

Lineare dynamische Systeme im Frequenzbereich

Neben der Beschreibung linearer, zeitinvarianter Systeme durch Zustandsdifferenzial- und Ausgangsgleichungen in der Form (3.1) ist zur Systemanalyse und dem Regelungsentwurf oftmals die Kenntnis des so genannten *Eingangs/Ausgangsverhalten* von Interesse. Diese mathematische Beschreibung des Systemverhaltens vom Eingang $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ zum Ausgang $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ ohne Kenntnis bzw. die Einführung der Zustandsvariablen $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ basiert dabei im Eingrößenfall mit $m = p = 1$ auf Übertragungsfunktionen oder Übertragungsmatrizen im Mehrgrößenfall mit $m > 1$ und/oder $p > 1$.

Die hierzu notwendigen Grundlagen zur Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation \mathcal{L} wurden bereits in der Lehrveranstaltung "Signale und Systeme I" behandelt, sind jedoch der Vollständigkeit halber nochmals im Anhang A zusammengefasst. Zudem wird auf die Ausführungen in [2, 3] verwiesen. Entsprechend der in der Regelungstechnik üblichen Notation werden Laplace-transformierte Zeitsignale im Folgenden durchgehend mit einem $\hat{\cdot}$ dargestellt, d.h. $\mathcal{L}(f(t)) = \hat{f}(s)$ im skalaren sowie $\mathcal{L}(\mathbf{f}(t)) = \hat{\mathbf{f}}(s)$ im vektoriellen Fall.

4.1 Übertragungsfunktion und Übertragungsmatrix

Ausgehend von dem linearen, zeitinvarianten Mehrgrößensystem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.1a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \quad t \geq 0 \quad (4.1b)$$

führt die Anwendung der Laplace-Transformation auf die entsprechende Systemdarstellung im Bildbereich

$$s\hat{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(s) \quad (4.2a)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(s) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{D}\hat{\mathbf{u}}(s). \quad (4.2b)$$

Auflösen von (4.2a) nach $\hat{\mathbf{x}}(s)$ liefert

$$\hat{\mathbf{x}}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(s), \quad (4.3)$$

womit sich durch Einsetzen in (4.2b) die Ausgangsgleichung zu

$$\hat{\mathbf{y}}(s) = (\mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D})\hat{\mathbf{u}}(s) + \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0$$

ergibt. Damit lassen sich unmittelbar die Begriffe der Übertragungsfunktion bzw. -matrix formulieren.

Definition 4.1: Übertragungsfunktion und –matrix

Für das lineare, zeitinvariante System (4.1) gelte $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Die $(p \times m)$ -Matrix

$$\hat{G}(s) = C(sE - A)^{-1}B + D, \quad \hat{G}_{i,j}(s) = \frac{\hat{y}_i(s)}{\hat{u}_j(s)} \quad (4.4)$$

wird *Übertragungsmatrix* von (4.1) genannt. Im Eingrößenfall mit $m = p = 1$ und $B = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C = \mathbf{c}^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ sowie $D = d \in \mathbb{R}$ reduziert sich $\hat{G}(s)$ zu

$$\hat{g}(s) = \mathbf{c}^T (sE - A)^{-1} \mathbf{b} + d, \quad \hat{g}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} \quad (4.5)$$

und wird als *Übertragungsfunktion* von (4.1) bezeichnet.

Hieraus können nun verschiedene Schlussfolgerungen gezogen werden, die zum einen auf die Lösung der Zustandsdifferentialgleichung (4.1) oder auf die Ableitung gewisser systemtheoretisch wichtiger Kenngrößen dynamischer Systeme abzielen.

Aufgabe 4.23. Bestimmen Sie die Übertragungsmatrix $\hat{G}(s)$ des Systems

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{u}, & t > 0, & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y &= [1 \quad 0] \mathbf{x} + [0 \quad 1 \quad 2] \mathbf{u} \end{aligned}$$

Lösung 4.23. Es gilt

$$\hat{G}(s) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{s+8}{(s-1)s+2} & \frac{2(s+5)}{(s-1)s+2} + 1 & \frac{3(s+4)}{(s-1)s+2} + 2 \end{array} \right].$$

4.1.1 Bestimmung der Transitionsmatrix

In Satz 3.1 aus Abschnitt 3.1 wurde gezeigt, dass sich die Lösung der Zustandsdifferentialgleichung (4.1) zu

