erfasst werden können. Liegen sie jedoch vor, so können sie in Form einer Störgrößenaufschaltung auch im Rahmen des Regelungsentwurfes verwendet werden. Mit Hilfe eines *Sensors* wird die *Ausgangsgröße* bzw. *Regelgröße*  $y(t)$  gemessen und als Sensorausgangssignal  $y_{\text{Sensor}}(t)$  dem *Regler* zugeführt. Der Sensor hat im Allgemeinen einerseits eine nichttriviale Dynamik und andererseits ist dem Messsignal ein *Sensorrauschen*  $n(t)$  überlagert, weshalb die beiden Signale  $y(t)$  und  $y_{\text{Sensor}}(t)$  im allgemeinen Fall nicht identisch sind. Der Regler hat als Eingangssignal das so genannte *Führungs- oder Referenzsignal*  $r(t)$  sowie im Fall einer *Ausgangsregelung* das Messsignal  $y_{\text{Sensor}}(t)$  der Ausgangsgröße bzw. im Fall einer *Zustandsregelung* alle Zustandsgrößen  $\mathbf{x}(t)$  der Strecke. Die drei von außen auf den Regelkreis einwirkenden Signale  $r(t)$ ,  $d(t)$  und  $n(t)$  werden auch als *exogene Eingänge* bezeichnet.

## 5.1 Aufgaben der Regelung

Für die nachfolgende Analyse wird vorausgesetzt, dass die Sensordynamik vernachlässigbar ist, d.h.  $y_{\text{Sensor}}(t) = y(t) + n(t)$ . Der allgemeine Fall kann jedoch in analoger Weise ausgeführt werden, wobei die jeweiligen Ausdrücke bei nichttrivialer Sensordynamik entsprechend komplizierter werden. Zudem wird die Aktordynamik der Streckendynamik zugerechnet. Da nur lineare, zeitinvariante Systeme betrachtet werden, kann der Regelkreis von Abbildung 5.1 auch als Übertragungssystem entsprechend Abbildung 5.2 dargestellt werden. Hierbei ist zudem durch  $\Delta \hat{g}(s)$  die Abweichung von der nominellen Übertragungsfunktion  $\hat{g}(s)$  angegeben, die beispielsweise durch Veränderungen der Streckenparameter (*Parametervariationen*) oder durch nichtmodellerte Streckendynamik (*Modellfehler*) verursacht werden kann.

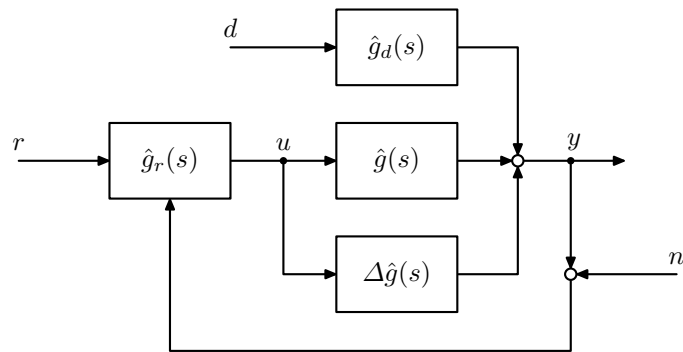


Abb. 5.2.: Regelkreis als Übertragungssystem.

Die Übertragungsfunktionen zwischen den exogenen Eingängen und der Ausgangsgröße können somit im Bildbereich für<sup>1</sup>  $\Delta \hat{g}(s) = 0$  allgemein in der Form

$$\hat{y}(s) = \hat{t}_{r,y}(s)\hat{r}(s) + \hat{t}_{d,y}(s)\hat{d}(s) + \hat{t}_{n,y}(s)\hat{n}(s) \quad (5.1)$$

angegeben werden, mit der *Führungsübertragungsfunktion*  $\hat{t}_{r,y}(s)$ , der *Störübertragungsfunktion*  $\hat{t}_{d,y}(s)$  und der Übertragungsfunktion des Messfehlers (Sensorrauschen)  $\hat{t}_{n,y}(s)$ . Die wesentlichen Aufgaben der Regelung sind die folgenden:

- (i) die *Stabilisierung* einer instabilen Strecke (Dynamikvorgabe),
- (ii) die *Führungs- oder Folgeregelung*, bei der das Ausgangssignal  $y(t)$  dem Referenzsignal  $r(t)$  möglichst genau folgen soll,
- (iii) die *Störregelung*, indem der Einfluss der Störung  $d(t)$  auf  $y(t)$  möglichst gut unterdrückt werden soll,
- (iv) die Minimierung der Sensitivität gegenüber Parameterschwankungen und/oder Modellfehlern der Regelstrecke, ausgedrückt durch  $\Delta \hat{g}(s)$ ,
- (v) die Minimierung der Auswirkungen des Messrauschens  $n(t)$  auf das Regelverhalten.

Während zur Analyse der Forderung (i) nachfolgend Methoden eingeführt werden, können die Forderungen (ii)–(v) im Idealfall mathematisch wie folgt formuliert werden:

- (ii)  $\hat{t}_{r,y}(i\omega) = 1$  für alle  $\omega \in \mathbb{R}$ ,
- (iii)  $\hat{t}_{d,y}(i\omega) = 0$  für alle  $\omega \in \mathbb{R}$ ,
- (iv)  $\frac{\Delta \hat{t}_{r,y}(i\omega)}{\hat{t}_{r,y}(i\omega)} = 0$  für alle  $\omega \in \mathbb{R}$ ,
- (v)  $\hat{t}_{n,y}(i\omega) = 0$  für alle  $\omega \in \mathbb{R}$ .

Da diese praktisch nicht zu erfüllen sind, wird typischerweise gefordert, dass die Anforderungen (ii)–(v) nur in einem gewissen, für die zu regelnde Strecke und die betrachtete Regelungsaufgabe charakteristischen Frequenzbereich gelten müssen. Damit folgt, dass

- (ii)  $|\hat{t}_{r,y}(i\omega) - 1| \ll 1$ ,

<sup>1</sup>Für  $\Delta \hat{g}(s) \neq 0$  müssen in der schematischen Darstellung (5.1) jeweils noch Terme  $\Delta \hat{t}_{r,y}(s)$ ,  $\Delta \hat{t}_{d,y}(s)$  und  $\Delta \hat{t}_{n,y}(s)$  hinzugefügt werden.

$$(iii) \quad |\hat{t}_{d,y}(i\omega)| \ll 1,$$

$$(iv) \quad \left| \frac{\Delta \hat{t}_{r,y}(i\omega)}{\hat{t}_{r,y}(i\omega)} \right| \ll 1,$$

$$(v) \quad |\hat{t}_{n,y}(i\omega)| \ll 1$$

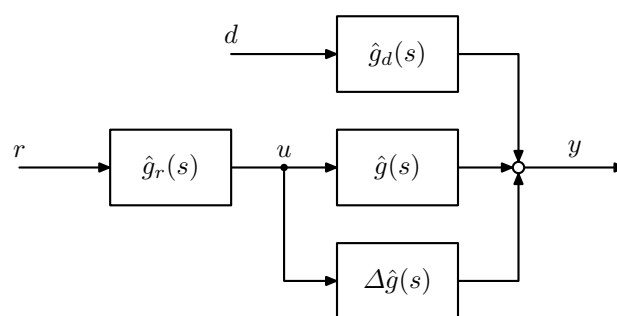
für  $\omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ . Mit diesen allgemeinen Vorbetrachtungen wird im Weiteren zunächst auf einige unterschiedliche Regelkreisstrukturen und deren Vor- und Nachteile eingegangen. Diesen Ausführungen schließt sich dann der eigentliche Entwurf von Regelungen im Frequenzbereich an.

## 5.2 Regelkreisstrukturen

Sowohl in praktischen Anwendungen als auch theoretischen Untersuchungen ist die Struktur des Regelkreises von entscheidender Bedeutung für die Lösung einer Regelungsaufgabe. Nachfolgend ist deshalb eine Auswahl der wesentlichen Regelkreisstrukturen und deren Eigenschaften aufgeführt. Dabei wird zudem die wichtige Eigenschaften der *internen Stabilität* eines Regelkreises eingeführt und illustriert.

### 5.2.1 Steuerung

Eine Steuerung ist dadurch gekennzeichnet, dass die Ausgangsgröße  $y(t)$  nicht zurückgeführt wird. Abgeleitet von der allgemeinen Regelkreisstruktur in Abbildung 5.2 zeigt Abbildung 5.3 die Struktur



**Abb. 5.3.:** Struktur einer (einfachen) Steuerung.

einer (einfachen) Steuerung. Dabei gelten offensichtlich die Beziehungen

$$\hat{t}_{r,y}(s) = \hat{g}_r(s) \hat{g}(s), \quad \hat{t}_{d,y}(s) = \hat{g}_d(s), \quad \frac{\Delta \hat{t}_{r,y}(s)}{\hat{t}_{r,y}(s)} = \frac{\Delta \hat{g}(s)}{\hat{g}(s)}.$$

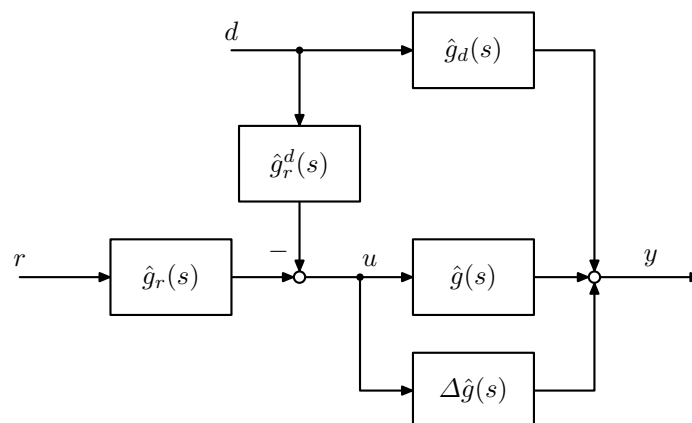
Hieraus können nun unmittelbar die folgenden Eigenschaften einer (einfachen) Steuerung im Bezug zu den oben benannten Anforderungen (i)–(v) abgeleitet werden:

- (i) die Steuerung ist nur für stabile Strecken mit eingangs–ausgangs–stabilen Übertragungsfunktionen  $\hat{g}(s)$ ,  $\hat{g}_r(s)$ ,  $\hat{g}_d(s)$  anwendbar,
- (ii) [+] die Führungsübertragungsfunktion  $\hat{t}_{r,y}(s)$  kann durch  $\hat{g}_r(s)$  gezielt beeinflusst werden,
- (iii) die Störübertragungsfunktion  $\hat{t}_{d,y}(s)$  kann durch  $\hat{g}_r(s)$  nicht verändert werden,
- (iv) die Parameterschwankungen der Strecke  $\Delta \hat{g}(s)$  können in  $\hat{t}_{r,y}(s)$  nicht unterdrückt werden,
- (v) [+] das Sensorrauschen spielt keine Rolle, da die Ausgangsgröße  $y(t)$  nicht zurückgeführt wird.

Es sei bemerkt, dass durch die formale Wahl  $\hat{g}_r(s) = \frac{1}{\hat{g}(s)} = \hat{g}^{-1}(s)$  im nominellen Fall mit  $\Delta\hat{g}(s) = \hat{g}_d(s) = 0$  folgt, dass  $y(t) = r(t)$ . Hierbei müssen zwar gewisse Anforderungen an die Referenztrajektorie  $r(t)$  gestellt werden (z.B. hinreichende Differenzierbarkeit), jedoch ermöglicht diese Wahl im Prinzip die Realisierung eines gewünschten transienten Verhaltens der Ausgangs- bzw. Regelgröße.

### 5.2.2 Steuerung mit Störgrößenaufschaltung

Ist die Störung  $d(t)$  messbar, dann kann das Störverhalten mit Hilfe einer Störgrößenaufschaltung gemäß Abbildung 5.4 beeinflusst werden. Hierbei gilt für die einzelnen Übertragungsfunktionen



**Abb. 5.4.:** Struktur einer Steuerung mit Störgrößenaufschaltung.

tionen

$$\hat{t}_{r,y}(s) = \hat{g}_r(s)\hat{g}(s), \quad \hat{t}_{d,y}(s) = \hat{g}_d(s) - \hat{g}_r^d(s)\hat{g}(s), \quad \frac{\Delta\hat{t}_{r,y}(s)}{\hat{t}_{r,y}(s)} = \frac{\Delta\hat{g}(s)}{\hat{g}(s)},$$

woraus sich für die Steuerung mit Störgrößenaufschaltung die folgenden Eigenschaften ergeben:

- (i) die Steuerung ist nur für stabile Strecken mit eingangs–ausgangs–stabilen Übertragungsfunktionen  $\hat{g}(s)$ ,  $\hat{g}_r(s)$ ,  $\hat{g}_d(s)$  anwendbar,
- (ii) [+] die Führungsübertragungsfunktion  $\hat{t}_{r,y}(s)$  kann durch  $\hat{g}_r(s)$  gezielt beeinflusst werden,
- (iii) [+] die Störübertragungsfunktion  $\hat{t}_{d,y}(s)$  kann durch  $\hat{g}_r^d(s)$  gezielt verändert werden,
- (iv) die Parameterschwankungen der Strecke  $\Delta\hat{g}(s)$  können in  $\hat{t}_{r,y}(s)$  nicht unterdrückt werden,
- (v) [+] das Sensorrauschen spielt keine Rolle, da die Ausgangsgröße  $y(t)$  nicht zurückgeführt wird.

### 5.2.3 Regelung mit einem Freiheitsgrad

Im Gegensatz zu einer Steuerung wird bei einer Regelung die Ausgangsgröße  $y(t)$  zurückgeführt. Bei der Regelung mit einem Freiheitsgrad dient, wie in Abbildung 5.5 gezeigt, die Übertragungsfunktion  $\hat{g}_r(s)$  als Entwurfsfreiheitsgrad, um gezielt das Verhalten des geschlossenen Regelkreises zu beeinflussen. Die Übertragungsfunktionen ergeben sich in diesem Fall zu

$$\hat{t}_{r,y}(s) = \frac{\hat{g}_r(s)\hat{g}(s)}{1 + \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)}, \quad \hat{t}_{d,y}(s) = \frac{\hat{g}_d(s)}{1 + \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)}, \quad \hat{t}_{n,y}(s) = -\frac{\hat{g}_r(s)\hat{g}(s)}{1 + \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)} = -\hat{t}_{r,y}(s) \quad (5.2)$$

sowie

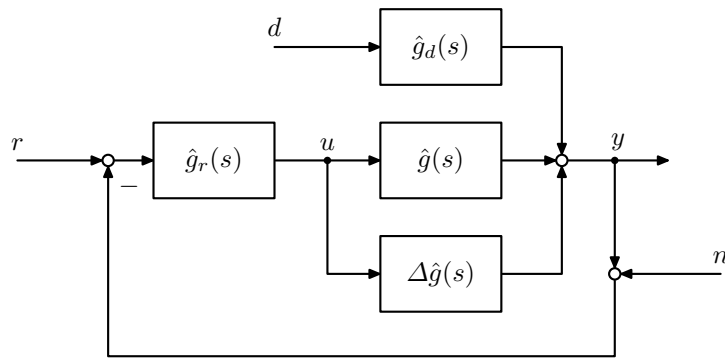


Abb. 5.5.: Struktur einer Regelung mit einem Freiheitsgrad.

$$\frac{\Delta \hat{t}_{r,y}(s)}{\hat{t}_{r,y}(s)} = \frac{\frac{\hat{g}_r(s)(\hat{g}(s) + \Delta \hat{g}(s))}{1 + \hat{g}_r(s)(\hat{g}(s) + \Delta \hat{g}(s))} - \hat{t}_{r,y}(s)}{\hat{t}_{r,y}(s)} = \frac{1}{1 + (\hat{g}(s) + \Delta \hat{g}(s))\hat{g}_r(s)} \frac{\Delta \hat{g}(s)}{\hat{g}(s)}. \quad (5.3)$$

Da offensichtlich  $\hat{g}_r(s)$  in allen Übertragungsfunktionen auftritt, ist zumindest prinzipiell eine gezielte Beeinflussung möglich. Zu deren Analyse und Beurteilung werden analog zu den obigen Betrachtungen wiederum die formulierten Forderungen (i)–(v) herangezogen.

### Stabilität

Schreibt man  $\hat{g}(s)$ ,  $\hat{g}_r(s)$  und  $\hat{g}_d(s)$  in Form der jeweils teilerfremden Zähler- und Nennerpolynome an

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{z}(s)}{\hat{n}(s)}, \quad \hat{g}_r(s) = \frac{\hat{z}_r(s)}{\hat{n}_r(s)}, \quad \hat{g}_d(s) = \frac{\hat{z}_d(s)}{\hat{n}_d(s)}, \quad (5.4)$$

so erhält man für die Führungsübertragungsfunktion  $\hat{t}_{r,y}(s)$  und die Störübertragungsfunktion  $\hat{t}_{d,y}(s)$  die Ausdrücke

$$\hat{t}_{r,y}(s) = \frac{\hat{z}_r(s)\hat{z}(s)}{\hat{z}_r(s)\hat{z}(s) + \hat{n}_r(s)\hat{n}(s)}$$

$$\hat{t}_{d,y}(s) = \frac{\hat{z}_d(s)\hat{n}_r(s)\hat{n}(s)}{\hat{n}_d(s)(\hat{z}_r(s)\hat{z}(s) + \hat{n}_r(s)\hat{n}(s))}.$$

Durch die geeignete Wahl des Reglers  $\hat{g}_r(s)$  kann also für eine instabile Strecke  $\hat{g}(s)$ , d.h.  $\hat{n}(s)$  weist mindestens eine Nullstelle  $s_j$  mit  $\Re\{s_j\} \geq 0$  auf, eine stabile Führungsübertragungsfunktion  $\hat{t}_{r,y}(s)$  erzeugt werden mit sämtlichen Nullstellen von  $\hat{z}_r(s)\hat{z}(s) + \hat{n}_r(s)\hat{n}(s)$  in der linken offenen  $s$ -Halbebene. Damit die Störübertragungsfunktion  $\hat{t}_{d,y}(s)$  eingangs–ausgangs–stabil ist, muss des Weiteren gelten, dass alle Nullstellen von  $\hat{n}_d(s)$  in der rechten geschlossenen  $s$ -Halbebene entsprechend ihrer Vielfachheit auch Nullstellen von  $\hat{n}(s)$  sind.

#### Anmerkung 5.1

Der geschlossene Regelkreis mit einer stabilen Strecke kann auch instabil werden. Dies ist leicht für den Regelkreis von Abbildung 5.5 mit den Übertragungsfunktionen

$$\hat{g}(s) = \frac{s-4}{s^2+s+1}, \quad \hat{g}_r(s) = 1, \quad \hat{g}_d(s) = 1$$

ersichtlich. Es gilt in diesem Fall für die Führungsübertragungsfunktion

$$\hat{t}_{r,y}(s) = \frac{s-4}{s^2+2s-3},$$

weshalb wegen den Polstellen  $s_1 = 1$  und  $s_2 = -3$  unmittelbar folgt, dass  $\hat{t}_{r,y}(s)$  nicht eingangs–ausgangs–stabil ist. *Rückkopplungen sind somit inhärent mit dem Stabilitätsproblem verbunden.*

Für den Regelkreis von Abbildung 5.5 ist die Forderung, dass die Übertragungsfunktionen von den exogenen Eingängen  $r(t)$ ,  $d(t)$  und  $n(t)$  zur Ausgangsgröße  $y(t)$  jeweils eingangs–ausgangs–stabil sind, *nicht ausreichend*, damit für alle beschränkten Signale  $r(t)$ ,  $d(t)$  und  $n(t)$  der geschlossene Regelkreis mit einem beschränkten Ausgangssignal antwortet. Vielmehr ist zu fordern, dass sämtliche im Regelkreis auftretende *interne Größen* beschränkt bleiben, was zum Begriff der *internen Stabilität* führt.

### Definition 5.1: Interne Stabilität

Man nennt einen Regelkreis intern stabil, wenn sämtliche Übertragungsfunktionen im geschlossenen Regelkreis eingangs–ausgangs–stabil sind.

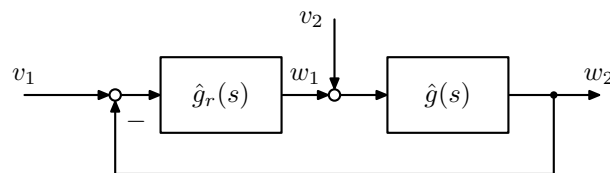


Abb. 5.6.: Regelkreis zur internen Stabilität.

Für den Regelkreis nach Abbildung 5.6 gilt somit, dass die Übertragungsfunktionen

$$\hat{t}_{i,j}(s) = \frac{\hat{w}_i(s)}{\hat{v}_j(s)}, \quad i, j \in \{1, 2\}$$

eingangs–ausgangs–stabil sein müssen.

Zur Überprüfung der internen Stabilität für den Regelkreis aus Abbildung 5.6 gilt der folgende Satz.

### Satz 5.1: Interne Stabilität

Der Regelkreis von Abbildung 5.6 ist genau dann intern stabil, wenn die beiden Bedingungen

- (i)  $1 + \hat{g}_r(s)\hat{g}(s) \neq 0$  für  $\Re\{s\} \geq 0$  und
- (ii) im Produkt  $\hat{g}_r(s)\hat{g}(s)$  treten keine Pol–/Nullstellenkürzungen für Pole oder Nullstellen  $s_j$  mit  $\Re\{s_j\} \geq 0$  auf

erfüllt sind.

*Beweis.* Der Beweis der Äquivalenz der Aussagen erfolgt in beiden Richtungen.

- interne Stabilität  $\Rightarrow$  (i), (ii): Für die Übertragungsmatrix  $\hat{T}(s)$  mit Elementen  $\hat{t}_{i,j}(s)$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$  zwischen  $\hat{\mathbf{v}}(s) = [\hat{v}_1(s), \hat{v}_2(s)]^T$  und  $\hat{\mathbf{w}}(s) = [\hat{w}_1(s), \hat{w}_2(s)]^T$  gilt

$$\hat{\mathbf{w}}(s) = \underbrace{\frac{1}{1 + \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)} \begin{bmatrix} \hat{g}_r(s) & -\hat{g}_r(s)\hat{g}(s) \\ \hat{g}_r(s)\hat{g}(s) & \hat{g}(s) \end{bmatrix}}_{=\hat{T}(s)} \hat{\mathbf{v}}(s)$$

Mit der Darstellung von  $\hat{g}(s)$  und  $\hat{g}_r(s)$  in Form teilerfremder Zähler- und Nennerpolynome entsprechend (5.4) folgt somit

$$\hat{\mathbf{w}}(s) = \frac{\hat{n}_r(s)\hat{n}(s)}{\hat{z}_r(s)\hat{z}(s) + \hat{n}_r(s)\hat{n}(s)} \begin{bmatrix} \frac{\hat{z}_r(s)}{\hat{n}_r(s)} & -\frac{\hat{z}_r(s)\hat{z}(s)}{\hat{n}_r(s)\hat{n}(s)} \\ \frac{\hat{z}_r(s)\hat{z}(s)}{\hat{n}_r(s)\hat{n}(s)} & \frac{\hat{z}(s)}{\hat{n}(s)} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}(s).$$

Da wegen der Annahme der internen Stabilität alle Übertragungsfunktion  $\hat{t}_{i,j}(s)$  eingangsausgangsstabil sind, müssen alle Nullstellen von  $\hat{z}_r(s)\hat{z}(s) + \hat{n}_r(s)\hat{n}(s)$  in der linken offenen  $s$ -Halbebene liegen, womit Bedingung (i) gezeigt ist. Bedingung (ii) folgt aus der Tatsache, dass wenn  $\hat{z}_r(s)$  und  $\hat{n}(s)$  bzw.  $\hat{z}(s)$  und  $\hat{n}_r(s)$  eine gemeinsame Nullstelle  $s_j$  mit  $\Re\{s_j\} \geq 0$  hätten, diese dann auch Nullstelle von  $\hat{z}_r(s)\hat{z}(s) + \hat{n}_r(s)\hat{n}(s)$  sein müsste, was aber durch die Annahme der internen Stabilität ausgeschlossen ist.

- (i), (ii)  $\Rightarrow$  interne Stabilität: Der Nachweis dieser Schlussfolgerung erfolgt durch Widerspruch. Sei  $s_j$  mit  $\Re\{s_j\} \geq 0$  eine Nullstelle von  $\hat{z}_r(s)\hat{z}(s) + \hat{n}_r(s)\hat{n}(s)$ . Dann muss aus  $\hat{n}_r(s_j)\hat{n}(s_j) = 0$  auch  $\hat{z}_r(s_j)\hat{z}(s_j) = 0$  folgen, was aber der Annahme (ii) widerspricht. Folglich müssen  $\hat{n}_r(s_j)\hat{n}(s_j) \neq 0$  und die Bedingung

$$1 + \frac{\hat{z}_r(s_j)\hat{z}(s_j)}{\hat{n}_r(s_j)\hat{n}(s_j)} = 0$$

erfüllt sein, was jedoch der Annahme (i) widerspricht. □

Die Betrachtung der internen Stabilität hat wichtige Konsequenzen für den Reglerentwurf. Insbesondere dürfen nach Satz 5.1 *Polstellen der Strecke in der offenen rechten  $s$ -Halbebene nicht gegen entsprechende Nullstellen des Reglers gekürzt werden.*

**Aufgabe 5.32.** Ist der Regelkreis von Abbildung 5.5 mit

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{s^2 - 1}, \quad \hat{g}_r(s) = \frac{s-1}{s+2}, \quad \hat{g}_d(s) = 1$$

intern stabil? Berechnen Sie  $\hat{t}_{r,y}(s)$  und  $\hat{t}_{d,y}(s)$ .

**Lösung 5.32.** Der Regelkreis ist nicht intern stabil. Die Führungs- und Störübertragungsfunktion lauten

$$\hat{t}_{r,y}(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 3}, \quad \hat{t}_{d,y}(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 + 3s + 3}.$$

**Aufgabe 5.33.** Zeigen Sie, dass der Regelkreis von Abbildung 5.5 intern stabil ist, wenn einerseits die Bedingungen von Satz 5.1 erfüllt sind und andererseits sämtliche Polstellen von  $\hat{g}_d(s)$  in der rechten geschlossenen  $s$ -Halbebene entsprechend ihrer Vielfachheit auch Polstellen von  $\hat{g}(s)$  sind.

**Lösung 5.33.** Die Aussage ist leicht durch die Analyse der zugehörigen Übertragungsmatrix

$$\begin{bmatrix} \hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{g}_r(s) & -\hat{g}_r(s)\hat{g}_d(s) \\ \hat{g}(s)\hat{g}_r(s) & \hat{g}_d(s) \end{bmatrix}}_{= \hat{T}(s)} \begin{bmatrix} \hat{r}(s) \\ \hat{d}(s) \end{bmatrix}$$

beweisbar.

### Führungs- und Störverhalten

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setze man für die folgenden Betrachtungen voraus, dass

- $\hat{g}_d(s) = 1$  (Störung wirkt direkt am Ausgang)
- $\hat{g}(s)$  strikt proper ist (motiviert dadurch, dass nahezu jedes physikalische System Tiefpasscharakter aufweist)
- $\hat{g}_r(s)$  proper und damit realisierbar ist.

Damit gilt für die Übertragungsfunktion des so genannten *offenen* Regelkreises  $\hat{l}(s) = \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)$

$$|\hat{l}(i\omega)| \ll 1 \quad \text{für} \quad \omega \gg \omega_c.$$

Hierbei bezeichnet  $\omega_c$  die so genannte *Durchtrittsfrequenz*, bei der der Amplitudengang des offenen Regelkreises  $|\hat{l}(i\omega)|_{\text{dB}}$  die 0-dB-Linie schneidet<sup>2</sup>. Wird der Regler  $\hat{g}_r(s)$  so entworfen, dass neben der Einhaltung der internen Stabilität die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises die Bedingung

$$|\hat{l}(s)| \gg 1 \quad \text{für} \quad \omega \ll \omega_c$$

erfüllt, dann erkennt man aus (5.2) mit  $\hat{g}_d(s) = 1$  unmittelbar, dass für die Führungs- und Störübertragungsfunktion

$$\hat{t}_{r,y}(s) = \frac{\hat{l}(s)}{1 + \hat{l}(s)}, \quad \hat{t}_{d,y}(s) = \frac{1}{1 + \hat{l}(s)}$$

die in Tabelle 5.1 aufgeführten Abschätzungen gültig sind. Es ist somit leicht einsichtig, dass der ge-

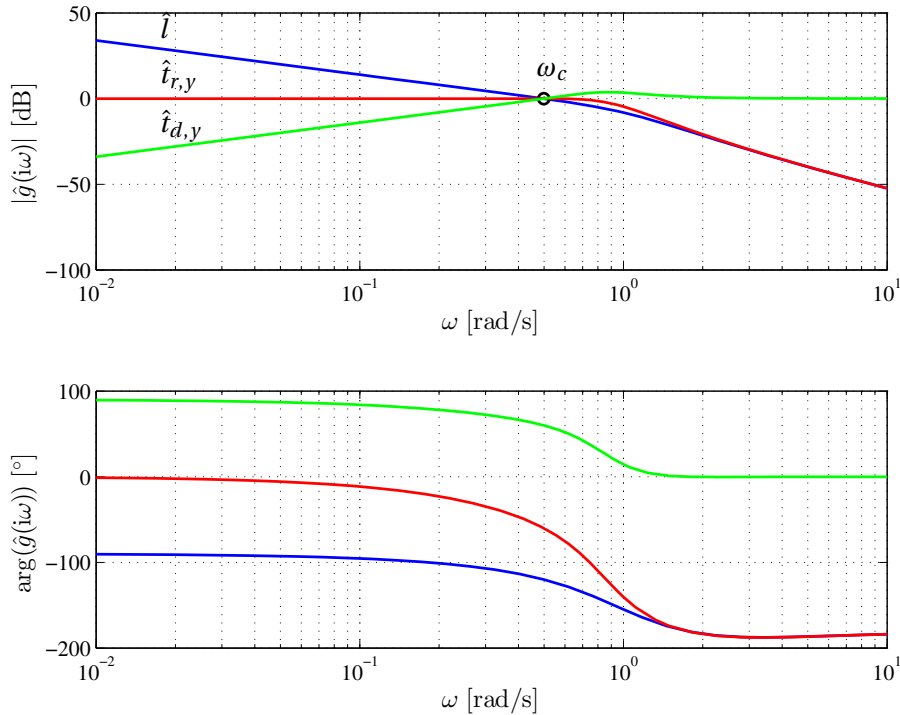
Frequenzbereich	Offener Regelkreis	Führungsverhalten	Störverhalten
$\omega \ll \omega_c$	$ \hat{l}(i\omega)  \gg 1$	$\hat{t}_{r,y}(i\omega) \approx 1$	$\hat{t}_{d,y}(i\omega) \approx \frac{1}{\hat{l}(i\omega)} \approx 0$
$\omega \gg \omega_c$	$ \hat{l}(i\omega)  \ll 1$	$\hat{t}_{r,y}(i\omega) \approx \hat{l}(i\omega)$	$\hat{t}_{d,y}(i\omega) \approx 1$

**Tab. 5.1.:** Abschätzungen für die Führungs- und Störübertragungsfunktion.

schlossene Regelkreis für  $\omega \ll \omega_c$  sowohl ein gutes Führungs- als auch Störverhalten besitzt. Typische Verläufe der Bode-Diagramme des offenen Regelkreises, der Führungs- und der Störübertragungsfunktion zeigt exemplarisch Abbildung 5.7.

<sup>2</sup>Es sei bemerkt, dass in diesem Zusammenhang in der regelungstechnischen Literatur verschiedene Definitionen und Begriffe gibt. So wird beispielsweise als *Bandbreite* des Regelkreises jene kleinste Frequenz  $\omega_b$  bezeichnet, bei der der Amplitudengang der Führungsübertragungsfunktion  $|\hat{t}_{r,y}(s)|_{\text{dB}}$  erstmals den Wert  $-3$  dB annimmt. Da die Frequenzen  $\omega_c$  und  $\omega_b$  nahe beieinander liegen, gilt für beide Definitionen, dass im Bereich  $\omega \ll \omega_c$  bzw.  $\omega \ll \omega_b$  der Regelkreis sowohl ein gutes Führungs- als auch Störverhalten aufweist.





**Abb. 5.7.:** Typische Verläufe des Bode-Diagramme des offenen Regelkreises, der Führungs- und der Störübertragungsfunktion.

### Parameterschwankungen

Die Abweichung  $\Delta \hat{g}(s)$  von der nominellen Übertragungsfunktion  $\hat{g}(s)$  kann in Form von so genannten *Störmodellen* erfasst werden, auf deren Basis die *Robustheit des Regelkreises* gegenüber Parametervariationen untersucht werden kann. Im Rahmen dieser Vorlesung soll dieser Zugang jedoch nicht weiter vertieft werden. Es sei hierbei lediglich angemerkt, dass das Verhältnis der relativen Abweichung der Führungsübertragungsfunktion  $\Delta \hat{t}_{r,y}(s) / \hat{t}_{r,y}(s)$  zur relativen Abweichung der Streckenübertragungsfunktion  $\Delta \hat{g}(s) / \hat{g}(s)$  im Grenzübergang  $\Delta \hat{g}(s) \rightarrow 0$  als *Sensitivitätsfunktion*

$$\hat{s}(s) = \lim_{\Delta \hat{g}(s) \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{t}_{r,y}(s)}{\hat{t}_{r,y}(s)} \frac{\hat{g}(s)}{\Delta \hat{g}(s)} = \frac{d \hat{t}_{r,y}(s)}{d \Delta \hat{g}(s)} \frac{\hat{g}(s)}{\hat{t}_{r,y}(s)} = \frac{1}{1 + \hat{g}_r(s) \hat{g}(s)} \quad (5.5)$$

bezeichnet wird. Offensichtlich entspricht  $\hat{s}(s)$  der Störübertragungsfunktion  $\hat{t}_{d,y}(s)$  des Regelkreises von Abbildung 5.5 mit  $\hat{g}_d(s) = 1$ . Des weiteren gilt die Beziehung

$$\hat{t}_{r,y}(s) + \hat{t}_{d,y}(s) = \frac{\hat{g}_r(s) \hat{g}(s)}{1 + \hat{g}_r(s) \hat{g}(s)} + \frac{1}{1 + \hat{g}_r(s) \hat{g}(s)} = 1,$$

weshalb man  $\hat{t}_{r,y}(s)$  sehr oft auch *komplementäre Sensitivitätsfunktion* nennt.

### Sensorrauschen und Messfehler

Berechnet man für den Regelkreis von Abbildung 5.5 die Übertragungsfunktionen  $\hat{t}_{n,y}(s)$  und  $\hat{t}_{n,u}(s)$  vom Messrauschen  $n(t)$  zur Ausgangsgröße  $y(t)$  bzw. zur Stellgröße  $u(t)$  so erhält man

$$\hat{t}_{n,y}(s) = -\frac{\hat{g}_r(s) \hat{g}(s)}{1 + \hat{g}_r(s) \hat{g}(s)}, \quad \hat{t}_{n,u}(s) = -\frac{\hat{g}_r(s)}{1 + \hat{g}_r(s) \hat{g}(s)}.$$

Wegen der Beziehung  $\hat{t}_{n,y}(s) = -\hat{t}_{r,y}(s)$  ist einsichtig, dass gutes Führungsverhalten ( $\hat{t}_{r,y}(s) \approx 1$ ) auch bedingt, dass sich das Sensorrauschen oder der Messfehler direkt auf den Ausgang auswirkt und nicht unterdrückt werden kann. Zudem gilt  $\hat{t}_{n,u}(s) = -\hat{t}_{r,u}(s) = \hat{t}_{d,u}(s)$ , was zur Folge hat, dass bei großen Verstärkungen in einem Frequenzbereich, in dem das Rauschspektrum des Sensorrauschens liegt, dieses auch entsprechend in der Stellgröße verstärkt wird. Somit muss beim *Regelungsentwurf das Spektrum des Sensorrauschens immer in der Wahl der Bandbreite des Regelkreises mitberücksichtigt werden*.

### Zusammenfassung

Zusammenfassend ergeben sich die folgenden Eigenschaften der Regelung mit einem Freiheitsgrad:

- (i) [+] der Regler  $\hat{g}_r(s)$  ermöglicht die Stabilisierung instabiler Strecken,
- (ii) [+] die Führungsübertragungsfunktion  $\hat{t}_{r,y}(s)$  kann durch  $\hat{g}_r(s)$  prinzipiell gezielt beeinflusst werden,
- (iii) [+] die Störübertragungsfunktion  $\hat{t}_{d,y}(s)$  kann durch  $\hat{g}_r^d(s)$  prinzipiell gezielt verändert werden,
- (iv) [+] die Parameterschwankungen der Strecke  $\Delta\hat{g}(s)$  können in  $\hat{t}_{r,y}(s)$  prinzipiell unterdrückt werden,
- (v) das Sensorrauschen wirkt sich im Bereich guten Führungsverhaltens direkt auf die Ausgangsgröße aus.

#### Anmerkung 5.2: Stellgröße

Die obigen Überlegungen legen den Schluss nahe, dass die Bandbreite des Regelkreises durch einen geeigneten Entwurf des Reglers  $\hat{g}_r(s)$  beliebig groß gemacht werden kann. Dem wirkt jedoch entgegen, dass jedes technisch realisierbare Stellglied nur eine begrenzte Stellgröße zur Verfügung stellen kann. Teilweise kann die Stellgröße nur diskrete Werte annehmen, beispielsweise offen oder geschlossen für ein Ventil. Betrachtet man die *Stellgrößenübertragungsfunktion*

$$\hat{t}_{r,u}(s) = -\hat{t}_{d,u}(s) = \frac{\hat{g}_r(s)}{1 + \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)},$$

dann erkennt man unmittelbar, dass wenn  $\hat{g}(i\omega)$  in einem Frequenzbereich, in dem  $|\hat{l}(i\omega)|$  groß sein soll, Tiefpassverhalten aufweist, entsprechend  $|\hat{g}_r(i\omega)|$  groß sein muss. Dies bedeutet, dass auch  $|\hat{t}_{r,u}(i\omega)|$  bzw.  $|\hat{t}_{d,u}(i\omega)|$  und damit die Stellgröße  $u(t)$  groß werden. Als Konsequenz hieraus ergibt sich, dass beim *Regelungsentwurf immer ein Kompromiss zwischen Bandbreite und Stellgröße getroffen werden muss*. Im Rahmen von Simulationsstudien wird die Begrenzung des Stellgliedes oft als Begrenzung- oder Sättigungskennlinie abgebildet. Dabei ist jedoch für den Fall, dass die Stellgröße in die Begrenzung bzw. Sättigung geht zu beachten, dass der Regelkreis nichtlinear ist und im Allgemeinen nicht mehr nur mit linearen Methoden analysiert werden kann.

### 5.2.4 Regelung mit zwei Freiheitsgraden

Das Strukturschaltbild eines Regelkreises mit zwei Freiheitsgraden zeigt Abbildung 5.8. Die zugehörigen Übertragungsfunktionen lauten

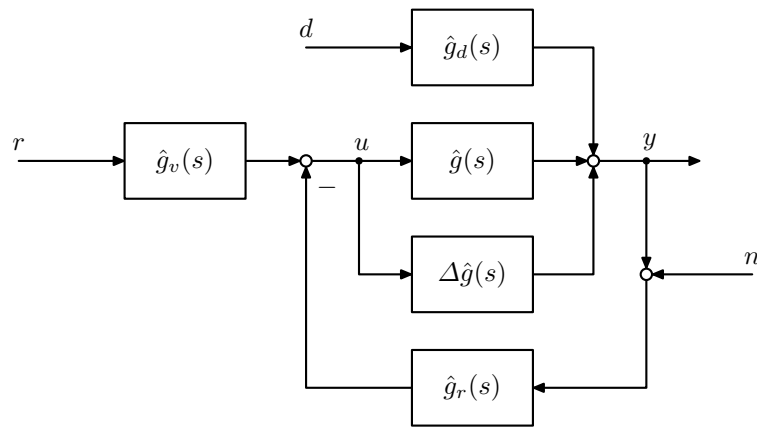


Abb. 5.8.: Struktur einer Regelung mit zwei Freiheitsgraden.

$$\hat{t}_{r,y}(s) = \frac{\hat{g}_v(s)\hat{g}(s)}{1 + \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)}, \quad \hat{t}_{d,y}(s) = \frac{\hat{g}_d(s)}{1 + \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)}, \quad \hat{t}_{n,y}(s) = -\frac{\hat{g}_r(s)\hat{g}(s)}{1 + \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)} \quad (5.6)$$

und

$$\frac{\Delta \hat{t}_{r,y}(s)}{\hat{t}_{r,y}(s)} = \frac{1}{1 + (\hat{g}(s) + \Delta \hat{g}(s))\hat{g}_r(s)} \frac{\Delta \hat{g}(s)}{\hat{g}(s)}. \quad (5.7)$$

Die Analyse der internen Stabilität des Regelkreises mit zwei Freiheitsgraden ist Gegenstand der folgenden Aufgabe. Zudem sei auf Satz 5.1 verwiesen.