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)B\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (4.6a)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \quad (4.6b)$$

ergibt, mit der Transitionsmatrix $\Phi(t)$. Die Anwendung der Laplace-Transformation auf (4.6a) führt, unter Verwendung des Faltungssatzes, auf

$$\hat{\mathbf{x}}(s) = \hat{\Phi}(s)\mathbf{x}_0 + \hat{\Phi}(s)B\hat{\mathbf{u}}(s).$$

Der Vergleich mit (4.3) zeigt unmittelbar, dass sich die Laplace-Transformierte $\hat{\Phi}(s)$ der Transitionsmatrix $\Phi(t)$ zu

$$\hat{\Phi}(s) = (sE - A)^{-1} \quad (4.7)$$

ergibt, was neben der Möglichkeit der Reihenentwicklung oder der Nutzung der Eigenschaften der Jordanschen Normalform auf eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung der Transitionsmatrix führt. Es sei bemerkt, dass $(sE - A)^{-1}$ auch als *Resolvente* des Operators $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bezeichnet wird.

Aufgabe 4.24. Bestimmen Sie $\Phi(t)$ für die Systeme aus Aufgabe 3.17 und 3.18, d.h.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad t > 0,$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

mit

$$a) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösung 4.24. Es gilt mit (4.7), dass

$$a) \quad \hat{\Phi}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{(s-3)^2} & \frac{4}{(s-3)^2} \\ -\frac{1}{(s-3)^2} & \frac{s-5}{(s-3)^2} \end{bmatrix} \text{ bzw. } \Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{3t}(2t+1) & 4e^{3t}t \\ -e^{3t}t & e^{3t}(1-2t) \end{bmatrix}$$

$$b) \quad \hat{\Phi}(s) = \begin{bmatrix} \frac{(s-3)s+1}{(s-1)((s-2)s+2)} & \frac{2-3s}{(s-1)((s-2)s+2)} & \frac{s+1}{-s^3+3s^2-4s+2} \\ \frac{1}{(s-2)s+2} & \frac{s}{(s-2)s+2} & \frac{1}{(s-2)s+2} \\ \frac{1}{(s-1)((s-2)s+2)} & \frac{s}{(s-1)((s-2)s+2)} & \frac{(s-2)s+2}{(s-1)((s-2)s+2)} \end{bmatrix} \text{ bzw.}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^t(2\cos(t) - \sin(t) - 1) & e^t(\cos(t) - 3\sin(t) - 1) & e^t(2\cos(t) - \sin(t) - 2) \\ e^t \sin(t) & e^t(\cos(t) + \sin(t)) & e^t \sin(t) \\ -e^t(\cos(t) - 1) & e^t(-\cos(t) + \sin(t) + 1) & -e^t(\cos(t) - 2) \end{bmatrix}$$

Zur Bestimmung der Rücktransformation \mathcal{L}^{-1} in den Zeitbereich sei auf die Korrespondenztabelle A.2 in Appendix A verwiesen.

4.1.2 Analyse der Übertragungsfunktion

Die weiteren Ergebnisse beziehen sich auf den Eingrößenfall mit $m = p = 1$ und der Übertragungsfunktion entsprechend (4.5).

Satz 4.1

Die Übertragungsfunktion des linearen, zeitinvarianten Eingrößensystems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad t > 0,$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + du, \quad t \geq 0$$

mit Zustand $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, Eingang $u(t) \in \mathbb{R}$ und Ausgang $y(t) \in \mathbb{R}$ kann wie folgt dargestellt werden

$$\hat{g}(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d = \frac{\hat{z}(s)}{\hat{n}(s)}$$

mit dem Zählerpolynom $\hat{z}(s)$ und dem Nennerpolynom $\hat{n}(s)$. Sind $\hat{z}(s)$ und $\hat{n}(s)$ teilerfremd, dann gilt

$$\deg(\hat{z}(s)) \leq \deg(\hat{n}(s)) \leq n$$

und die Wurzeln (Nullstellen) des Nennerpolynoms $\hat{n}(s)$, die so genannten Polstellen (oder kurz Pole) der Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$, sind auch Eigenwerte der Dynamikmatrix \mathbf{A} . Die Umkehrung dieser Aussage gilt im Allgemeinen nicht. Der Grad des Nennerpolynoms gibt die Ordnung der Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$ an.

Der Beweis dieser Aussage erfolgt im Wesentlichen konstruktiv.