**Aufgabe 5.34.** *Beweisen Sie, dass als notwendige Bedingung für die interne Stabilität des Regelkreises von Abbildung 5.8 die Polstellen von  $\hat{g}_v(s)$  in der rechten geschlossenen  $s$ -Halbebene entsprechend ihrer Vielfachheit auch Polstellen von  $\hat{g}_r(s)$  sein müssen.*

**Lösung 5.34.** *Die Notwendigkeit der Aussage kann unmittelbar durch die Betrachtung der Übertragungsmatrix  $\hat{T}(s)$  nachgewiesen werden, wobei*

$$\begin{bmatrix} \hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{1 + \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)} \begin{bmatrix} \hat{g}_v(s) & -\hat{g}_r(s)\hat{g}_d(s) \\ \hat{g}_v(s)\hat{g}(s) & \hat{g}_d(s) \end{bmatrix}}_{= \hat{T}(s)} \begin{bmatrix} \hat{r}(s) \\ \hat{d}(s) \end{bmatrix}.$$

Der Vergleich von (5.6), (5.7) mit (5.2), (5.3) zeigt, dass sich abgesehen von  $\hat{t}_{r,y}(s)$  die gleichen Übertragungsfunktionen wie beim Regelkreis mit einem Freiheitsgrad ergeben. Somit sind die Untersuchungen und Schlussfolgerungen aus dem vorherigen Abschnitt direkt auf dem Regelkreis mit zwei Freiheitsgraden übertragbar. Lediglich das Führungsverhalten kann durch die zusätzliche Übertragungsfunktion  $\hat{g}_v(s)$  beeinflusst werden.

#### Anmerkung 5.3: Führungsverhalten und Referenztrajektorien

Die Bandbreite des Regelkreises und damit die notwendige Stellgröße  $u(t)$  sind im Allgemeinen durch das gewünschte Störverhalten festgelegt, da die Störung  $d(t)$  per Definition eine nicht beeinflussbare Größe darstellt. Demgegenüber kann das Führungssignal  $r(t)$  gezielt vorgegeben werden. In technischen Prozessen soll das Führungssignal  $r(t)$  nie sprungförmig mit

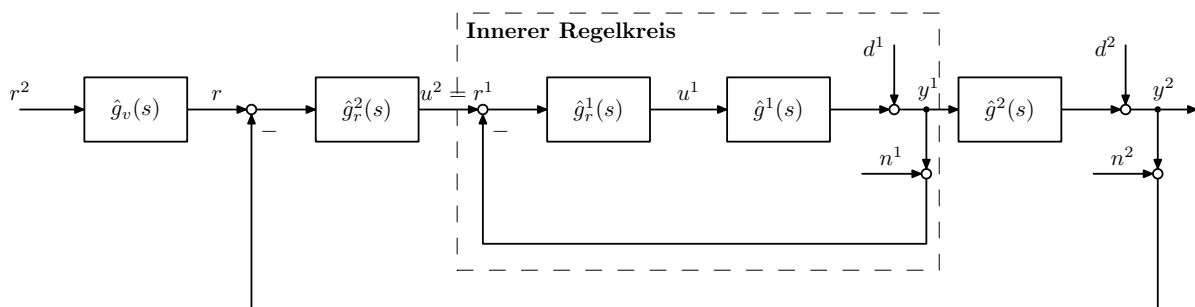
$r(t) = y^* \sigma(t)$  auf den Regelkreis aufgeschaltet werden, obwohl dies zum Zweck der Analyse der Dynamik des geschlossenen Regelkreises so vorgenommen wird. Typischerweise werden für das Führungssignal gewisse Differenzierbarkeitsanforderungen formuliert. Hiermit kann insbesondere unter transienten Bedingungen die zur Realisierung des Führungssignals notwendige Stellgröße signifikant reduziert werden. Im Bereich der Antriebstechnik werden beispielsweise so genannte Hochlaufvorgaben der Form

$$r(t) = y^* \left(1 - e^{-kt}\right), \quad k > 0$$

verwendet.

### 5.2.5 Kaskadierte Regelung

Der Begriff der kaskadierten Regelung bzw. der Kaskadenregelung bezieht sich darauf, dass das Ausgangssignal des Reglers  $\hat{g}_r(s)$  nicht unmittelbar in die Stellgröße eingeht, sondern einen so genannten *inneren Regelkreis* bzw. einen Hilfsregelkreis durchläuft. Die zugehörige Regelkreisstruktur zeigt Abbildung 5.9. Es entstehen somit zwei einander überlagerte Regelkreise, bei dem der äußere Regelkreis



**Abb. 5.9.:** Struktur einer kaskadierten Regelung.

den Sollwert für den inneren Regelkreis liefert. Der innere Regelkreis besteht aus dem Regler  $\hat{g}_r^1(s)$  und der Strecke  $\hat{g}^1(s)$  und hat das Ziel, seine Regelgröße  $y^1(t)$  dem Sollwert  $r^1(t)$  nachzuführen. Dieser Sollwert wird vom Regler  $\hat{g}_r^2(s)$  des äußeren Regelkreises geliefert.

Der innere Regelkreis wird so entworfen, dass er eine wesentlich größere Bandbreite (ca. 1 Dekade) als der äußere Regelkreis besitzt. Somit kann der innere Kreis beim Entwurf des äußeren Kreises als statisches Übertragungsglied betrachtet werden. Um dies zu illustrieren, werden zunächst die Führungs- und Störübertragungsfunktionen des inneren Regelkreises betrachtet, die sich unmittelbar aus (5.2) zu

$$\hat{t}_{r^1, y^1}(s) = \frac{\hat{g}_r^1(s) \hat{g}^1(s)}{1 + \hat{g}_r^1(s) \hat{g}^1(s)}, \quad \hat{t}_{d^1, y^1}(s) = \frac{1}{1 + \hat{g}_r^1(s) \hat{g}^1(s)}$$

ergeben. Entsprechend den Ausführungen zum Regelkreis mit einem Freiheitsgrad folgt mit Tabelle 5.1, dass für  $\omega \ll \omega_c^1$  mit  $\omega_c^1$  der Durchtrittsfrequenz des inneren Regelkreises die Abschätzungen

$$\hat{t}_{r^1, y^1}(i\omega) \approx 1, \quad \hat{t}_{d^1, y^1}(i\omega) \approx 0$$

gelten. Für in Relation zu  $\omega_c^1$  langsame Führungssignale  $r^1(t)$  und in Relation niederfrequente Störungen  $d^1(t)$ , also für Führungs- und Störsignale mit Frequenzen  $\omega < \omega_c^1$  gilt deshalb

$$y^1(t) \approx r^1(t),$$

d.h., der innere Kreis ist unabhängig von der Störung  $d^1(t)$  und folgt dem Führungssignal  $r^1(t)$  nahezu verzögerungsfrei. Folglich kann der äußere Regelkreis mittels  $\hat{g}_r^2(s)$  so entworfen werden, als würde der innere Regelkreis nicht existieren. Für weitere Ausführungen zur kaskadierten Regelung wird beispielsweise auf [8] verwiesen.

### 5.3 Stabilitätskriterien

Wie in den vorherigen Abschnitten erläutert wurde, ist es für den Entwurf einer Regelung entscheidend, die (interne) Stabilität des geschlossenen Regelkreises zu garantieren. Dazu sei wiederholt, dass gemäß Satz 4.4 eine Übertragungsfunktion  $\hat{g}(s)$  genau dann eingangs–ausgangs–stabil ist, wenn alle Pole in der linken offenen  $s$ -Halbebene liegen. Die Überprüfung dieser Bedingung erfordert somit an sich die Bestimmung sämtlicher Nullstellen des Nennerpolynoms von  $\hat{g}(s)$ , was sich insbesondere für Polynome höheren Grades als analytisch im Allgemeinen unmöglich und numerisch als nicht immer zuverlässig erweist. Hierbei ist hervorzuheben, dass man eigentlich nicht an der genauen Lage der Polstellen interessiert ist, sondern lediglich daran nachzuweisen, ob diese in der linken offenen  $s$ -Halbebene liegen oder nicht.

#### Definition 5.2: Hurwitz–Polynom

Ein Polynom

$$\hat{n}(s) = \sum_{j=0}^n a_j s^j \quad (5.8)$$

wird *Hurwitz–Polynom* genannt, wenn alle Nullstellen von  $\hat{n}(s)$  in der linken offenen  $s$ -Halbebene liegen, d.h., wenn für alle Wurzeln  $s_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  gilt  $\Re\{s_j\} < 0$ .

Allen weiteren Betrachtungen liegt ein Polynom der Form (5.8) mit reellen Koeffizienten  $a_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$  zugrunde. Aufgrund der Annahme reeller Koeffizienten sind die Nullstellen  $s_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  von  $\hat{n}(s)$  entweder reell oder konjugiert komplex [7]. Daraus folgt unmittelbar eine notwendige Bedingung, dass  $\hat{n}(s)$  ein Hurwitz–Polynom ist.

#### Satz 5.2: Beiwertebedingung

Die Koeffizienten  $a_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$  eines Hurwitz–Polynoms  $\hat{n}(s)$  sind alle von Null verschieden und weisen identisches Vorzeichen auf. Ist  $n = 2$  in (5.8), dann ist diese Bedingung notwendig und hinreichend.

**Aufgabe 5.35.** *Beweisen Sie Satz 5.2. Nutzen Sie hierzu, dass sich das Polynom  $\hat{n}(s)$  auch in der Form  $\hat{n}(s) = a_n \prod_{j=1}^n (s - s_j)$  angeben lässt, wobei die  $s_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  die Wurzeln von  $\hat{n}(s)$  beschreiben.*

Die Tatsache, dass Satz 5.2 für  $n > 2$  nur notwendig ist, zeigt das Beispiel

$$\hat{n}(s) = s^3 + s^2 + 11s + 51 = (s + 3)(s - 1 + 4i)(s - 1 - 4i).$$

Im Folgenden werden verschiedene Kriterien und Verfahren aufgeführt, die notwendige und hinreichende Bedingungen bieten, um nachzuweisen, ob ein Polynom ein Hurwitz–Polynom ist, ohne dabei explizit dessen Wurzeln zu bestimmen.

### 5.3.1 Routh–Hurwitz Verfahren

Das Routh–Hurwitz Verfahren bietet eine analytische bzw. numerische Methodik basierend auf der Formulierung des so genannten Routh–Schemas aus der Menge der Koeffizienten  $\{a_j\}_{j=0,1,\dots,n}$  des Polynoms (5.8).

#### Satz 5.3: Routh–Hurwitz Verfahren

Ein Polynom der Form (5.8) mit den reellen Koeffizienten  $a_j, j = 0, 1, \dots, n$  ist genau dann eine Hurwitz–Polynom, wenn alle Elemente der Pivotspalte des nachfolgenden Routh–Schemas

$$\begin{array}{l}
 s^n \\
 s^{n-1} \\
 s^{n-2} \\
 s^{n-3} \\
 \vdots \\
 s^1 \\
 s^0
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{cccc}
 a_{0,1} = a_n & a_{0,2} = a_{n-2} & a_{0,3} = a_{n-4} & \dots \\
 a_{1,1} = a_{n-1} & a_{1,2} = a_{n-3} & a_{1,3} = a_{n-5} & \dots \\
 a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots \\
 a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
 a_{n-1,1} & 0 & 0 & \dots \\
 a_{n,1} & & & 
 \end{array}
 \right.
 \quad (5.9a)$$

mit

$$a_{i,j} = \frac{a_{i-1,1}a_{i-2,j+1} - a_{i-2,1}a_{i-1,j+1}}{a_{i-1,1}} \quad \text{für } i = 2, 3, \dots, n, j = 1, 2, \dots \quad (5.9b)$$

von Null verschieden sind und identisches Vorzeichen besitzen.

Der Beweis dieses Satzes ist beispielsweise in [10, 9] zu finden. Eine Anwendung des Routh–Hurwitz Verfahrens zur Analyse der Eingangs–Ausgangs–Stabilität eines Regelkreises ist nachfolgend exemplarisch aufgeführt.

**Beispiel 5.1.** Als Beispiel betrachte man den in Abbildung 5.10 dargestellten Regelkreis mit der Übertragungsfunktionen

$$\hat{g}_r(s) = \frac{V_I}{s}, \quad \hat{g}(s) = \frac{9}{s^2 + 3s + 9}.$$

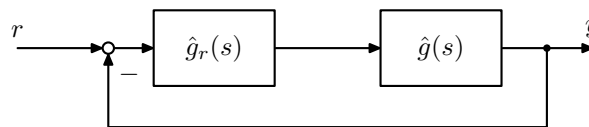


Abb. 5.10.: Regelkreis mit einem Freiheitsgrad.

Man bestimme  $V_I$  so, dass der geschlossene Regelkreis eingangs–ausgangs–stabil ist. Mit der Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises

$$\hat{t}_{r,y}(s) = \frac{\hat{g}_r(s)\hat{g}(s)}{1 + \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)} = \frac{9V_I}{s^3 + 3s^2 + 9s + 9V_I}$$

folgt unmittelbar aus Satz 5.2, dass notwendigerweise  $V_I > 0$  gelten muss. Eine notwendige und hinreichende Bedingung erhält man gemäß Satz 5.3 über das folgende Routh–Schema

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & 9 & 0 \\ s^2 & 3 & 9V_I & 0 \\ s^1 & 9-3V_I & 0 & \\ s^0 & 9V_I & 0 & \end{array}.$$

Da alle Elemente der Pivotspalte von Null verschieden sein und identisches Vorzeichen aufweisen müssen, folgen die Bedingungen

$$9V_I > 0 \wedge 9 - 3V_I > 0 \quad \text{bzw.} \quad 0 < V_I < 3.$$

**Aufgabe 5.36.** Sind die nachfolgenden Polynome

$$\hat{n}_1(s) = s^8 + 2s^7 + 3s^6 + 4s^5 + 5s^4 + 6s^3 + 7s^2 + 8s + 9$$

$$\hat{n}_2(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 4$$

$$\hat{n}_3(s) = s^5 + 15s^4 + 85s^3 + 225s^2 + 274s + 120$$

$$\hat{n}_4(s) = s^4 + 12s^3 + 2s + 7$$

Hurwitz–Polynome?

**Lösung 5.36.** Die Polynome  $\hat{n}_2(s)$  und  $\hat{n}_3(s)$  sind Hurwitz–Polynome.

**Aufgabe 5.37.** Bestimmen Sie den Wertebereich der Parameter  $V_P$  und  $T$  so, dass der geschlossene Regelkreis aus Abbildung 5.10 mit

$$\hat{g}_r(s) = V_P, \quad \hat{g}(s) = \frac{(s+T)^2}{s^3}$$

eingangs–ausgangs–stabil ist. Stellen Sie den Wertebereich in der  $(V_P, T)$ –Ebene dar.

**Lösung 5.37.** Es gelten die Bedingungen  $V_P > 0$  und  $(2V_P - T)T > 0$ .

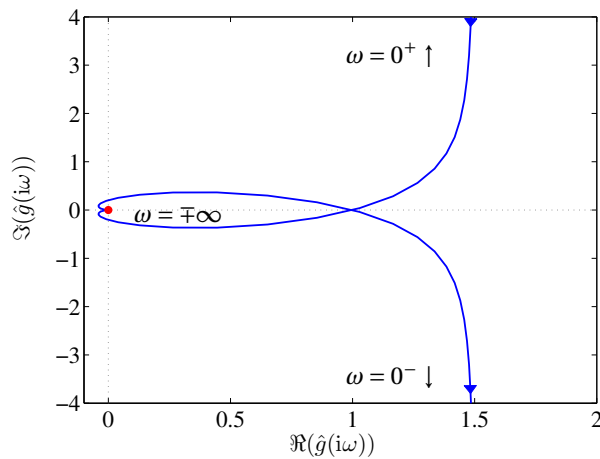
### 5.3.2 Michailov–Kriterium

Im Unterschied zum Routh–Hurwitz Verfahren stellt das Michailov–Kriterium ein graphisches Verfahren dar, zum Nachweis, dass ein Polynom  $\hat{n}(s)$  der Form (5.8) ein Hurwitz–Polynom ist. Hierzu wird der Begriff der *stetigen Winkeländerung* benötigt. Unter der *stetigen Winkeländerung*  $\Delta \arg(\hat{g}(i\omega))$  einer rationalen Funktion  $\hat{g}(s)$  versteht man die Änderung von  $\arg(\hat{g}(i\omega))$ , wenn  $\omega$  den Wertebereich  $-\infty < \omega < \infty$  stetig und monoton wachsend durchläuft. Dabei wird die Winkeländerung *entgegen dem Uhrzeigersinn* positiv gezählt und Sprünge von  $\arg(\hat{g}(i\omega))$  werden *nicht* mitberücksichtigt.

**Beispiel 5.2.** In Abbildung 5.11 ist die Ortskurve der Übertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{s-2}{s(s^2+2s+2)} \tag{5.10}$$

dargestellt.



**Abb. 5.11.:** Ortskurve der Übertragungsfunktion (5.10).

Wenn  $\omega$  stetig von  $-\infty$  bis  $0^-$  wächst, so folgt unmittelbar aus dem Verlauf von  $\hat{g}(i\omega)$ , dass die stetige Winkeländerung  $-3\pi/2$  beträgt. Der Sprung beim Übergang von  $0^-$  auf  $0^+$  wird gemäß Konvention nicht mitgezählt. Die stetige Winkeländerung von  $0^+$  bis  $\infty$  ist ebenfalls  $-3\pi/2$ , weshalb  $\Delta \arg(\hat{g}(i\omega)) = -3\pi$  gilt. Analog führt die Auswertung von (5.11) mit (5.12) auf

$$\Delta \arg(\hat{g}(i\omega)) = -\pi - (0 + \pi + \pi) = -3\pi.$$

**Aufgabe 5.38.** Zeigen Sie, dass die stetige Winkeländerung einer rationalen Funktion  $\hat{g}(s)$  für  $-\infty < \omega \leq 0$  immer gleich der stetigen Winkeländerung für  $0 \leq \omega < \infty$  ist. Hierbei kann von der Beziehung  $\arg(\hat{g}(i\omega)) = -\arg(\hat{g}(-i\omega))$  Gebrauch gemacht werden.

Aus der faktorisierten Darstellung der rationalen Funktion

$$\hat{g}(s) = V \frac{\prod_{j=1}^m (s - s_j^z)}{\prod_{j=1}^n (s - s_j^n)}$$

mit  $s_j^z, s_j^n \in \mathbb{C}$  folgt unmittelbar, dass

$$\arg(\hat{g}(i\omega)) = \arg(V) + \sum_{j=1}^m \arg(i\omega - s_j^z) - \sum_{j=1}^n \arg(i\omega - s_j^n).$$

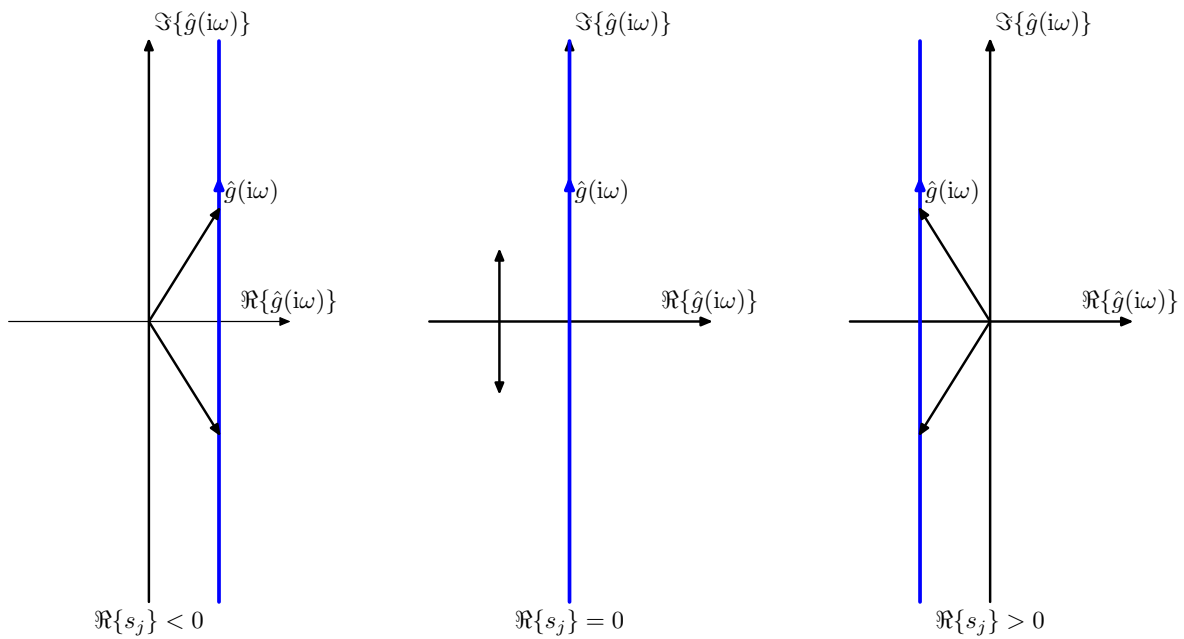
Damit ergibt sich die stetige Winkeländerung von  $\hat{g}(s)$  zu

$$\Delta \arg(\hat{g}(i\omega)) = \sum_{j=1}^m \Delta \arg(i\omega - s_j^z) - \sum_{j=1}^n \Delta \arg(i\omega - s_j^n). \quad (5.11)$$

Die stetige Winkeländerung setzt sich bei rationalen Funktionen aus den stetigen Winkeländerungen der Linearfaktoren  $(s - s_j)$  zusammen. Man kann die in Abbildung 5.12 dargestellten Fälle unterscheiden, womit sich die stetige Winkeländerung von  $(s - s_j)$  zu

$$\Delta \arg(s - s_j) = \begin{cases} \pi, & \text{für } \Re\{s_j\} < 0 \\ 0, & \text{für } \Re\{s_j\} = 0 \\ -\pi, & \text{für } \Re\{s_j\} > 0 \end{cases} \quad (5.12)$$





**Abb. 5.12.:** Stetige Winkeländerung von  $(s - s_j)$ .

ergibt. Damit lässt sich der folgende Satz angeben.

**Satz 5.4: Kriterium von Michailov**

Ein Polynom  $\hat{n}(s)$  vom Grad  $n$  ist genau dann ein Hurwitz-Polynom, wenn gilt

$$\Delta \arg(\hat{n}(i\omega)) = n\pi. \quad (5.13)$$

**Aufgabe 5.39.** Wenden Sie das Michailov-Kriterium auf die Polynome von Aufgabe 5.36 an.

### 5.3.3 Nyquist-Kriterium

Das Nyquist-Kriterium ist auf die Analyse der Eingangs-Ausgangs-Stabilität von Regelkreisen der Form entsprechend Abbildung 5.10 zugeschnitten. Hierbei wird anhand der Ortskurve des offenen Regelkreises

$$\hat{l}(s) = \frac{\hat{z}_l(s)}{\hat{n}_l(s)}$$

mit teilerfremden Polynomen  $\hat{z}_l(s)$  und  $\hat{n}_l(s)$  die Eingangs-Ausgangs-Stabilität des geschlossenen Regelkreises mit der Übertragungsfunktion

$$\hat{t}_{r,y}(s) = \frac{\hat{l}(s)}{1 + \hat{l}(s)} = \frac{\hat{z}_l(s)}{\hat{z}_l(s) + \hat{n}_l(s)}$$

untersucht.

**Annahme 5.1.** Der Regelkreis ist nicht degeneriert, d.h.  $\lim_{s \rightarrow \infty} \hat{l}(s) \neq -1$ .

Mit  $N_0(p(s))$ ,  $N_+(p(s))$  und  $N_-(p(s))$  werden im Weiteren die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms  $p(s)$  auf der imaginären Achse sowie in der rechten offenen bzw. linken offenen  $s$ -Halbebene bezeichnet. Damit kann das *Nyquist-Kriterium* wie folgt formuliert werden.

**Satz 5.5: Nyquist-Kriterium**

Der geschlossene Regelkreis  $\hat{t}_{r,y}(s)$  nach Abbildung 5.10 mit der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises  $\hat{l}(s)$  ist genau dann eingangs–ausgangs–stabil, wenn die stetige Winkeländerung von  $1 + \hat{l}(s)$  die Bedingung

$$\Delta \arg(1 + \hat{l}(i\omega)) = [\max\{\deg \hat{z}_i(s), \deg \hat{n}_i(s)\} - N_-(\hat{n}_i(s)) + N_+(\hat{n}_i(s))] \pi \quad (5.14)$$

erfüllt.

*Beweis.* Wir beweisen Satz 5.5 in 2 Schritten.

- (i)  $\hat{t}_{r,y}(s)$  ist eingangs–ausgangs–stabil  $\Rightarrow$  Bedingung (5.14): Mit der Annahme der Eingangs–Ausgangs–Stabilität von  $\hat{l}(s)$  folgt unmittelbar, dass  $\hat{z}_i(s) + \hat{n}_i(s)$  ein Hurwitz–Polynom ist. Für die stetige Winkeländerung von  $1 + \hat{l}(s)$  gilt, dass

$$\Delta \arg(1 + \hat{l}(i\omega)) = \Delta \arg\left(1 + \frac{\hat{z}_i(i\omega)}{\hat{n}_i(i\omega)}\right) = \Delta \arg(\hat{z}_i(s) + \hat{n}_i(s)) - \Delta \arg(\hat{n}_i(s)).$$

Mit Satz 5.4 ergibt sich somit

$$\Delta \arg(1 + \hat{l}(i\omega)) = [\max\{\deg \hat{z}_i(s), \deg \hat{n}_i(s)\}] \pi - \Delta \arg(\hat{n}_i(s))$$

und (5.14) folgt somit unter Berücksichtigung von (5.12).

- (ii) Bedingung (5.14)  $\Rightarrow \hat{t}_{r,y}(s)$  ist eingangs–ausgangs–stabil: In diesem Fall erfolgt der Beweis der Aussage durch Widerspruch und bleibt dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.  $\square$

**Beispiel 5.3.** Als Beispiel betrachte man den Regelkreis aus Abbildung 5.10 mit der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises

$$\hat{l}(s) = V \frac{s - 2}{s(s^2 + 2s + 2)}. \quad (5.15)$$

Für  $V = 1$  entspricht die Ortskurve von  $\hat{l}(s)$  der von Abbildung 5.11. Es soll nun der Wert von  $V$  so bestimmt werden, dass der geschlossene Regelkreis gemäß Abbildung 5.10 eingangs–ausgangs–stabil ist. Hierzu wird das Nyquist-Kriterium verwendet.

- (i) Für  $V > 0$  entspricht der Verlauf der Ortskurve exakt dem aus Abbildung 5.11. Entsprechend Beispiel 5.2 ergibt sich die stetige Winkeländerung von  $1 + \hat{l}(i\omega)$  in diesem Fall zu

$$\Delta \arg(1 + \hat{l}(i\omega)) = -\pi.$$

Die Auswertung der rechten Seite von Bedingung (5.14) führt auf

$$[\max\{\deg \hat{z}_i(s), \deg \hat{n}_i(s)\} - N_-(\hat{n}_i(s)) + N_+(\hat{n}_i(s))] \pi = [3 - 2 + 0] \pi = \pi.$$

Gemäß Satz 5.5 ist der geschlossene Regelkreis für  $V > 0$  nicht eingangs–ausgangs–stabil.

(ii) Für  $V < -1$  folgt aus Abbildung 5.11, dass die Ortskurve des offenen Regelkreises  $\hat{l}(s)$  den Punkt  $(-1, 0)$  der  $(\Re\{\hat{l}(s)\}, \Im\{\hat{l}(s)\})$ -Ebene umschlingt. Folglich ergibt sich die stetige Winkeländerung in diesem Fall zu

$$\Delta \arg(1 + \hat{l}(i\omega)) = -3\pi,$$

weshalb Bedingung (5.14) nicht erfüllt ist und somit der geschlossene Regelkreis nicht eingangsausgangsstabil ist.

(iii) Sei nun  $-1 < V < 0$  (der Fall  $V = -1$  ist wegen Annahme 5.1 ausgeschlossen). Es gilt zudem

$$\hat{l}(i\omega) = V \frac{\omega(6 - \omega^2) + i4(\omega^2 - 1)}{\omega(4 + \omega^4)},$$

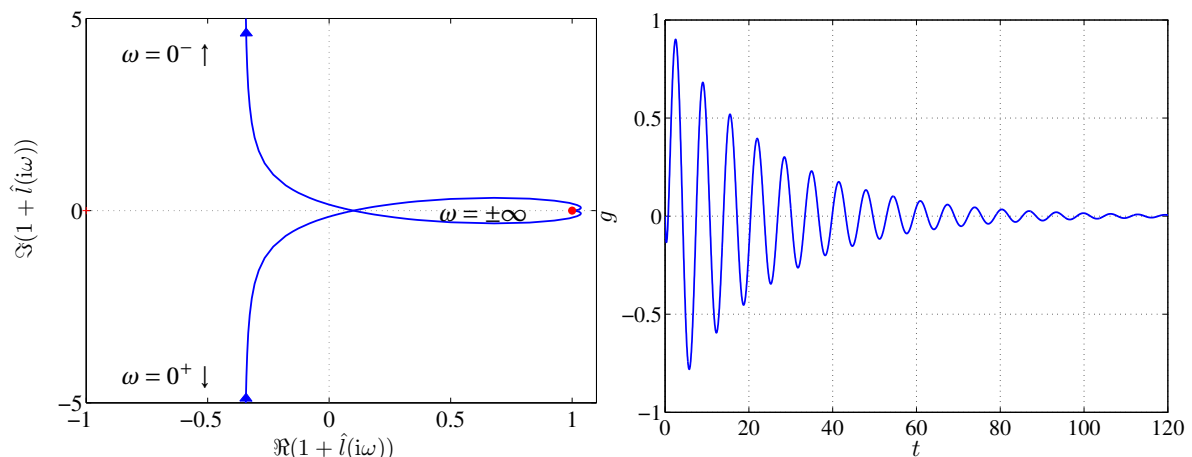
so dass sich die Schnittpunkte der Ortskurve mit der  $\Re\{\hat{l}(i\omega)\}$ -Achse zu jeweils  $(1, 0)$  für  $\omega = \pm 1$  ergeben. Offensichtlich umschlingt die Ortskurve des offenen Regelkreises für  $-1 < V < 0$  den Ursprung nicht mehr. Wie in Abbildung 5.13 (links) exemplarisch für  $V = -\frac{9}{10}$  gezeigt ist, ergibt sich in diesem Fall die stetige Winkeländerung zu

$$\Delta \arg(1 + \hat{l}(i\omega)) = \pi.$$

Mit dem Nyquist-Kriterium folgt somit die Eingangs-Ausgangs-Stabilität des geschlossenen Regelkreises. Dies wird zudem durch Abbildung 5.13 (rechts) bestätigt, die die Impulsantwort  $g(t)$  des geschlossenen Regelkreises mit der Führungsübertragungsfunktion

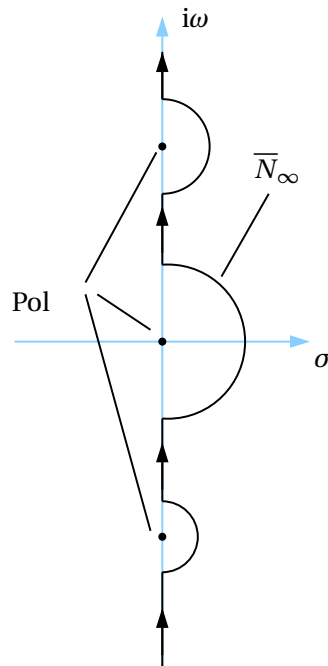
$$\hat{t}_{r,y}(s) = \frac{\hat{l}(s)}{1 + \hat{l}(s)}$$

zeigt. Hierbei wird insbesondere ersichtlich, dass  $g(t)$  absolut integrierbar ist.



**Abb. 5.13.:** Ortskurve von  $1 + \hat{l}(s)$  mit der Übertragungsfunktion (5.15) für  $V = -\frac{9}{10}$  (links) und zugehörige Impulsantwort  $g(t)$  des geschlossenen Regelkreises (rechts).

Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass das Nyquist-Kriterium in verschiedenen Formulierungen in der Literatur vorhanden ist. Insbesondere sei auf die nachfolgende generalisierte Darstellung verwiesen, die bei Einhaltung gewisser Anforderungen an die Übertragungsfunktionen  $\hat{g}(s)$  und  $\hat{g}_r(s)$  auch auf zeitinvariante verteilt-parametrische Systeme angewendet werden kann. Hierbei stellt  $\overline{N}_\infty$  den so genannten Nyquist-Pfad dar. Dieser bezeichnet die Kontur, die sich in der komplexen  $s$ -Ebene ergibt,



**Abb. 5.14.:** Beispiel für einen Nyquist-Pfad im Fall von 3 Polstellen auf der imaginären Achse.

wenn die  $i\omega$ -Achse von  $\omega = -\infty$  bis  $\omega = \infty$  durchlaufen wird, wobei die ggf. vorhandenen Polstellen der Übertragungsfunktion  $\hat{l}(s) = \hat{g}(s)\hat{g}_r(s)$  des offenen Regelkreises auf der  $i\omega$ -Achse durch einen (infinitesimal kleinen) Halbkreis in der abgeschlossenen rechten  $s$ -Halbebene umlaufen werden (vgl. Abbildung 5.14).

**Satz 5.6: Generalisiertes Nyquist-Kriterium**

Der geschlossene Regelkreis  $\hat{t}_{r,y}(s)$  nach Abbildung 5.10 mit der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises  $\hat{l}(s)$  ist genau dann eingangs-ausgangs-stabil, wenn

- (i)  $1 + \hat{l}(s) \neq 0, \forall s \in \overline{N_\infty}$  und
- (ii)  $(1 + \hat{l}(s))|_{s \in \overline{N_\infty}}$  den Ursprung  $N_+(\hat{l}(s))$ -fach im Gegenuhrzeigersinn umläuft, wobei  $N_+(\hat{l}(s))$  die Anzahl der (isolierten) Polstellen des offenen Regelkreises  $\hat{l}(s)$  in der rechten offenen komplexen Halbebene bezeichnet, d.h.

$$\text{ind}(1 + \hat{l}(s)) = N_+(\hat{l}(s))$$

mit den so genannten Nyquist-Index

$$\text{ind}(\hat{g}(s)) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\omega \rightarrow \infty} [\arg(\hat{g}(i\omega)|_{\omega \in \overline{N_\infty}}) - \arg(\hat{g}(-i\omega)|_{\omega \in \overline{N_\infty}})].$$

Zum Beweis dieses Satzes wird auf [4] verwiesen. Des Weiteren sind die Ausführungen in [1, Kapitel 9] zu nennen.

## 5.4 Regelungsentwurf mit dem Frequenzkennlinienverfahren

Für das nachfolgend diskutierte Frequenzkennlinienverfahren zum Regelungsentwurf im Frequenzbereich wendet man häufig eine modifizierte Version des Nyquist-Kriteriums zum Stabilitätsnachweis des geschlossenen Regelkreises an.

### Satz 5.7: Nyquist-Kriterium im Frequenzkennliniendarstellung

Es sei angenommen, dass sich die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises  $\hat{l}(s)$  in der Form

$$\hat{l}(s) = \frac{V \hat{z}_l(s)}{s^\rho \hat{n}_l(s)} e^{-sT_t}, \quad \hat{z}_l(0) = \hat{n}_l(0) = 1 \quad (5.16)$$

mit den teilerfremden Polynomen  $\hat{z}_l(s)$  und  $s^\rho \hat{n}_l(s)$  darstellen lässt, wobei die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) der Verstärkungsfaktor  $V$  und die Totzeit  $T_t$  sind positiv
- (ii) es gilt  $\deg(\hat{n}_l(s)) + \rho > \deg(\hat{z}_l(s))$ ,
- (iii) das Polynom  $\hat{n}_l(s)$  ist ein Hurwitz-Polynom und  $\rho \in \{0, 1, 2\}$ ,
- (iv) die Betragskennlinie von  $\hat{l}(i\omega)$  weist genau einen Schnittpunkt mit der 0 dB Linie (genau eine Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$ ) auf bzw. die Ortskurve  $\hat{l}(i\omega)$  schneidet den Einheitskreis genau einmal und
- (v) im Bereich  $|\hat{l}(i\omega)|_{dB} \geq 0$  gelte  $-540^\circ < \arg(\hat{l}(i\omega)) < 180^\circ$ , d.h. die Ortskurve des offenen Regelkreises  $\hat{l}(s)$  kann vor ihrem Eintauchen in den Einheitskreis den Ursprung höchstens einmal vollständig umkreisen.

Unter diesen Voraussetzungen ist der Regelkreis aus Abbildung 5.10 mit der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises  $\hat{l}(s)$  genau dann eingangs–ausgangs–stabil, wenn der Abstand der Phase an der Durchtrittsfrequenz  $\arg(\hat{l}(i\omega_c))$  zu  $-\pi$ , die so genannte *Phasenreserve*  $\phi$ ,

$$\phi = \arg(\hat{l}(i\omega_c)) + \pi \quad (5.17)$$

positiv ist.

Zur Illustration zeigt Abbildung 5.15 die Nyquist-Ortskurve sowie den Amplituden- und Phasengang einer Übertragungsfunktion  $\hat{l}(s)$ , die die Voraussetzungen von Satz 5.7 erfüllt. Darüber hinaus wird dargestellt, wie sich die Phasenreserve  $\phi$  aus den Diagrammen ablesen lässt.

### 5.4.1 Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis

Beim so genannten *Frequenzkennlinienverfahren* erfolgt der Regelungsentwurf auf Basis der Spezifikation von Anforderungen an das Einschwingverhalten der Antwort des geschlossenen Regelkreises auf ausgewählte Testfunktionen, die dann in Anforderungen an das Bode-Diagramm des offenen Regelkreises übertragen werden. Dabei liegt der Analyse wiederum der Regelkreis mit einem Freiheitsgrad entsprechend der Darstellung in Abbildung 5.16 mit der Führungsgröße  $r(t)$ , der Stellgröße  $u(t)$ , dem Regelfehler  $e(t)$  und der Ausgangsgröße  $y(t)$  zugrunde.