Beweis. Für die Inverse der Matrix $(sE - A)$ gilt

$$(sE - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sE - A)}{\det(sE - A)}$$

mit $\text{adj}(sI - A)$, der so genannten Adjunkte¹ der Matrix $(sE - A)$. Dies in (4.5) eingesetzt liefert

$$\hat{g}(s) = \frac{\mathbf{c}^T \text{adj}(sE - A) \mathbf{b} + d \det(sE - A)}{\det(sE - A)}.$$

Da sich die Adjungierte rein aus der Bildung von Subdeterminanten ergibt, ist jedes Element von $\text{adj}(sE - A)$ ein Polynom in s vom maximalen Grad $n - 1$. Analog führt die Bildung der Determinanten $\det(sE - A)$ auf ein Polynom in s vom maximalen Grad n . Mit $\hat{z}(s) = \mathbf{c}^T \text{adj}(sE - A) \mathbf{b} + d \det(sE - A)$ und $\hat{n}(s) = \det(sE - A)$ ergibt sich somit unmittelbar, dass $\deg(\hat{z}(s)) \leq \deg(\hat{n}(s)) \leq n$. Daneben ist direkt einsehbar, dass die Pole der Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$ auch Eigenwerte der Matrix A sind, da $\det(sE - A)$ dem charakteristischen Polynom der Matrix A entspricht. Andererseits kann durch die Kürzung von Nullstellen in $\hat{z}(s)$ und $\hat{n}(s)$ der Fall eintreten, dass die Menge der Polstellen von $\hat{g}(s)$ nur eine Teilmenge der Eigenwerte der Matrix A umfasst, womit die allgemeine Gültigkeit der Umkehrung widerlegt wird. \square

Beispiel 4.1. Die Linearisierung des Pendel-Wagen Systems aus Aufgabe 1.8 um die obere Ruhelage $\mathbf{x}_R = [0, 0, x_R, 0]^T$ mit x_R konstant, aber beliebig, führt auf das lineare, zeitinvariante System

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \varphi(t) \\ \Delta \dot{\varphi}(t) \\ \Delta x(t) \\ \Delta \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{6g(m+M)}{l(m+4M)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-3mg}{m+4M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{6}{l(m+4M)} \\ 0 \\ \frac{4}{m+4M} \end{bmatrix} \Delta u, \quad t > 0$$

mit $\Delta \mathbf{x}(0) = \Delta \mathbf{x}_0$. Die Eigenwerte der Dynamikmatrix A können dabei leicht zu

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{6g(m+M)}{l(m+4M)}}$$

bestimmt werden. Betrachtet man wahlweise die Wagenposition bzw. den Pendelwinkel als Ausgangsgröße, d.h.

$$\Delta y_1(t) = \Delta x(t) \quad \text{bzw.} \quad \Delta y_2(t) = \Delta \varphi(t)$$

so ergeben sich die zugehörigen Übertragungsfunktionen zu

$$\hat{g}_1(s) = \frac{\Delta y_1(s)}{\Delta \hat{u}(s)} = \frac{4ls^2 - 6g}{l(m+4M)s^4 - 6g(m+M)s^2}$$

$$\hat{g}_2(s) = \frac{\Delta y_2(s)}{\Delta \hat{u}(s)} = \frac{-6}{l(m+4M)s^2 - 6g(m+M)}.$$

Offensichtlich findet im Fall $\hat{g}_2(s)$ eine Kürzung zwischen Polstellen und Nullstellen des Zähler $\hat{z}_2(s)$ statt, so dass die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 0$ nicht mehr als Polstellen von $\hat{g}_2(s)$ in Erscheinung treten.

¹Die Elemente $(\text{adj}(M))_{i,j}$ der Adjunkte $\text{adj}(M)$ einer Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ entsprechen den Subdeterminanten der $((n-1) \times (n-1))$ -Matrizen von M , die durch Streichen der j -ten Zeile und i -ten Spalte hervorgehen, multipliziert mit $(-1)^{i+j}$.