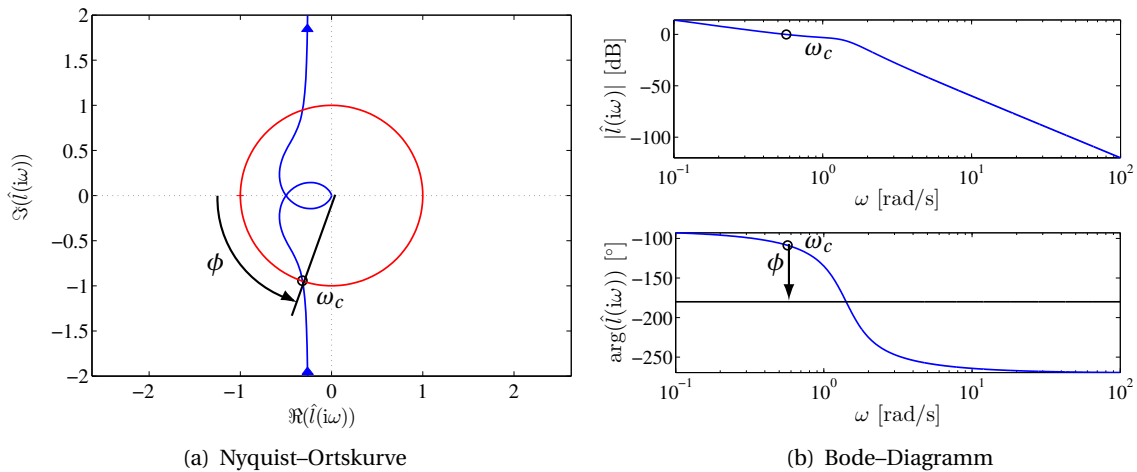


Abb. 5.15.: Bestimmung des Phasenreserve aus der Nyquist-Ortskurve und dem Bode-Diagramm.

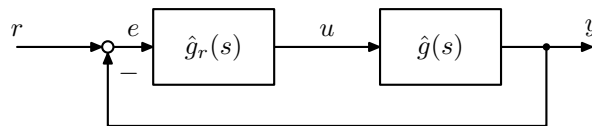


Abb. 5.16.: Regelkreis mit einem Freiheitsgrad für das Frequenzkennlinienverfahren.

Zur Charakterisierung des Einschwingverhaltens des geschlossenen Regelkreises mit der Übertragungsfunktion

$$\hat{t}_{r,y}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{\hat{g}_r(s)\hat{g}(s)}{1 + \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)} = \frac{\hat{l}(s)}{1 + \hat{l}(s)}$$

als Reaktion auf gewisse Testsignale sei zunächst auf Abbildung 5.17 verwiesen. Hier wird exemplarisch der zeitliche Verlauf einer typischen Sprungantwort  $h(t)$  eines geschlossenen Regelkreises für  $r(t) = \sigma(t)$  gezeigt. Das Einschwingverhalten des Regelkreises kann somit anhand der folgenden drei

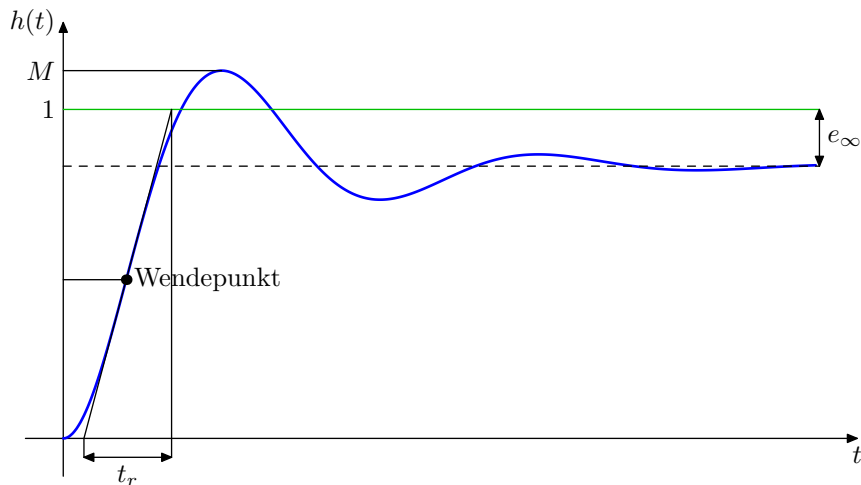


Abb. 5.17.: Kenngrößen der Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises.

Kenngrößen beurteilt werden:

- (i) die Anstiegszeit  $t_r$  als Maß für Schnelligkeit (Dynamik)

- (ii) die *Überschwingweite*  $M$  bzw. das *prozentuale Überschwingen*  $\ddot{u} = (M - 1) \times 100\%$  als Maß für den Dämpfungsgrad (Dynamik)
- (iii) die *bleibende Regelabweichung*  $e_\infty$  als Maß für die stationäre Genauigkeit.

**Anmerkung 5.4**

Die Formulierung dieser Kenngrößen basiert auf der Annahme, dass sich der geschlossene Regelkreis in guter Näherung durch ein P-T<sub>2</sub>-Glied beschreiben lässt. Dies ist insbesondere dann gegeben, wenn die reale Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises ein dominierendes konjugiert-komplexes Polpaar aufweist [11]. Dies ist Gegenstand der Aufgabe 5.41.

Die Kenngrößen der Sprungantwort eines geschlossenen Regelkreises werden nun über *empirische Näherungsbeziehungen* mit dem Frequenzgang des offenen Regelkreises  $\hat{l}(i\omega)$  in Verbindung gebracht. Hierzu wird vorausgesetzt, dass  $\hat{l}(s)$  in der Form (5.16) angegeben werden kann und zudem die Voraussetzungen von Satz 5.7 erfüllt sind. Damit ergeben sich die folgenden Beziehungen (für eine detaillierte graphische Erläuterung wird z.B. auf [11] verwiesen):

- (i) Die Anstiegszeit  $t_r$  und die Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$  hängen über die folgende Näherungsbeziehung

$$\omega_c t_r \approx 1.5 \tag{5.18}$$

zusammen. Zur Erläuterung sei bemerkt, dass entsprechend den Voraussetzungen der Amplitudengang von  $\hat{l}(i\omega)$  nur einen Schnittpunkt mit der 0-dB-Linie aufweist. Somit trennt die Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$  jene Frequenzen, die vom offenen Regelkreis verstärkt werden, von denen, die abgeschwächt werden. Wie oben angesprochen wurde, ist die Durchtrittsfrequenz ein Maß für die Bandbreite des offenen Regelkreises, so dass mit steigendem  $\omega_c$  die Dynamik des geschlossenen Regelkreises schneller wird, womit  $t_r$  abnimmt.

- (ii) Das prozentuale Überschwingen  $\ddot{u}$  kann mit der Phasenreserve  $\phi$  über die Näherungsbeziehung

$$\phi [^\circ] + \ddot{u} [\%] \approx 70 \tag{5.19}$$

in Verbindung gebracht werden. Nach Satz 5.7 ist  $\phi$  ein Maß für den Abstand zur Stabilitätsgrenze, weshalb eine Verminderung der Phasenreserve eine Erhöhung der Schwingungsneigung und damit des Überschwingens mit sich bringt. Dies kann leicht durch die Analyse der Führungsübertragungsfunktion  $\hat{t}_{r,y}(s)$  an der Durchtrittsfrequenz illustriert werden. Speziell gilt (vgl. auch Abbildung 5.15)

$$|\hat{t}_{r,y}(i\omega_c)| = \frac{|\hat{l}(i\omega_c)|}{|1 + \hat{l}(i\omega_c)|} = \frac{|-\cos(\phi) - i\sin(\phi)|}{|1 - \cos(\phi) - i\sin(\phi)|} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos(\phi))}} = \frac{1}{2|\sin(\frac{\phi}{2})|}.$$

Offensichtlich gilt  $|\hat{t}_{r,y}(i\omega_c)| \rightarrow \infty$  für  $\phi \rightarrow 0$ , weshalb der geschlossene Regelkreis  $\hat{t}_{r,y}(s)$  für  $\phi = 0$  ein konjugiert-komplexes Polpaar an  $\pm i\omega_c$  aufweisen muss und damit ungedämpft schwingt.

**Aufgabe 5.40.** Zeigen Sie, dass gilt  $\hat{l}(i\omega_c) = -\cos(\phi) - i\sin(\phi)$  mit der Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$  und der Phasenreserve  $\phi$ .

(iii) Die bleibende Regelabweichung

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t)) \quad (5.20)$$

hängt unmittelbar mit dem Verstärkungsfaktor  $V$  des offenen Regelkreises zusammen. Unter der Annahme, dass der geschlossene Regelkreis stabil ist, womit die Existenz von  $e_\infty$  sichergestellt wird, führt der Endwertsatz der Laplace-Transformation auf

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{e}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \hat{l}(s)} s \hat{r}(s).$$

Mit (5.16) folgt damit

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^\rho \hat{n}_i(s)}{s^\rho \hat{n}_i(s) + V \hat{z}_i(s) e^{-sT_i}} s \hat{r}(s), \quad (5.21)$$

wobei gemäß Annahme gilt, dass  $\hat{z}_i(0) = \hat{n}_i(0) = 1$ . Für die unterschiedlichen Testsignale  $r(t) = \sigma(t)$  und  $r(t) = t\sigma(t)$  ergeben sich damit die nachfolgenden Werte von  $e_\infty$ :

- Sei  $r(t) = \sigma(t)$  bzw.  $\hat{r}(s) = 1/s$ , dann gilt

$$e_\infty = \begin{cases} \frac{1}{1+V}, & \rho = 0 \\ 0, & \rho \in \{1, 2\} \end{cases} \quad (5.22)$$

- Sei  $r(t) = t\sigma(t)$  bzw.  $\hat{r}(s) = 1/s^2$ , dann gilt

$$e_\infty = \begin{cases} \infty, & \rho = 0 \\ \frac{1}{V}, & \rho = 1 \\ 0, & \rho = 2. \end{cases} \quad (5.23)$$

Um eine bleibende Regelabweichung von identisch Null für einen Einheitssprung  $r(t) = \sigma(t)$  zu erhalten, muss  $\hat{l}(s)$  mindestens eine Polstelle an  $s = 0$  aufweisen. Analog folgt für ein rampenförmiges Eingangssignal  $r(t) = t\sigma(t)$ , dass  $\hat{l}(s)$  mindestens einen doppelten Pol an  $s = 0$  besitzen muss, damit  $e_\infty = 0$  erzielt wird.

**Aufgabe 5.41.** Geben sei die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises in Form eines  $P$ - $T_2$ -Gliedes, d.h.

$$\hat{t}_{r,y}(s) = \frac{1}{1 + 2\xi(Ts) + (Ts)^2} = \frac{\hat{l}(s)}{1 + \hat{l}(s)}, \quad T > 0, \xi \in (0, 1). \quad (5.24)$$

Für die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises gilt somit offensichtlich

$$\hat{l}(s) = \frac{1}{Ts(2\xi + Ts)}. \quad (5.25)$$

Bearbeiten Sie damit die folgenden Aufgaben.

- Bestimmen Sie die Steigung  $\Delta h$  der Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises am Wendepunkt entsprechend Abbildung 5.17.



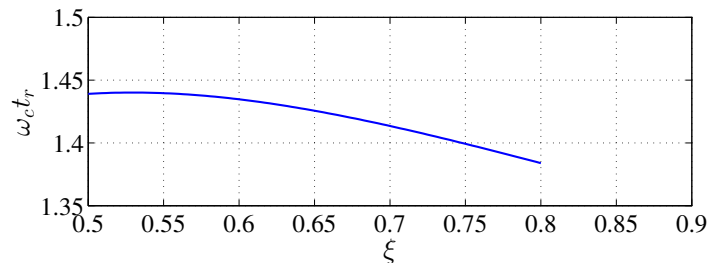
- b) Zeigen Sie, dass in diesem Fall für die Anstiegszeit  $t_r$  gilt  $t_r = 1/\Delta h$ .
- c) Berechnen Sie die Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$  von  $\hat{l}(s)$ . Zeichnen Sie das Produkt  $\omega_c t_r$  als Funktion des Dämpfungsgrades  $\xi$  im Bereich  $\xi \in [0.5, 0.8]$ .
- d) Bestimmen Sie das Maximum  $M$  der Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises mit der Übertragungsfunktion (5.24).
- e) Ermitteln Sie die Phasenreserve  $\phi$  für  $\hat{l}(s)$  aus (5.25). Zeichnen Sie  $\ddot{u}[\%] + \phi [^\circ]$  mit  $\ddot{u} = (M - 1) \times 100\%$  als Funktion des Dämpfungsgrades  $\xi$  im Bereich  $\xi \in [0.5, 0.8]$ .

**Lösung 5.41.** Die Lösungen der Teilaufgaben von Aufgabe 5.41 lauten wie folgt:

$$a) \Delta h = \frac{1}{T} \exp\left(\frac{-\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

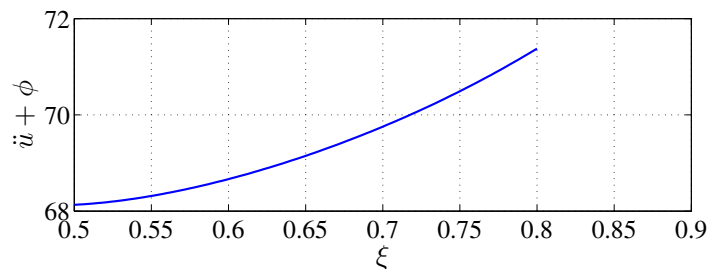
b) ✓

$$c) \omega_c = \frac{1}{T} \sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2}$$



$$d) M = 1 + \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

$$e) \phi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega_c T}{2\xi}\right)$$



## 5.4.2 Vorgehen beim Entwurf mittels Frequenzkennlinienverfahren

Das Vorgehen beim Reglerentwurf mittels des Frequenzkennlinienverfahrens lässt sich somit wie folgt zusammenfassen:

1. Für gegebene Streckenübertragungsfunktion  $\hat{g}(s)$  müssen die Kenngrößen  $t_r$ ,  $M$  oder  $\ddot{u}$  und  $e_\infty$  zur Charakterisierung des Einschwingverhaltens des geschlossenen Regelkreises spezifiziert werden.
2. Die Kenngrößen  $t_r$ ,  $M$  oder  $\ddot{u}$  und  $e_\infty$  werden mit Hilfe der Näherungsbeziehungen (5.18), (5.19) und (5.21) in Vorgaben an den Frequenzgang des offenen Regelkreises  $\hat{l}(s)$  übertragen.

3. Der Regler  $\hat{g}_r(s)$  ist so auszulegen, dass der geschlossene Regelkreis eingangs–ausgangs–stabil ist und die Forderungen aus 2. erfüllt sind. Die Stabilitätsanalyse kann mittels Satz 5.7 durch Überprüfung der Phasenreserve  $\phi$  erfolgen, wenn  $\hat{l}(s) = \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)$  die dort formulierten Voraussetzungen erfüllt, oder mittels des Nyquistkriteriums aus Satz 5.5 bzw. 5.6.
4. Zur Vermeidung eines kriechenden Einlaufens der Sprungantwort in den stationären Endwert soll der Regler  $\hat{g}_r(s)$  in 3. so entworfen werden, dass ca. 1 Dekade um die Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$  die Betragskennlinie von  $\hat{l}(s)$  mit mindestens 20 dB/Dekade abfällt.
5. Da der Entwurf auf empirischen Beziehungen basiert, ist die Qualität des Reglerentwurfs immer durch numerische Simulationen zu überprüfen. Falls kein zufriedenstellendes Ergebnis erzielt wird, dann ist zu überprüfen, ob die in 1. spezifizierten Anforderungen überhaupt prinzipiell erfüllbar sind, oder ob die Verwendung eines anderen Reglers in 3. die Ergebnisse verbessern würde.
6. Es ist zu beachten, dass eine Begrenzung der maximalen Stellgröße  $u(t)$ , die bei jedem technischen Prozess vorhanden ist, im Rahmen dieses einfachen Entwurfsverfahrens nicht explizit berücksichtigt werden kann. Eine diesbezügliche Analyse kann durch die numerische Simulation des geschlossenen Regelkreises erfolgen. Bei Überschreiten der maximal zulässigen Stellgröße müssen die Anforderungen aus 1. entsprechend verändert werden, wobei insbesondere die Anstiegszeit  $t_r$  zu vergrößern ist. Zudem sollte im Rahmen einer Führungsregelung niemals eine Sprungfunktion sondern immer eine hinreichend glatte Referenztrajektorie  $r(t)$  verwendet werden.

Mit diesen Ausführungen werden im Weiteren gewisse Reglerstrukturen sowie deren Eigenschaften und Anwendungen exemplarisch illustriert.

### 5.4.3 PI–Reglerentwurf

Gegeben sei die Streckenübertragungsfunktion eines Feder–Masse–Dämpfer–Systems

$$\hat{g}(s) = \frac{V}{1 + 2\xi Ts + (Ts)^2} \quad (5.26)$$

mit  $V = 5$ ,  $T = 1$  und  $\xi = 1/\sqrt{2}$ .

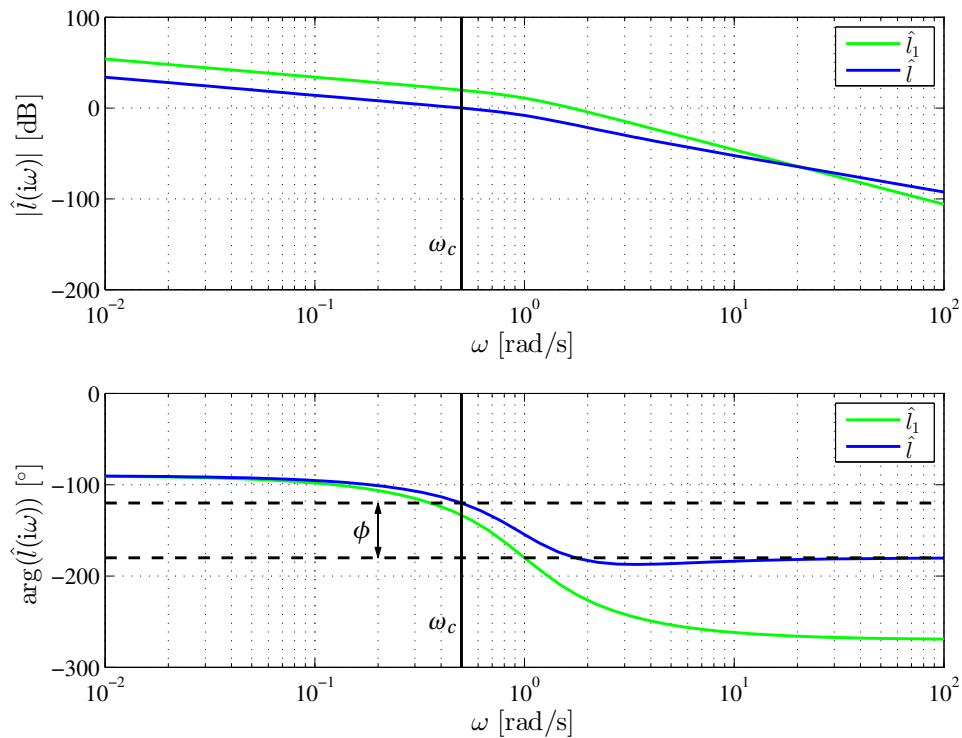
1. Die Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis sind durch  $t_r = 3$  s,  $\ddot{u} = 10\%$  und  $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$  gegeben.
2. Mit (5.18), (5.19) und (5.21) ergeben sich hieraus die Vorgaben an den Frequenzgang des offenen Regelkreises  $\hat{l}(s)$  zu  $\omega_c = 1.5/t_r = 0.5$  rad/s,  $\phi = 60^\circ$  und  $\hat{l}(s)$  muss mindestens eine Polstelle an  $s = 0$  aufweisen ( $\rho \geq 1$  in (5.16) wegen (5.22)).
3. Als Regler wird ein PI–Regler

$$\hat{g}_r(s) = \frac{V_I(1 + T_I s)}{s}$$

gewählt. Zur weiteren Analyse wird zunächst das Bode–Diagramm aller *bekannt*en Terme von  $\hat{l}(s) = \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)$  untersucht, d.h.

$$\hat{l}_1(s) = \frac{V}{s(1 + \sqrt{2}s + s^2)}, \quad (5.27)$$

welches in Abbildung 5.18 dargestellt ist.



**Abb. 5.18.:** Bode-Diagramm der Übertragungsfunktionen  $\hat{l}_1(s)$  und  $\hat{l}(s)$  für den PI-Reglerentwurf.

An der gewünschten Durchtrittsfrequenz  $\omega_c = 0.5 \text{ rad/s}$  ergibt sich  $\arg(\hat{l}_1(i\omega_c)) = -\pi/2 - \arg(1 - \omega_c^2 + i\sqrt{2}\omega_c) = -133.3^\circ$ . Wegen  $\phi = 60^\circ = \arg(\hat{l}(i\omega_c)) + \pi$  bzw.  $\arg(\hat{l}(i\omega_c)) = -120^\circ$  muss mit Hilfe des Linearterms  $1 + T_I s$  des Reglers die Phase um  $13.3^\circ$  angehoben werden. Somit ergibt sich aus

$$\arg(1 + iT_I\omega_c) = \arg(1 + i0.5T_I) = \arctan(0.5T_I) = 13.3 \frac{\pi}{180}$$

der Wert  $T_I = 0.473 \text{ s}$ .