4.1.3 Analyse der Übertragungsmatrix

Für den Mehrgrößenfall mit $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ gestaltet sich die Analyse der Übertragungsmatrix etwas schwieriger als für den Eingrößenfall. Dies ist zu einem dadurch begründet, dass es in den einzelnen Elementen $\hat{G}_{i,j}(s)$ der Übertragungsmatrix (4.4) zu unterschiedlichen Kürzungen zwischen Linearfaktoren in Zähler und Nenner kommen kann, so dass die Systemordnung n mit keiner der einzelnen Ordnungen von $\hat{G}_{i,j}(s)$ übereinstimmen muss. Zum anderen ist zu beachten, dass die notwendigen Matrizenoperationen im Allgemeinen nicht kommutieren, was insbesondere für die Zusammenschaltung verschiedener Übertragungsmatrizen von Bedeutung ist.

Aufgabe 4.25. Zeigen Sie, dass die äquivalenten mathematischen Beschreibungen eines linearen, zeitinvarianten Systems $\Sigma(A, B, C, D)$ und $\Sigma(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$, die sich durch eine Ähnlichkeitstransformation gemäß (3.8) ineinander überführen lassen, die identische Übertragungsmatrix $\hat{G}(s)$ aufweisen.

4.2 Zusammenschaltung von Übertragungsfunktionen

Der im Bildbereich der Laplace-Transformation einfache Zusammenhang zwischen Eingang und Ausgang eines dynamischen Systems erlaubt es leicht, Regeln für die Zusammenschaltung von Regelkreisgliedern herzuleiten.

Serienschaltung

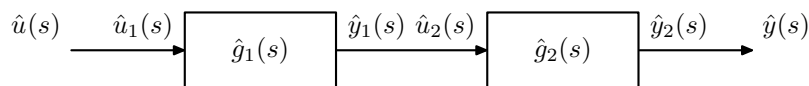


Abb. 4.1.: Serienschaltung von Übertragungsfunktionen.

Mit $\hat{y}_1(s) = \hat{g}_1(s)\hat{u}_1(s)$ und $\hat{y}_2(s) = \hat{g}_2(s)\hat{u}_2(s)$ folgt für die in Abbildung 4.1 dargestellte *Serienschaltung* zweier Übertragungsfunktionen $\hat{g}_1(s)$ und $\hat{g}_2(s)$ die Gesamtübertragungsfunktion des Regelkreises zu

$$\hat{g}(s) = \hat{g}_1(s)\hat{g}_2(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}. \quad (4.8)$$

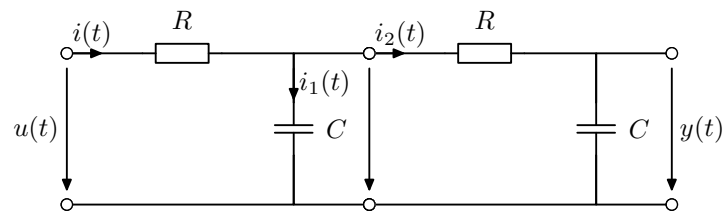
Es ist dabei zu beachten, dass die Beziehung (4.8) nur dann gilt, wenn die Zusammenschaltung *rückwirkungsfrei* ist. Ein Gegenbeispiel zeigt Abbildung 4.2(a) anhand eines elektrischen Netzwerks. Die Gesamtübertragungsfunktion ergibt sich hierbei zu

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{1}{1 + 3RCs + (RC)^2 s^2},$$

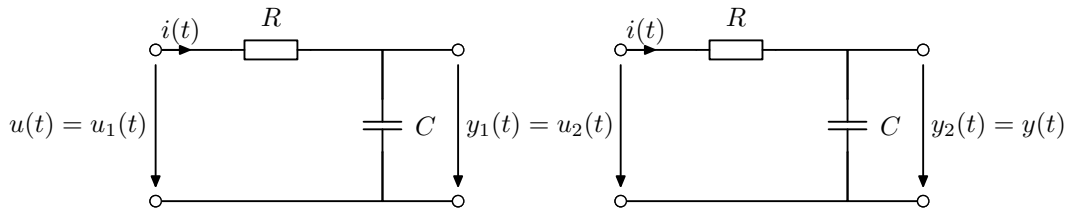
was jedoch nicht der Serienschaltung (4.8) zweier einzelner Teilnetze mit der Übertragungsfunktion

$$\hat{g}_1(s) = \frac{\hat{y}_1(s)}{\hat{u}_1(s)} = \frac{1}{1 + RCs}$$

entsprechend Abbildung 4.2(b) entspricht. Dies liegt darin begründet, dass die Zusammenschaltung der beiden Teilnetzwerke nicht rückwirkungsfrei ist. Um die Rückwirkungsfreiheit zu erreichen, ist eine Modifikation des elektrischen Netzwerks notwendig, indem ein (idealer) Spannungsfolger an der Kopplungsstelle integriert wird.



(a) Gesamtnetzwerk.



(b) Teilnetzwerke.

Abb. 4.2.: Elektrisches Gesamtnetzwerk und Teilnetzwerk als Gegenbeispiel zur Rückwirkungsfreiheit bei der Serienschaltung von Übertragungsfunktionen.

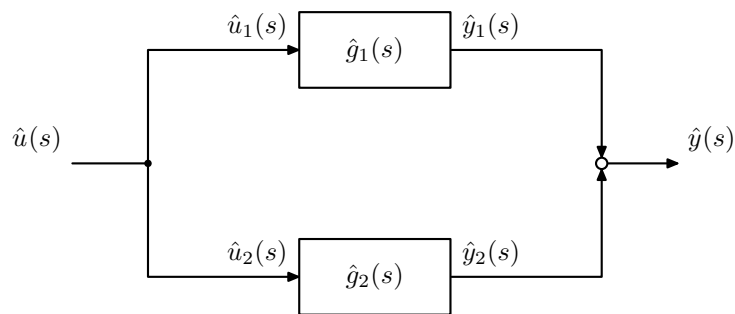


Abb. 4.3.: Parallelschaltung von Übertragungsfunktionen.

Parallelschaltung

Mit $\hat{y}_1(s) = \hat{g}_1(s)\hat{u}_1(s)$ und $\hat{y}_2(s) = \hat{g}_2(s)\hat{u}_2(s)$ folgt für die in Abbildung 4.3 dargestellte *Parallelschaltung* zweier Übertragungsfunktionen $\hat{g}_1(s)$ und $\hat{g}_2(s)$ die Gesamtübertragungsfunktion des Regelkreises zu

$$\hat{g}(s) = \hat{g}_1(s) + \hat{g}_2(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}. \quad (4.9)$$

Rückkopplung

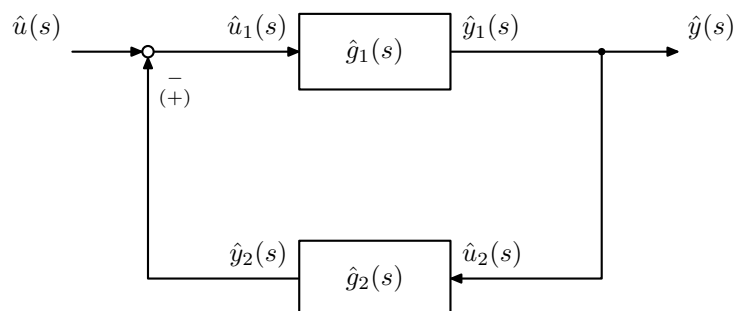


Abb. 4.4.: Rückkopplung von Übertragungsfunktionen.

Für die *Rückkopplung mit negativen (positiven) Vorzeichen* gemäß Abbildung 4.4 ergibt sich die Gesamtübertragungsfunktion $\hat{g}(s)$ mit $\hat{u}_1(s) = \hat{u}(s) \mp \hat{y}_2(s)$ und $\hat{u}_2(s) = \hat{y}_1(s)$ zu

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{g}_1(s)}{1 \pm \hat{g}_1(s)\hat{g}_2(s)} = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}. \quad (4.10)$$

Dabei sei bemerkt, dass die *negative Rückkopplung* insbesondere in der Regelungstechnik auftritt, weshalb das positive Vorzeichen in der Abbildung in Klammern gesetzt wurde.

Anmerkung 4.1

Die angegebenen Formeln (4.8) und (4.9) gelten in analoger Weise für den Fall von Übertragungsmatrizen $\hat{G}_1(s)$ und $\hat{G}_2(s)$, während hier (4.10) durch

$$\hat{G}(s) = (E \pm \hat{G}_1(s)\hat{G}_2(s))^{-1} \hat{G}_1(s). \quad (4.11)$$

zu ersetzen ist.

Anmerkung 4.2

Die obigen Rechenregeln sind nicht die einzigen Hilfsmittel zur Bestimmung der Übertragungsfunktion bzw. Übertragungsmatrix eines aus mehreren Gliedern zusammengesetzten Systems. Beispielsweise existieren Regeln zur Verschiebung von Summations- und Verzweigungsstellen. Für Details sei u.a. auf [5] verwiesen. Zudem kann die Formel von Mason [4] zur direkten Bestimmung der Gesamtübertragungsfunktion eines aus mehreren Teilübertragungsfunktionen zusammengesetzten Regelkreises herangezogen werden.