Der Wert<sup>3</sup> von  $V_I$  wird so berechnet, dass der Amplitudengang an der Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$  die 0-dB-Linie schneidet, also die Bedingung

$$V_I \left| \frac{V(1 + iT_I\omega_c)}{i\omega_c(1 - \omega_c^2 + i\sqrt{2}\omega_c)} \right| = 1$$

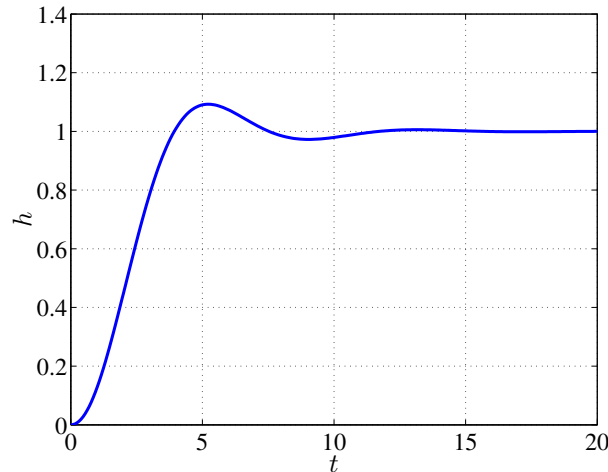
erfüllt wird. Hieraus ergibt sich  $V_I = 0.1$ , womit sich der PI-Regler zu

$$\hat{g}_r(s) = \frac{0.1(1 + 0.473s)}{s} \quad (5.28)$$

ergibt. Insbesondere kann leicht überprüft werden, dass  $\hat{l}(s) = \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)$  die Bedingungen aus Satz 5.7 erfüllt, weshalb die Eingangs-Ausgangs-Stabilität unmittelbar anhand der Phasenreserve beurteilt bzw. garantiert werden kann.

<sup>3</sup>Die hier gewählte Vorgehensweise, zuerst die Phase an der Durchtrittsfrequenz mit dem Linearterm  $1 + T_I s$  einzustellen und dann mit  $V_I$  die Betragskorrektur vorzunehmen ist *in diesem Beispiel* insofern sinnvoll, da der Verstärkungsfaktor  $V_I$  des PI-Reglers zwar den Betrag, aber nicht die Phase verändert.

4. Aus dem Bode-Diagramm von  $\hat{l}(s)$  in Abbildung 5.18 ist leicht ersichtlich, dass zum einen die Bedingungen aus 2. erfüllt sind und zum anderen die Betragskennlinie von  $\hat{l}(s)$  in der Umgebung der Durchtrittsfrequenz  $\omega_c = 0.5 \text{ rad/s}$  mit mindestens 20 dB je Dekade abfällt.
5. Zur Evaluierung der Eigenschaften des geschlossenen Regelkreises zeigt Abbildung 5.19 die zugehörige Sprungantwort, die bestätigt, dass die in 1. formulierten Anforderungen an den Entwurf sehr gut eingehalten werden.



**Abb. 5.19.:** Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises für den PI-Reglerentwurf.

6. Im betrachteten Beispiel werden an die Stellgröße und deren Begrenzungen keine weiteren Anforderungen gestellt.

#### 5.4.4 Lead-Lag-Reglerentwurf

Beim *Lead-Lag-Reglerentwurf* erfolgt die gezielte Anpassung des Phasengangs in gewissen Frequenzbereichen durch die Verwendung von phasenhebenden (Lead) oder phasenabsenkenden (Lag) Korrekturgliedern. Dies wird im Weiteren anhand der Streckenübertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{2\left(1 + \frac{s}{2}\right)}{s\left(1 + 2 \times 0.8\left(\frac{s}{3}\right) + \left(\frac{s}{3}\right)^2\right)} \quad (5.29)$$

illustriert. Das prinzipielle Vorgehen entspricht dabei dem Schema aus Abschnitt 5.4.2.

1. Für den geschlossenen Regelkreis wird gefordert, dass  $t_r = 0.1 \text{ s}$ ,  $\dot{u} = 15\%$  und  $e_{\infty}|_{r(t)=t\sigma(t)} = 0.01$ .
2. Aus (5.18), (5.19) ergeben sich somit die Anforderungen an den Frequenzgang des offenen Regelkreises zu  $\omega_c = 15 \text{ rad/s}$  und  $\phi = 55^\circ$ . Mit (5.23) folgt für den Verstärkungsfaktor des offenen Regelkreises der Wert

$$V_l = \frac{1}{e_{\infty}|_{r(t)=t\sigma(t)}} = 100.$$

Wegen  $V = 2$  aus (5.29) führt dies auf den Verstärkungsfaktor des Reglers

$$V_r = \frac{V_l}{2} = 50.$$

3. Für Betrag und Phase von  $\hat{l}_1(i\omega) = V_r \hat{g}(i\omega)$  an der Durchtrittsfrequenz  $\omega = \omega_c$  gilt  $|\hat{l}_1(i\omega_c)| = 2$  und  $\arg(\hat{l}_1(i\omega_c)) = -169.16^\circ$ . Damit muss der Betrag an  $\omega_c$  auf den Wert 1 verringert und die Phase angehoben werden. Da  $V_l$  durch die Forderung an die bleibende Regelabweichung fixiert ist, kann nicht die gleiche Vorgehensweise wie in Abschnitt 5.4.3 gewählt werden. Vielmehr muss hier ein so genannter Lead-Lag-Regler entworfen werden (vgl. auch (4.55) für  $\eta < 1$  bzw.  $\eta > 1$ ). Dazu wird in einem ersten Schritt ein Lead-Glied so bestimmt, dass die Phase an der Durchtrittsfrequenz um  $\Delta\varphi = 44.16^\circ + 10^\circ$  angehoben wird. Die Anhebung um die zusätzlichen  $10^\circ$  erfolgt deshalb, da bei der nachfolgenden Betragsabsenkung durch ein Lag-Glied auch die Phase wieder reduziert wird.

(a) Das Lead-Glied

$$\hat{g}_r^{lead}(s) = \frac{1 + Ts}{1 + T\eta s}, \quad 0 < \eta < 1, T > 0$$

hat gemäß den Ausführungen in Abschnitt 4.7.9 an der Stelle  $\omega_{\max} = 1/T\sqrt{\eta}$  die maximale Phasenhebung

$$\varphi_{\max} = \arg(\hat{g}_r^{lead}(\omega_{\max})) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right) - \arctan(\sqrt{\eta}).$$

Für  $\omega_{\max} = \omega_c$  und  $\varphi_{\max} = \Delta\varphi$  folgt somit

$$\begin{aligned} \eta &= \left( \tan(\Delta\varphi) - \sqrt{\tan^2(\Delta\varphi) + 1} \right)^2 \\ &= 1 + 2 \tan(\Delta\varphi) \left( \tan(\Delta\varphi) - \sqrt{\tan^2(\Delta\varphi) + 1} \right), \end{aligned}$$

da gilt  $\arctan(x) - \arctan(y) = \arctan((x - y)/(1 + xy))$  für  $xy > -1$  [2]. Mit  $T = 1/(\sqrt{\eta}\omega_c)$  und den obigen Zahlenwerten führt dies auf  $\eta = 0.105$  und  $T = 0.206$ , womit sich die Übertragungsfunktion des Lead-Gliedes zu

$$\hat{g}_r^{lead}(s) = \frac{1 + 0.206s}{1 + 0.02163s} \quad (5.30)$$

ergibt. Für die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises gilt somit

$$\hat{l}_2(s) = V_r \hat{g}(s) \hat{g}_r^{lead}(s) = 50 \frac{1 + 0.206s}{1 + 0.02163s} \frac{2(1 + \frac{s}{2})}{s(1 + 2 \times 0.8(\frac{s}{3}) + (\frac{s}{3})^2)},$$

woraus sich Betrag und Phase an  $\omega = \omega_c$  zu  $|\hat{l}_2(i\omega_c)| = 6.166$  und  $\arg(\hat{l}_2(i\omega_c)) = -115^\circ$  ergeben.

- (b) Zur Reduktion des Betrags um den Faktor  $\Delta A = 1/6.166$  und zur Anpassung der Phase um  $\Delta\varphi = -10^\circ$  von der Übertragungsfunktion  $\hat{l}_2(i\omega)$  an der Durchtrittsfrequenz  $\omega = \omega_c$  wird ein Lag-Glied mit der Übertragungsfunktion

$$\hat{g}_r^{lag}(s) = \frac{1 + Ts}{1 + T\eta s}, \quad \eta > 1, T > 0$$

verwendet. Die Werte von  $\eta$  und  $T$  können dabei aus den Beziehungen

$$\left| \hat{g}_r^{lag}(i\omega_c) \right| = \frac{\sqrt{1 + (\omega_c T)^2}}{\sqrt{1 + (\omega_c \eta T)^2}} = \Delta A$$

und

$$\arg(\hat{g}_r^{lag}(i\omega_c)) = \arctan \omega_c T - \arctan \omega_c \eta T = \arctan\left(\frac{\omega_c T(1-\eta)}{1+\eta\omega_c^2 T^2}\right) = \Delta\varphi$$

ermittelt werden. Mit

$$T = \frac{\Delta A \sqrt{1 + \tan^2(\Delta\varphi)} - 1}{\omega_c \tan(\Delta\varphi)} \quad (5.31)$$

und

$$\eta = \frac{\omega_c T - \tan(\Delta\varphi)}{\omega_c T(1 + \omega_c T \tan(\Delta\varphi))} \quad (5.32)$$

führt dies auf  $\eta = 6.293$  bzw.  $T = 0.316$  und damit auf die Übertragungsfunktion des Lag-Gliedes

$$\hat{g}_r^{lag}(s) = \frac{1 + 0.316s}{1 + 1.989s}. \quad (5.33)$$

Die Übertragungsfunktion des Lead-Lag-Reglers  $\hat{g}_r(s)$  setzt sich aus den beiden Übertragungsfunktionen (5.30) und (5.33) zusammen, d.h.

$$\hat{g}_r(s) = V_r \hat{g}_r^{lead}(s) \hat{g}_r^{lag}(s) = 50 \left( \frac{1 + 0.206s}{1 + 0.02163s} \right) \left( \frac{1 + 0.316s}{1 + 1.989s} \right). \quad (5.34)$$

4. Aus dem Bode-Diagramm des offenen Regelkreises  $\hat{l}(s) = \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)$  in Abbildung 5.20 erkennt man, dass einerseits die Bedingungen von 2. erfüllt sind und andererseits die Betragskennlinie von  $\hat{l}(s)$  in der Umgebung der Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$  mit mindestens 20 dB je Dekade abfällt.
5. Die Sprung- und die Rampenantwort des geschlossenen Regelkreises zeigt Abbildung 5.21. Offensichtlich entspricht die stationäre Genauigkeit für die Referenztrajektorie  $r(t) = t\sigma(t)$  dem geforderten Wert.
6. Stellgrößenbeschränkungen wurden in diesem Beispiel nicht berücksichtigt.

**Aufgabe 5.42.** Verifizieren Sie die Beziehungen (5.31) und (5.32) für  $T$  und  $\eta$ .

### 5.4.5 Kompensationsreglerentwurf

Unter dem Begriff des *Kompensationsreglerentwurfs* versteht man die Anwendung geeigneter Methoden, die die Wirkungsweise eines das Übertragungsverhalten ungünstig beeinflussenden Regelkreisgliedes  $\hat{g}_1(s)$  durch die Zuschaltung von *Kompensationsgliedern* aufzuheben gestatten. Dabei wird nachfolgend ausschließlich die Integration von Kompensationsgliedern in das Frequenzkennlinienverfahren diskutiert. Weiterführende Anwendungen, beispielsweise zur Spezifikation einer gewünschten Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises, werden in Abschnitt 5.5 vorgestellt.

Im Weiteren soll deshalb exemplarisch die Streckenübertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{V}{\hat{n}_0(s)\hat{n}_1(s)} \quad (5.35)$$

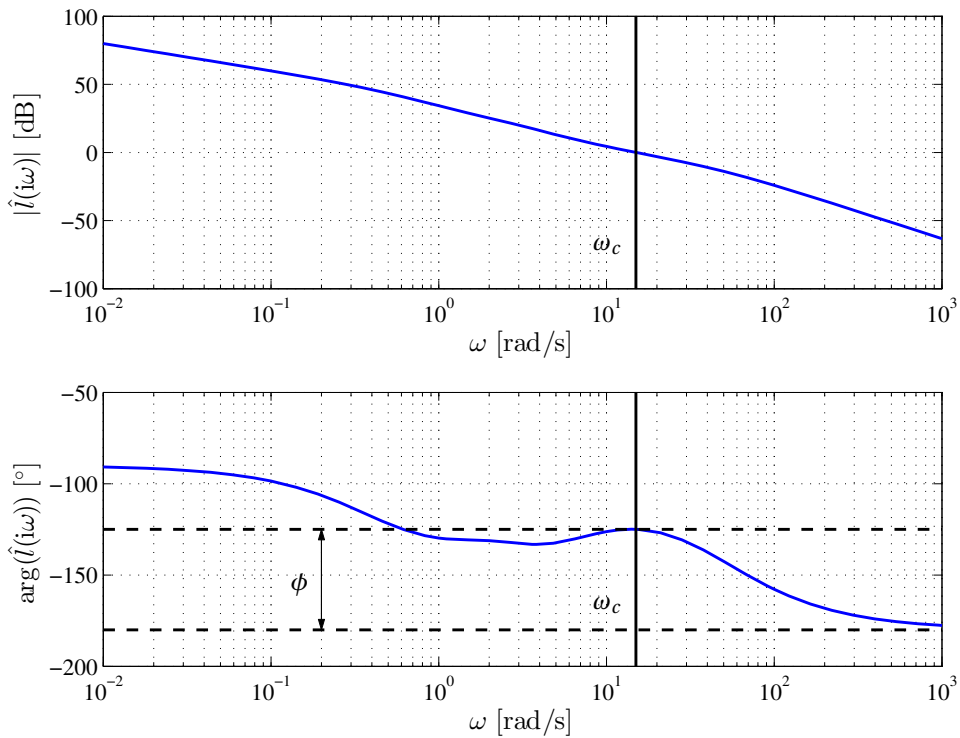


Abb. 5.20.: Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion  $\hat{l}(s)$  für den Lead-Lag-Reglerentwurf.

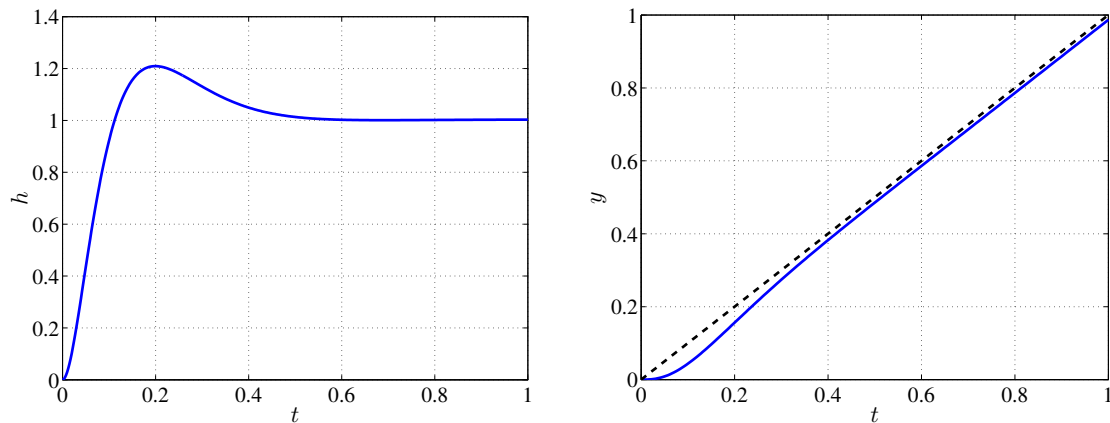


Abb. 5.21.: Sprung- und Rampenantwort des geschlossenen Regelkreises für den Lead-Lag-Reglerentwurf.

betrachtet werden, für die angenommen wird, dass  $V > 0$  und  $\hat{n}_0(s)$  rein reelle Nullstellen mit negativem Realteil aufweist. Die Nullstellen des Polynoms  $\hat{n}_1(s)$  sollen in konjugiert-komplexen Paaren auftreten mit jeweils negativem Realteil. Mittels eines *Kompensationsreglers* der Form

$$\hat{g}_r(s) = \frac{V_r \hat{n}_1(s)}{\hat{n}_r(s)} \quad (5.36)$$

mit  $\deg \hat{n}_r(s) \geq \deg \hat{n}_1(s)$  (proper) soll im Weiteren sichergestellt werden, dass der geschlossene Regelkreis neben Anforderungen an die Anstiegszeit  $t_r$ , dem prozentualen Überschwingen  $\ddot{u}$  und der stationären Genauigkeit  $e_\infty$  zudem eine weitere Forderung erfüllt, beispielsweise die der Einhaltung

einer Stellgrößenbeschränkung  $|u(t)| \leq \bar{u}$ . Beispielhaft werden die folgenden Übertragungsfunktionen angenommen

$$\begin{aligned}\hat{n}_0(s) &= \left(1 + \frac{s}{10}\right)\left(1 + \frac{s}{1000}\right) \\ \hat{n}_1(s) &= 1 + 2 \times 0.1\left(\frac{s}{2}\right) + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \\ \hat{n}_r(s) &= s(1 + T_r s)^2\end{aligned}\tag{5.37}$$

mit  $V = 1$  und den Anforderungen an das Einschwingverhalten des geschlossenen Regelkreises  $t_r = 0.5\text{ s}$ ,  $\ddot{u} = 5\%$  und  $e(t)_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$  und  $\bar{u} = 200$  für  $r(t) = 100\sigma(t)$ . Die weiteren Entwurfsschritte sind den Ausführungen in Abschnitt 5.4.2 zu entnehmen.

- Die Vorgaben an den Frequenzgang des offenen Regelkreises  $\hat{l}(s)$  ergeben sich zu  $\omega_c = 3\text{ rad/s}$ ,  $\phi = 65^\circ$  und  $\hat{l}(s)$  muss mindestens eine einfache Polstelle bei  $s = 0$  besitzen.
- Die bekannten Terme von  $\hat{l}(s) = \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)$  sind

$$\hat{l}_1(s) = \frac{1}{s\left(1 + \frac{s}{10}\right)\left(1 + \frac{s}{1000}\right)},$$

womit sich die Phase von  $\hat{l}_1(i\omega)$  an der Durchtrittsfrequenz zu  $\arg(\hat{l}_1(i\omega_c)) = -\pi/2 - \arctan(3/10) - \arctan(3/1000) = -107^\circ$  ergibt. Wegen  $\phi = 65^\circ$  muss mittels des Terms  $(1 + T_r s)^2$  eine Phasenabsenkung auf  $-115^\circ$  erfolgen. Der Wert von  $T_r$  folgt dementsprechend zu

$$T_r = \frac{\tan\left(\frac{8}{2} \frac{\pi}{180}\right)}{\omega_c} = 0.0233.$$

Die Betragskorrektur an  $\omega_c$  wird mit Hilfe des Verstärkungsfaktors  $V_r$  umgesetzt

$$V_r = \frac{1}{V} \frac{1}{\left|\frac{\hat{l}_1(i\omega_c)}{(1 + T_r i\omega_c)^2}\right|} = \frac{3.147}{V} = 3.147.$$

Damit ergibt sich die Übertragungsfunktion des Reglers (5.36) in Abhängigkeit von  $V$  zu

$$\hat{g}_r(s) = 3.147 \frac{1 + 2 \times 0.1\left(\frac{s}{2}\right) + \left(\frac{s}{2}\right)^2}{s(1 + 0.0233s)^2}.$$

- Aus dem Bode-Diagramm des offenen Regelkreises  $\hat{l}(s) = \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)$  in Abbildung 5.22 erkennt man, dass einerseits die Bedingungen von 2. erfüllt sind und andererseits die Betragskennlinie von  $\hat{l}(s)$  in der Umgebung der Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$  mit mindestens 20 dB je Dekade abfällt.
- Die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises zeigt Abbildung 5.23(a).
- Zur Überprüfung der Stellgrößenbeschränkung  $|u(t)| \leq \bar{u} = 200$  wird die Übertragungsfunktion

$$\hat{i}_{r,u}(s) = \frac{\hat{g}_r(s)}{1 + \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)}$$

berechnet und die Sprungantwort für  $r(t) = 100\sigma(t)$  (numerisch) ermittelt. Abbildung 5.23(b) zeigt den zugehörigen Verlauf der Stellgröße  $u(t)$ . Offensichtlich gelingt es nicht, die Forderung nach  $|u(t)| \leq 200$  einzuhalten.