4.3 Realisierungsproblem und kanonische Formen

Unter dem so genannten *Realisierungsproblem* versteht man die Aufgabe, aus einer gegebenen Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$ bzw. im Mehrgrößenfall aus einer Übertragungsmatrix $\hat{G}(s)$, die zugehörige Zustandsdarstellung in der Form (4.1) zu ermitteln [1].

Definition 4.2

Eine Übertragungsmatrix $\hat{G}(s)$ wird als *realisierbar* bezeichnet, wenn ein lineares, zeitinvariantes System $\Sigma(A, B, C, D)$ so existiert, dass

$$\hat{G}(s) = C(sE - A)^{-1}B + D.$$

In diesem Fall wird $\Sigma(A, B, C, D)$ die *Realisierung* von $\hat{G}(s)$ genannt.

Es sei hierbei betont, dass die Zustandsrealisierung einer Übertragungsfunktion keinesfalls eindeutig ist, wie dies u.a. auch in Aufgabe 4.25 gezeigt wurde.

Satz 4.2: Realisierbarkeit

Eine Übertragungsmatrix $\hat{G}(s)$ ist genau dann realisierbar, wenn $\hat{G}(s)$ eine propere, rationale Matrix ist.

Der Beweis dieser Aussage ist in [1] zu finden. Eine Matrix wird als *proper, rational* bezeichnet, wenn alle Matrizenelemente *propre, rationale* Funktionen darstellen. Eine rationale Funktion

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{z}(s)}{\hat{n}(s)}$$

wird als *proper* bezeichnet, wenn $\deg \hat{z}(s) \leq \deg \hat{n}(s)$ oder äquivalent dazu $\lim_{s \rightarrow \infty} |\hat{g}(s)| < \infty$. Analog wird $\hat{g}(s)$ als *strikt proper* bezeichnet, falls $\deg \hat{z}(s) < \deg \hat{n}(s)$ oder äquivalent dazu $\lim_{s \rightarrow \infty} |\hat{g}(s)| = 0$. Für die Übertragungsmatrix $\hat{G}(s)$ mit Elementen $\hat{G}_{i,j}(s) = \hat{z}_{i,j}(s) / \hat{n}_{i,j}(s)$ bedeutet dies, dass $\deg \hat{z}_{i,j}(s) \leq \deg \hat{n}_{i,j}(s)$ für alle $i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, m$. Es ist offensichtlich, dass für $\deg \hat{z}_{i,j}(s) > \deg \hat{n}_{i,j}(s)$ Ableitungen der Eingangsgröße in der Zustandsdarstellung auftreten müssen und man somit nicht mehr die Struktur (4.1) erhält.

Eine Zustandsdarstellung, die eine minimale Anzahl an Zuständen besitzt, wird als *Minimalrealisierung* der Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$ bzw. der Übertragungsmatrix $\hat{G}(s)$ bezeichnet. Dabei müssen die Zähler- und Nennerpolynome $\hat{z}(s), \hat{n}(s)$ bzw. $\hat{z}_{i,j}(s), \hat{n}_{i,j}(s)$ teilerfremd sein.

Anmerkung 4.3

Aufgrund der Komplexität des Mehrgrößenfalls mit der Übertragungsmatrix $\hat{G}(s)$ wird im Folgenden nur der Eingrößenfall mit einer Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$ betrachtet. Für den allgemeinen Mehrgrößenfall wird beispielsweise auf [1] verwiesen.

Nachfolgend werden zwei *kanonische Minimalrealisierungen* der Übertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{\hat{z}(s)}{\hat{n}(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-1} s^{n-1} + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} \quad (4.12)$$

angegeben, wobei vorausgesetzt wird, dass $\hat{z}(s)$ und $\hat{n}(s)$ teilerfremd sind und das Nennerpolynom $\hat{n}(s)$ *monisch* ist, d.h. der Koeffizient der höchsten Potenz ist 1.