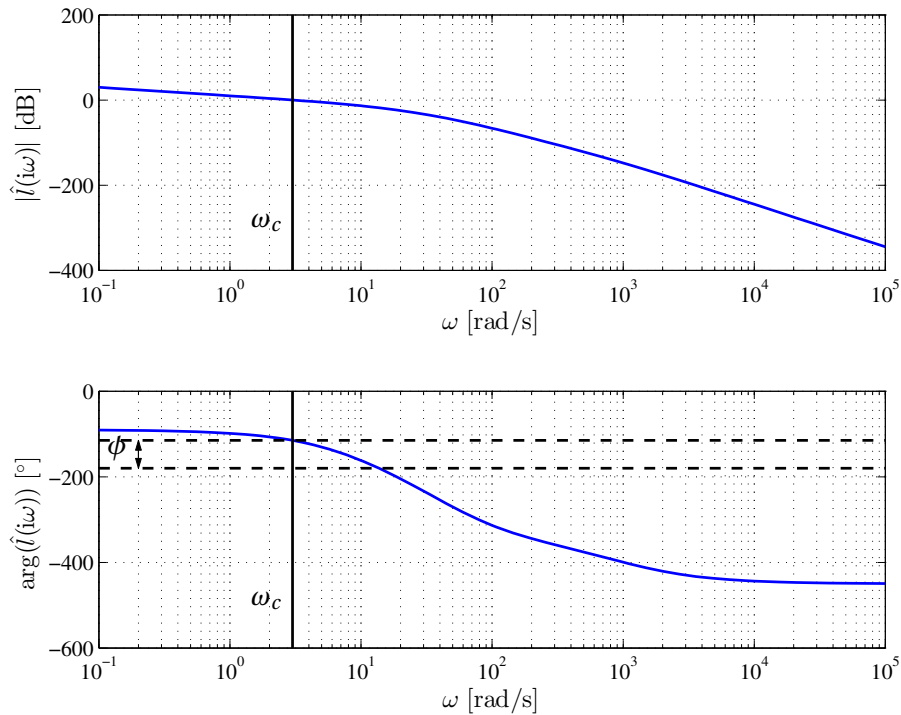


Abb. 5.22.: Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion  $\hat{l}(s)$  für den Kompensationsreglerentwurf.

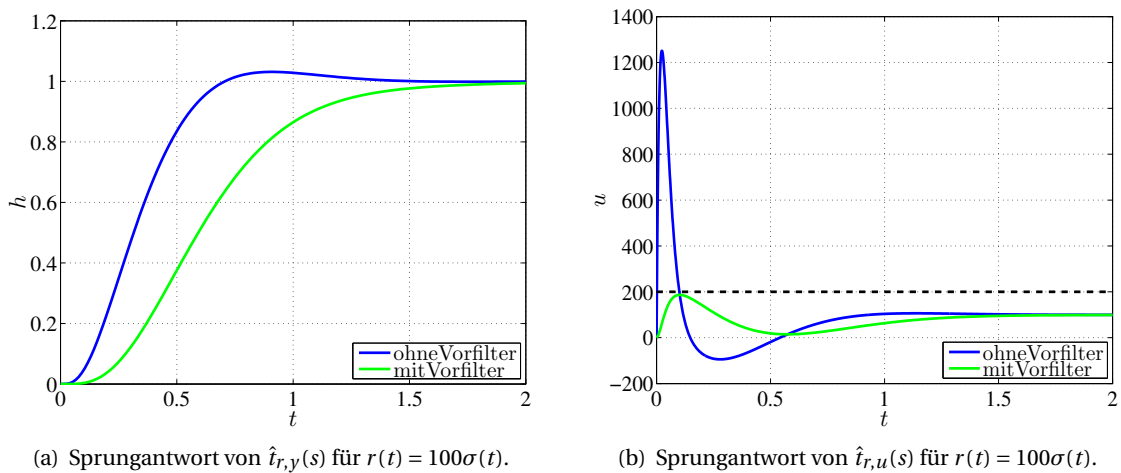


Abb. 5.23.: Sprungantworten der Führungs- und Stellgrößenübertragungsfunktionen  $\hat{t}_{r,y}(s)$  und  $\hat{t}_{r,u}(s)$  mit und ohne Vorfilter  $\hat{g}_v(s)$ .

Den Ausführungen von Abschnitt 5.2.4 zur Regelkreisstruktur mit zwei Freiheitsgraden folgend, wird dem Regelkreis ein Vorfilter der Form

$$\hat{g}_v(s) = \frac{\hat{w}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{1}{1 + \frac{s}{3}}$$

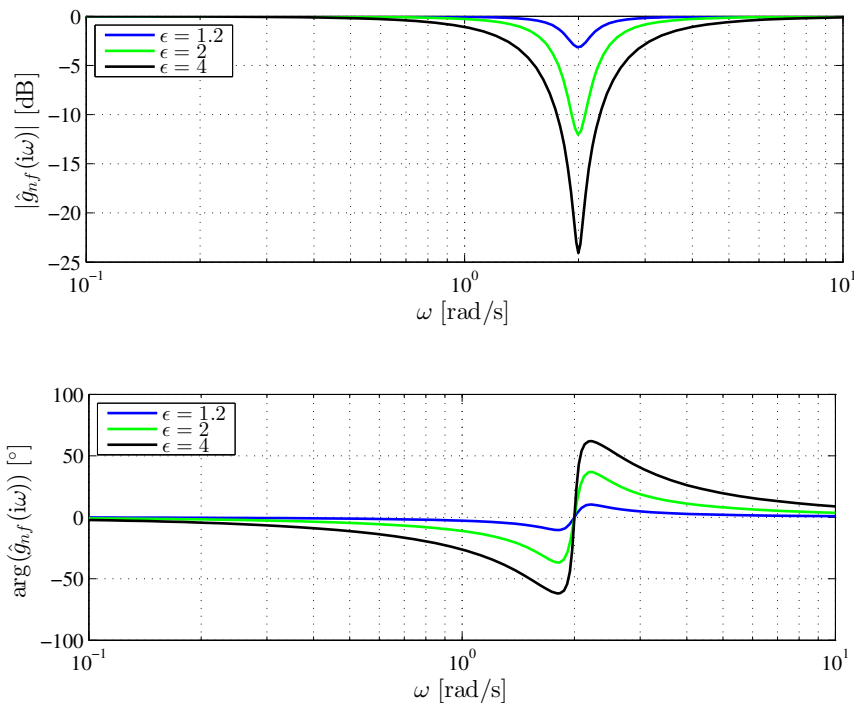
vorgeschaltet. Dies führt zu einer deutlichen Reduktion der notwendigen Stellamplitude unter die vorgegebene Grenze, ohne dabei wesentlich die Dynamik der Führungsregelung zu verringern.

### Anmerkung 5.5: Notch-Filter

Quadratische Terme der Form  $1 + 2\xi(sT) + (sT)^2$  mit  $T > 0$  und  $\xi \ll 1$  treten sehr häufig bei der Regelung mechanischer Systeme auf. Dabei ist zu beachten, dass die obige Vorgehensweise eines Kompensationsreglerentwurfes bei einer praktischen Implementierung nicht zum Ziel führt, wenn die tatsächlichen Streckenparameter nicht oder nur näherungsweise bekannt sind. In diesem Fall empfiehlt es sich, den quadratischen Term nicht exakt zu kompensieren, sondern ein so genanntes *Notch-Filter* zu entwerfen. Für den im Beispiel auftretenden Term  $1 + 2 \times 0.1(s/2) + (s/2)^2$  führt dies auf die Übertragungsfunktion des Notch-Filters

$$\hat{g}_{nf}(s) = \frac{1 + 2 \times \frac{0.1}{\epsilon} \left(\frac{s}{2}\right) + \left(\frac{s}{2}\right)^2}{1 + 2 \times 0.1\epsilon \left(\frac{s}{2}\right) + \left(\frac{s}{2}\right)^2}, \quad \epsilon > 0.$$

Das zugehörige Bode-Diagramm für  $\epsilon \in \{1.2, 2, 4\}$  zeigt Abbildung 5.24.



**Abb. 5.24.:** Bode-Diagramm eines Notch-Filters zur Kompensation der Resonanzfrequenz.

Größere Werte von  $\epsilon$  bedingen ein breitbandigeres Kompensieren der störenden Resonanzfrequenz, womit eine Erhöhung der Robustheit des Regelkreises bezüglich Schwankungen in der Resonanzfrequenz erzielt wird. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass sich die Phase vor der Resonanzfrequenz entsprechend verschlechtert, weshalb ggf. ein Kompromiss gefunden werden muss.

### 5.4.6 Anti-Windup Maßnahmen

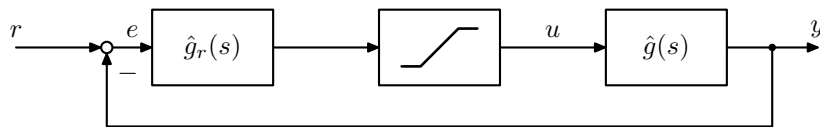
Im vorangegangenen Beispiel wurde explizit eine Beschränkung der Stellgröße in den Entwurf integriert und deren Einhaltung durch eine Modifikation der Referenztrajektorie mittels eines Vorfilters

erzielt. Dabei sei bemerkt, dass der geschlossene Regelkreis bei Erreichen der Stellgrößenbeschränkung aufgebrochen wird und als offener Kreis angesehen werden kann, da so lange die Stellgröße an der Beschränkung verharrt das Stellsignal unabhängig vom momentanen Wert der Ausgangsgröße ist. Beinhaltet der verwendete Regler zudem einen Integral-Anteil, so wird dessen Beitrag am Stellsignal durch die zeitliche Integration der Abweichung zwischen Referenz- und Istwert zunächst anwachsen. Gleichzeitig erhöht sich die Zeitspanne, in der die Stellgröße in der Begrenzung verharrt. Dies wird als (*Integrator*) *Windup* bezeichnet.

Zur Illustration dieses Effekts wird der in Abschnitt 5.4.3 entworfene PI-Regler (5.28) zur Regelung der Strecke (5.35) verwendet, wobei zusätzlich eine Stellgrößenbeschränkung  $|u(t)| \leq 0.3$  betrachtet wurde. Das zugehörige Blockschaltbild mit der Sättigungskennlinie<sup>4</sup> zur Realisierung der Stellgrößenbeschränkung zeigt Abbildung 5.25. Als Referenztrajektorie wurde dabei

$$r(t) = \frac{1}{5} [t\sigma(t) - 2(t-10)\sigma(t-10) + (t-15)\sigma(t-15)]$$

verwendet. Den Verlauf der Ausgangsgröße  $y(t)$  im Vergleich zur Referenz  $r(t)$  und der Vergleich



**Abb. 5.25.:** Blockschaltbild der Regelung mit einem Freiheitsgrad und Stellgrößenbeschränkung.

zwischen der errechneten Stellgröße und der angewendeten saturierten Stellgröße zeigt Abbildung 5.26(a). Obwohl der Fehler  $e(t) = r(t) - y(t)$  zum Zeitpunkt  $t = 12.5$  das Vorzeichen ändert, verbleibt die Stellgröße in der Beschränkung, da sich der Wert des Integral-Anteils nur langsam reduziert. Erst zum Zeitpunkt  $t \approx 16$  ist der Integral-Anteil soweit abgebaut, dass die Stellgröße die Beschränkung verlässt.

Zur Vermeidung des Windup existieren verschiedene Verfahren, so dass hier auf die einschlägige Literatur verwiesen wird [6]. Eine Möglichkeit besteht darin, dem Integrator des PI-Reglers zusätzlich die gewichtete Abweichung zwischen saturierter und nicht-saturierter Stellgröße zuzuführen. Hiermit kann das in Abbildung 5.26(b) dargestellte Verhalten des geschlossenen Regelkreises erzielt werden. Dabei fällt insbesondere auf, dass die Stellgröße über ein weitaus kürzeres Zeitintervall in der Beschränkung verharrt. Zudem ist die Abweichung zwischen der Ausgangsgröße und deren Referenztrajektorie deutlich geringer. Allerdings ist zu bemerken, dass diese Maßnahme eine neue, während des Entwurfs des PI-Reglers nicht berücksichtigte Rückführung erzeugt, so dass unter Umständen die Stabilität des geschlossenen Regelkreises verloren gehen kann.

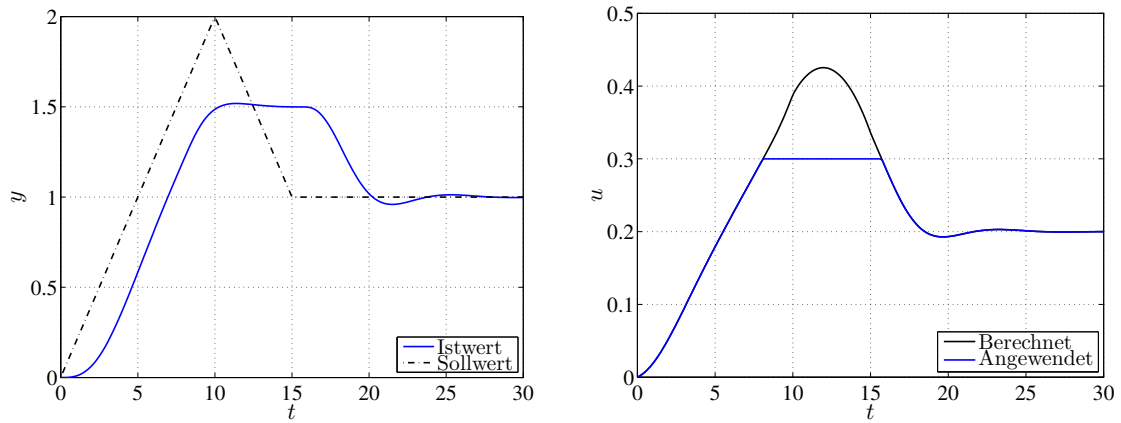
**Aufgabe 5.43.** Bestimmen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{50}{\left(1 + \frac{s}{171}\right)\left(1 + \frac{s}{2330}\right)}$$

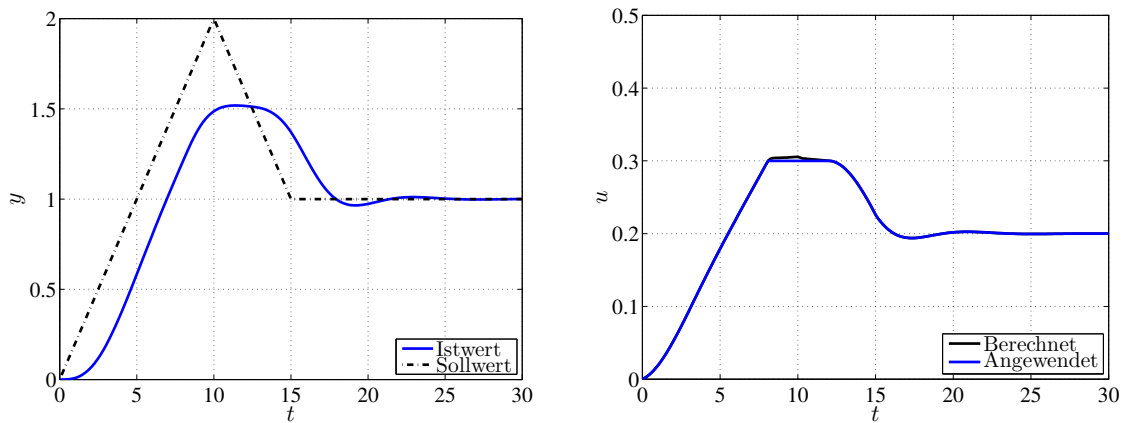
einen PI-Regler so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises die Spezifikationen  $t_r = 0.01$  s,  $\ddot{u} = 10\%$ ,  $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$  und  $|u(t)| \leq 15$  für  $r(t) = 500\sigma(t)$  erfüllt. Überprüfen Sie das Entwurfsergebnis durch Simulation.

■

<sup>4</sup>Der Regelkreis wird dadurch zu einem nichtlinearen System.



(a) Ohne Anti-Windup



(b) Mit Anti-Windup

**Abb. 5.26.:** Windup und Anti-Windup für den PI-Regler mit Stellgrößenbeschränkung aus Abschnitt 5.4.3.

**Lösung 5.43.** Ein möglicher PI-Regler, der die genannten Spezifikationen erfüllt, lautet

$$\hat{g}_r(s) = 3.9 \frac{1 + \frac{s}{567.3}}{s}$$

**Aufgabe 5.44.** Bestimmen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{0.5}{s(1 + \frac{s}{2})}$$

einen Regler so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises die Spezifikationen  $t_r = 1$  s,  $\ddot{u} = 10\%$  und  $e_{\infty}|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$  erfüllt. Benützen Sie einen Regler der Form

$$\hat{g}_r(s) = V_r \frac{1 + \frac{s}{2}}{1 + T_r s}$$

und überprüfen Sie das Entwurfsergebnis durch Simulation.

**Aufgabe 5.45.** Bestimmen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{0.759}{(1 + \frac{s}{0.196}) \left( 1 + 2 \times 0.152 \left( \frac{s}{5.945} \right) + \left( \frac{s}{5.945} \right)^2 \right)}$$

einen Regler so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises die Spezifikationen  $t_r = 2\text{ s}$ ,  $\ddot{u} = 0\%$  und  $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$  erfüllt. Benützen Sie in einem ersten Schritt einen PI-Regler. Falls die Überprüfung des Entwurfsergebnisses durch Simulation keine befriedigendes Resultat liefert, dann erweitern Sie den PI-Regler um einen Notch-Filter.

**Aufgabe 5.46.** Bestimmen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{2 + 2s + s^2}$$

einen Regler so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises die Spezifikationen  $t_r = 1\text{ s}$ ,  $\ddot{u} = 20\%$  und  $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$  erfüllt. Überprüfen Sie das Entwurfsergebnis durch Simulation.

**Aufgabe 5.47.** Bestimmen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{5}{s\left(2 + 2\left(\frac{s}{2}\right) + \left(\frac{s}{2}\right)^2\right)}$$

einen Regler so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises die Spezifikationen  $t_r = 0.25\text{ s}$ ,  $\ddot{u} = 20\%$  und  $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$  erfüllt. Überprüfen Sie das Entwurfsergebnis durch Simulation.

**Aufgabe 5.48.** Bestimmen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{2 + 2\left(\frac{s}{2}\right) + \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

einen Regler so, dass die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises die Spezifikation  $t_r = 0.75\text{ s}$  erfüllt. Da außer an die Anstiegszeit keine weiteren Anforderungen gestellt sind, kann zunächst die Anwendung eines P-Reglers analysiert werden. Überprüfen Sie das Entwurfsergebnis durch Simulation.

## 5.5 Regelungsentwurf mittels Polvorgabe

Die Methode der Polvorgabe ist eine algebraische Reglerentwurfsmethode, bei der ein Regler  $\hat{g}_r(s)$  so entworfen wird, dass für eine gegebene Streckenübertragungsfunktion  $\hat{g}(s)$  die Führungsübertragungsfunktion  $\hat{t}_{r,y}(s)$  des geschlossenen Regelkreises ein gewünschtes dynamisches Verhalten aufweist. Letztere kann natürlich nicht beliebig vorgegeben werden, sondern muss in Abhängigkeit von  $\hat{g}(s)$  gewissen Einschränkungen genügen.

### Definition 5.3: Implementierbarkeit

Eine Führungsübertragungsfunktion  $\hat{t}_{r,y}(s)$  zu einer Streckenübertragungsfunktion  $\hat{g}(s)$  wird als *implementierbar* bezeichnet, wenn

- (i) das Regelgesetz  $\hat{g}_r(s)$  nach Satz 4.2 realisierbar ist,
- (ii) der Regelkreis nach Satz 5.1 intern stabil ist und
- (iii) der Regelkreis nicht degeneriert, d.h. sämtliche Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises sind realisierbar.

Zur Überprüfung der Implementierbarkeit einer Führungsübertragungsfunktion kann folgender Satz herangezogen werden.

**Satz 5.8: Implementierbarkeit einer Führungsübertragungsfunktion**

Eine Führungsübertragungsfunktion  $\hat{t}_{r,y}(s)$  zur einer realisierbaren Streckenübertragungsfunktion  $\hat{g}(s)$  ist genau dann implementierbar, wenn

- (i)  $\hat{t}_{r,y}(s)$  eingangs–ausgangs–stabil ist und
- (ii) die Stellgrößenübertragungsfunktion

$$\hat{t}_{r,u}(s) = \frac{\hat{t}_{r,y}(s)}{\hat{g}(s)}$$

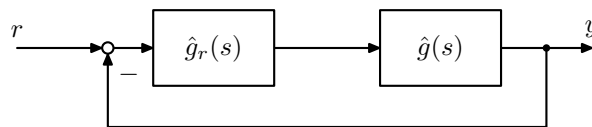
realisierbar und eingangs–ausgangs–stabil ist.

*Beweis.* Der Beweis der Äquivalenz der Aussagen erfolgt in beiden Richtungen:

- $\hat{t}_{r,y}(s)$  ist implementierbar  $\Rightarrow$  (i), (ii): Nach Definition 5.3 (ii) ist der Regelkreis intern stabil, weshalb  $\hat{t}_{r,y}(s)$  und  $\hat{t}_{r,u}(s)$  eingangs–ausgangs–stabil sein müssen. Zudem folgt aus Bedingung (iii) der Definition die Realisierbarkeit von  $\hat{t}_{r,y}(s)$  und  $\hat{t}_{r,u}(s)$ .
- (i), (ii)  $\Rightarrow \hat{t}_{r,y}(s)$  ist implementierbar: Dies wird in den nachfolgenden Abschnitten konstruktiv nachgewiesen. □

**5.5.1 Polvorgabe für den Regelkreis mit einem Freiheitsgrad**

Für die weiteren Betrachtungen wird der in Abschnitt 5.2.3 eingeführte Regelkreis mit einem Freiheitsgrad entsprechend Abbildung 5.27 herangezogen. Zudem gelte für die realisierbaren Übertragungs-



**Abb. 5.27.:** Regelkreis mit einem Freiheitsgrad.

funktionen von Strecke und Regler

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{z}(s)}{\hat{n}(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-1} s^{n-1} + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n}, \quad a_n \neq 0$$

und

$$\hat{g}_r(s) = \frac{\hat{z}_r(s)}{\hat{n}_r(s)} = \frac{d_0 + d_1 s + \dots + d_{m-1} s^{m-1} + d_m s^m}{c_0 + c_1 s + \dots + c_{m-1} s^{m-1} + c_m s^m}, \quad c_m \neq 0$$

mit den teilerfremden Polynomen  $(\hat{z}(s), \hat{n}(s))$  und  $(\hat{z}_r(s), \hat{n}_r(s))$ . Die Führungsübertragungsfunktion ergibt sich somit zu

$$\hat{t}_{r,y}(s) = \frac{\hat{g}_r(s) \hat{g}(s)}{1 + \hat{g}_r(s) \hat{g}(s)} = \frac{\hat{z}(s) \hat{z}_r(s)}{\hat{z}(s) \hat{z}_r(s) + \hat{n}(s) \hat{n}_r(s)}. \tag{5.38}$$

Im Rahmen der *Polvorgabe mit einem Freiheitsgrad* wird eine realisierbare Reglerübertragungsfunktion  $\hat{g}_r(s)$  so entworfen, dass sämtliche Polstellen von  $\hat{t}_{r,y}(s)$  eine gewünschte Lage in der komplexen

Ebene aufweisen. Mit (5.38) ist diese Aufgabenstellung äquivalent zur Lösung der *Diophantischen Gleichung*

$$\hat{z}(s)\hat{z}_r(s) + \hat{n}(s)\hat{n}_r(s) = \hat{f}(s) \quad (5.39)$$

nach  $\hat{z}_r(s)$  und  $\hat{n}_r(s)$  für das gewünschte Nennerpolynom  $\hat{f}(s)$  von  $\hat{t}_{r,y}(s)$  [3].

#### Anmerkung 5.6

Wie aus (5.38) leicht ersichtlich ist, erlaubt die Rückführung des Fehlers  $e(t) = r(t) - y(t)$  über  $\hat{g}_r(s)$  eine Vorgabe bzw. Verschiebung der Polstellen von  $\hat{t}_{r,y}(s)$  und damit der Polstellen des geschlossenen Regelkreises. Gleichzeitig hat  $\hat{g}_r(s)$  keinen Einfluss auf die Nullstellen von  $\hat{g}(s)$  und induziert zudem neue zusätzliche Nullstellen in  $\hat{t}_{r,y}(s)$  über  $\hat{z}_r(s)$ .

#### Satz 5.9

Seien die Polynome  $\hat{z}(s)$  und  $\hat{n}(s)$  gegeben. Die Diophantische Gleichung (5.39) besitzt für beliebige Polynome  $\hat{f}(s)$  genau dann eine polynomiale Lösung  $(\hat{z}_r(s), \hat{n}_r(s))$ , wenn  $\hat{z}(s)$  und  $\hat{n}(s)$  teilerfremd sind.

*Beweis.* Wir beweisen zunächst die Notwendigkeit des Satzes. Wenn  $\hat{z}(s)$  und  $\hat{n}(s)$  nicht teilerfremd sind, dann besitzen sie den gemeinsamen Linearfaktor  $(s+a)$ . Damit muss  $(s+a)$  auch in  $\hat{f}(s)$  enthalten sein, da sonst (5.39) keine Lösung besitzt. Folglich kann  $\hat{f}(s)$  nicht beliebig sein. Zum Nachweis, dass die Aussage hinreichend ist, wird angenommen, dass  $\hat{z}(s)$  und  $\hat{n}(s)$  teilerfremd sind. Somit existieren Polynome  $\hat{z}_r(s)$  und  $\hat{n}_r(s)$  so, dass die Bezout-Identität

$$\hat{z}(s)\hat{z}_r(s) + \hat{n}(s)\hat{n}_r(s) = 1$$

erfüllt ist (die explizite Bestimmung von  $\hat{z}_r(s)$  und  $\hat{n}_r(s)$  ist hier nicht von Interesse, kann aber über den Euklidischen Algorithmus erfolgen). Multiplikation mit  $\hat{f}(s)$  führt auf

$$\hat{z}(s)\hat{f}(s)\hat{z}_r(s) + \hat{n}(s)\hat{f}(s)\hat{n}_r(s) = \hat{f}(s),$$

woraus unmittelbar eine Lösung der Diophantischen Gleichung in der Form  $\hat{z}_r(s) = \hat{f}(s)\hat{z}_r(s)$  und  $\hat{n}_r(s) = \hat{f}(s)\hat{n}_r(s)$  folgt<sup>5</sup>.  $\square$

Dieser Satz ist die Basis zur expliziten Umsetzung einer Regelung mit Polvorgabe für den Regelkreis mit einem Freiheitsgrad durch die Lösung der Diophantischen Gleichung (5.39).

#### Satz 5.10: Polvorgabe mit einem Freiheitsgrad

Gegeben ist der Regelkreis mit einem Freiheitsgrad gemäß Abbildung 5.27 mit der strikt properen Streckenübertragungsfunktion der Ordnung  $n$

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{z}(s)}{\hat{n}(s)}, \quad \deg(\hat{z}(s)) < \deg(\hat{n}(s)) = n \quad (5.40)$$

<sup>5</sup>Hieraus kann leicht eine allgemeine Lösung abgeleitet werden, da immer Polynome  $\hat{p}(s)$  und  $\hat{q}(s)$  so existieren, dass  $\hat{z}(s)\hat{p}(s) + \hat{n}(s)\hat{q}(s) = 0$ . Ein Beispiel hierfür ist  $\hat{p}(s) = -\hat{n}(s)$  und  $\hat{q}(s) = \hat{z}(s)$ . Somit stellen für ein beliebiges Polynom  $\hat{p}_r(s)$  die Polynome  $\hat{z}_r(s) = \hat{f}(s)\hat{z}_r(s) + \hat{p}(s)\hat{p}_r(s)$  und  $\hat{n}_r(s) = \hat{f}(s)\hat{n}_r(s) + \hat{q}(s)\hat{p}_r(s)$  Lösungen der Diophantischen Gleichung (5.39) dar.

und den teilerfremden Polynomen  $\hat{z}(s)$  und  $\hat{n}(s)$ . Dann existiert zu jedem Polynom  $\hat{f}(s)$  mit  $\deg(\hat{f}(s)) = 2n - 1$  eine Lösung  $(\hat{z}_r(s), \hat{n}_r(s))$  der Diophantischen Gleichung

$$\hat{z}(s)\hat{z}_r(s) + \hat{n}(s)\hat{n}_r(s) = \hat{f}(s) \quad (5.41)$$

so, dass für die Übertragungsfunktion des Reglers  $\hat{g}_r(s)$  gilt

$$\hat{g}_r(s) = \frac{\hat{z}_r(s)}{\hat{n}_r(s)}, \quad \deg(\hat{z}_r(s)) \leq \deg(\hat{n}_r(s)) = n - 1. \quad (5.42)$$

Der Beweis dieses Satzes erfolgt im Wesentlichen durch eine direkte Bestimmung der Lösung unter den getroffenen Annahmen.

*Beweis.* Sei  $\hat{f}(s)$  ein Polynom vom Grad  $p$ , d.h.

$$\hat{f}(s) = f_0 + f_1s + \dots + f_{p-1}s^{p-1} + f_p s^p, \quad f_p \neq 0.$$

Einsetzen in (5.41) liefert

$$\sum_{j=0}^n b_j s^j \sum_{j=0}^m d_j s^j + \sum_{j=0}^n a_j s^j \sum_{j=0}^m c_j s^j = \sum_{j=0}^p f_j s^j,$$

was durch Ausmultiplikation und Sortierung von Koeffizienten gleichen Grades in  $s$  in

$$(b_0 d_0 + a_0 c_0) + (b_1 d_0 + b_0 d_1 + a_1 c_0 + a_0 c_1)s + \dots + (b_n d_{m-1} + b_{n-1} d_m + a_n c_{m-1} + a_{n-1} c_m)s^{n+m-1} + (b_n d_m + a_n c_m)s^{n+m} = f_0 + f_1 s + \dots + f_{p-1} s^{p-1} + f_p s^p \quad (5.43)$$

überführt werden kann. Hieraus ist leicht ersichtlich, dass  $p = n + m$  gelten muss und dass  $p + 1$  Gleichungen in  $2m + 2$  Unbekannten zu lösen sind. Daraus errechnen sich die Grade  $m$  und  $p$  der Regler- und Führungsübertragungsfunktion zu

$$m = n - 1, \quad p = 2n - 1.$$

Gibt man die Gleichungen des Koeffizientenvergleichs (5.43) in Matrixform an, so führt dies auf

$$\underbrace{\begin{bmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & b_0 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_n & b_{n-1} & a_{n-1} & \dots & b_1 & a_1 \\ \vdots & \vdots & b_n & a_n & \dots & b_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_n & a_n \end{bmatrix}}_{= R} \begin{bmatrix} d_0 \\ c_0 \\ d_1 \\ c_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{2n-2} \\ f_{2n-1} \end{bmatrix}. \quad (5.44)$$

Die  $(2n \times 2n)$ -Matrix  $R$ , die aus den Koeffizienten der Polynome  $\hat{z}(s)$  und  $\hat{n}(s)$  gebildet wird, nennt man auch *Resultante*. Wie nachfolgend gezeigt wird, ist die Resultante  $R$  zweier Polynome  $\hat{z}(s)$  und  $\hat{n}(s)$  genau dann regulär, wenn  $\hat{z}(s)$  und  $\hat{n}(s)$  teilerfremd sind. Da dies vorausgesetzt wurde, besitzt das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung. Wegen  $a_n \neq 0$  und  $b_n = 0$  ( $\hat{g}(s)$  ist strikt proper) und  $f_{2n-1} \neq 0$  kann die letzte Gleichung nur dann erfüllt werden, wenn  $c_{n-1} \neq 0$  ist, womit die Realisierbarkeit von  $\hat{g}_r(s)$  folgt.  $\square$



Den Zusammenhang zwischen der Teilerfremdheit und der Regularität der Resultante liefert der folgende Satz.

**Satz 5.11: Sylvester-Kriterium**

Die Resultante  $R$  zu den Polynomen  $\hat{z}(s)$  und  $\hat{n}(s)$  ist genau dann regulär, wenn die Polynome teilerfremd sind.

*Beweis.* Der Beweis, dass aus der Teilerfremdheit von  $\hat{z}(s)$  und  $\hat{n}(s)$  die Regularität von  $R$  erfolgt über Kontraposition. Sei  $R$  singulär, dann existiert für das Gleichungssystem  $Rz = \mathbf{0}$  mit dem Vektor  $z^T = [d_0, c_0, d_1, c_1, \dots, d_{n-1}, c_{n-1}]$  eine nichttriviale Lösung  $z \neq 0$ . Damit existiert eine nichttriviale Reglerübertragungsfunktion (5.42) so, dass gilt  $\hat{z}(s)\hat{z}_r(s) + \hat{n}(s)\hat{n}_r(s) = 0$  mit  $\deg(\hat{n}(s)) = n$  und  $\deg(\hat{z}(s)) \leq n - 1$ . Da  $\deg(\hat{z}_r(s)) \leq \deg(\hat{n}_r(s)) = n - 1$  gilt, erkennt man unmittelbar, dass  $\hat{z}(s)$  und  $\hat{n}(s)$  nicht teilerfremd sein können.  $\square$

**Beispiel 5.4.** Für die Streckenübertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{s-2}{s^2-1}$$

soll ein Regler  $\hat{g}_r(s) = \hat{z}_r(s)/\hat{n}_r(s)$  durch Polvorgabe mit einem Freiheitsgrad so entworfen werden, dass die Polstellen des geschlossenen Regelkreises bei  $-2$  und  $-1 \pm i$  liegen.

Wegen  $n = 2$  folgt  $\deg(\hat{n}_r(s)) = 1$  und es gilt  $\hat{f}(s) = (s+2)(s^2+2s+2) = s^3+4s^2+6s+4$ . Mit (5.43) bzw. (5.44) folgt

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ c_0 \\ d_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} d_0 \\ c_0 \\ d_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -46 \\ 68 \\ -44 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Die Reglerübertragungsfunktion ergibt sich somit zu

$$\hat{g}_r(s) = -\frac{46+44s}{68+6s},$$

mit der Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises

$$\hat{t}_{r,y}(s) = \frac{\hat{g}(s)\hat{g}_r(s)}{1+\hat{g}(s)\hat{g}_r(s)} = -\frac{(s-2)(22s+23)}{3(s+2)(s^2+2s+2)}.$$

**Anmerkung 5.7: Propere Streckenübertragungsfunktion**

Die Einschränkung in Satz 5.10 auf strikt propere Streckenübertragungsfunktion  $\hat{g}(s)$  ist nicht unbedingt notwendig. Für den Fall  $\deg(\hat{z}(s)) = \deg(\hat{n}(s))$  muss lediglich zusätzlich nachgewiesen werden, dass der Regelkreis nicht degeneriert.

**Aufgabe 5.49.** Beweisen Sie, dass die Regularität von  $R$  die Teilerfremdheit von  $\hat{z}(s)$  und  $\hat{n}(s)$  impliziert.

**Aufgabe 5.50.** Berechnen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{s+2}{s(s^2-1)}$$

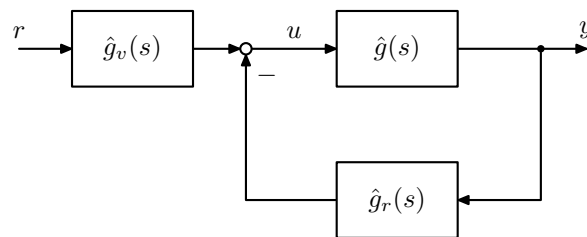
einen Regler durch Polvorgabe mit einem Freiheitsgrad so, dass die Polstellen des geschlossenen Regelkreises bei  $-1$ ,  $-2 \pm i3$  und  $-4 \pm i5$  liegen.

**Lösung 5.50.** Die Reglerübertragungsfunktion lautet

$$\hat{g}_r(s) = \frac{266.5 + 300s + 33.5s^2}{65.5 + 13s + s^2}.$$

### 5.5.2 Polvorgabe für den Regelkreis mit zwei Freiheitsgraden

Wie in Anmerkung 5.6 erwähnt wurde, kann durch die Methode der Polvorgabe mit einem Freiheitsgrad das Zählerpolynom der Führungsübertragungsfunktion  $\hat{t}_{r,y}(s)$  nicht gezielt beeinflusst werden. Um dies zu ermöglichen ist es notwendig, den Regelkreis entsprechend Abbildung 5.28 zu erweitern, so dass zwei Freiheitsgrade im Entwurf zur Verfügung stehen. In der englischsprachigen Literatur



**Abb. 5.28.:** Regelkreis mit zwei Freiheitsgraden.

wird die Polvorgabe mit zwei Freiheitsgraden auch als *“Model Matching”* bezeichnet [5, 3] und zeichnet sich im Vergleich zur Polvorgabe mit einem Freiheitsgrad dadurch aus, dass eine gewünschte implementierbare Führungsübertragungsfunktion vorgegeben wird. Folglich werden nicht nur die Polstellen der Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises, sondern auch deren Nullstellen vorgegeben.

Auf eine detaillierte Einführung in die Konzepte der Polvorgabe für den Regelkreis mit zwei Freiheitsgraden wird im Weiteren verzichtet und der Leser wird auf die genannte Literatur, insbesondere [5, 3], verwiesen.

## Literatur

- [1] K.J. Åström und R.M. Murray. *Feedback Systems*. Princeton (NJ): Princeton University Press, 2008 (zitiert auf Seite 104).
- [2] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol und H. Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik*. Frankfurt: Verlag Harri Deutsch, 1997 (zitiert auf Seite 113).
- [3] C.–T. Chen. *Linear System Theory and Design*. New York: Oxford Univ. Press, 1999 (zitiert auf den Seiten 123, 126).
- [4] R.F. Curtain und H.J. Zwart. *An Introduction to Infinite–Dimensional Linear Systems Theory*. Texts in Applied Mathematics 21. New York: Springer–Verlag, 1995 (zitiert auf Seite 104).
- [5] J.C. Doyle, B.A. Francis und A.R. Tannenbaum. *Feedback Control Theory*. New York: MacMillan Publishing Company, 1992 (zitiert auf Seite 126).
- [6] P. Hippe. *Windup in Control: Its Effects and Their Prevention*. London: Springer–Verlag, 2010 (zitiert auf Seite 119).
- [7] S. Lang. *Algebra*. 3rd. Addison–Wesley, 1993 (zitiert auf Seite 97).
- [8] J. Lunze. *Regelungstechnik I*. 5. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer–Verlag, 2006 (zitiert auf Seite 97).
- [9] K. Reinschke. *Lineare Regelungs– und Steuerungstheorie*. Berlin, Heidelberg: Springer–Verlag, 2006 (zitiert auf Seite 98).
- [10] R.J. Schwarz und B. Friedland. *Linear Systems*. McGraw–Hill Book Company, 1965 (zitiert auf Seite 98).
- [11] H. Unbehauen. *Regelungstechnik I*. Braunschweig/Wiesbaden: F. Vieweg & Sohn, 1982 (zitiert auf Seite 107).