4.3.1 Regelungsnormalform oder 1. Standardform

Aus (4.12) folgt

$$\hat{y}(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-1} s^{n-1} + b_n s^n}{\hat{n}(s)} \hat{u}(s) \quad (4.13a)$$

bzw.

$$\hat{y}(s) = b_0 \underbrace{\frac{1}{\hat{n}(s)} \hat{u}(s)}_{= \hat{x}_1(s)} + b_1 \underbrace{\frac{s}{\hat{n}(s)} \hat{u}(s)}_{= \hat{x}_2(s)} + \dots + b_{n-1} \underbrace{\frac{s^{n-1}}{\hat{n}(s)} \hat{u}(s)}_{= \hat{x}_n(s)} + b_n \frac{s^n}{\hat{n}(s)} \hat{u}(s). \quad (4.13b)$$

Die Einführung der Größen

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(s) &= \frac{1}{\hat{n}(s)} \hat{u}(s) \\ \hat{x}_2(s) &= \frac{s}{\hat{n}(s)} \hat{u}(s) = s \hat{x}_1(s) \\ &\vdots \\ \hat{x}_n(s) &= \frac{s^{n-1}}{\hat{n}(s)} \hat{u}(s) = s \hat{x}_{n-1}(s) = s^{n-1} \hat{x}_1(s) \end{aligned} \quad (4.14)$$

führt durch algebraische Umformung und direkte Substitution auf die Gleichungssequenz

$$\begin{aligned}\hat{u}(s) &= \hat{n}(s)\hat{x}_1(s) \\ &= a_0\hat{x}_1(s) + a_1s\hat{x}_1(s) + \cdots + a_{n-1}s^{n-1}\hat{x}_1(s) + s^n\hat{x}_1(s) \\ &= a_0\hat{x}_1(s) + a_1\hat{x}_2(s) + \cdots + a_{n-1}\hat{x}_n(s) + s\hat{x}_n(s)\end{aligned}$$

bzw.

$$s\hat{x}_n(s) = -a_0\hat{x}_1(s) - a_1\hat{x}_2(s) - \cdots - a_{n-1}\hat{x}_n(s) + \hat{u}(s). \quad (4.15)$$

Aus (4.14) und (4.15) ergibt sich

$$\frac{s^n}{\hat{n}(s)}\hat{u}(s) = s^n\hat{x}_1(s) = s\hat{x}_n(s) = -a_0\hat{x}_1(s) - a_1\hat{x}_2(s) - \cdots - a_{n-1}\hat{x}_n(s) + \hat{u}(s),$$

weshalb die Auswertung von (4.13b) auf

$$\hat{y}(s) = \underbrace{(b_0 - b_n a_0)}_{=\bar{b}_0}\hat{x}_1(s) + \underbrace{(b_1 - b_n a_1)}_{=\bar{b}_1}\hat{x}_2(s) + \cdots + \underbrace{(b_{n-1} - b_n a_{n-1})}_{=\bar{b}_{n-1}}\hat{x}_n(s) + b_n\hat{u}(s)$$

führt. Mit $\mathcal{L}^{-1}(s\hat{x}_j(s)) = \dot{x}_j(t)$ lassen sich die ermittelten Gleichungen im Zeitbereich unmittelbar in der gewünschten Form (4.1) zusammenfassen

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{=\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{b}} u, \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.16a)$$

$$y = \underbrace{[\bar{b}_0 \quad \bar{b}_1 \quad \cdots \quad \bar{b}_{n-1}]}_{=\mathbf{c}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{=\mathbf{x}} + \underbrace{b_n}_{=d} u, \quad t \geq 0. \quad (4.16b)$$

Die Realisierung (4.16) wird als *1. Standardform* oder *Regelungsnormalform* bezeichnet. Das zugehörige Strukturschaltbild zeigt Abbildung 4.5. Diese Normalform wird in Kapitel 6 im Zusammenhang mit der Struktureigenschaft Steuerbarkeit und dem Entwurf von Zustandsreglern noch näher untersucht werden.

4.3.2 Beobachtungsnormalform oder 2. Standardform

Die Herleitung der zweiten kanonischen Minimalrealisierung kann über die Beobachtung erfolgen, dass die Übertragungsfunktion als skalare, rationale Funktion in s unverändert bleibt, wenn man den gesamten Ausdruck transponiert, d.h.

$$\hat{g}(s) = \mathbf{c}^T (sE - A)^{-1} \mathbf{b} + d = (\mathbf{c}^T (sE - A)^{-1} \mathbf{b} + d)^T = \mathbf{b}^T (sE - A^T)^{-1} \mathbf{c} + d.$$

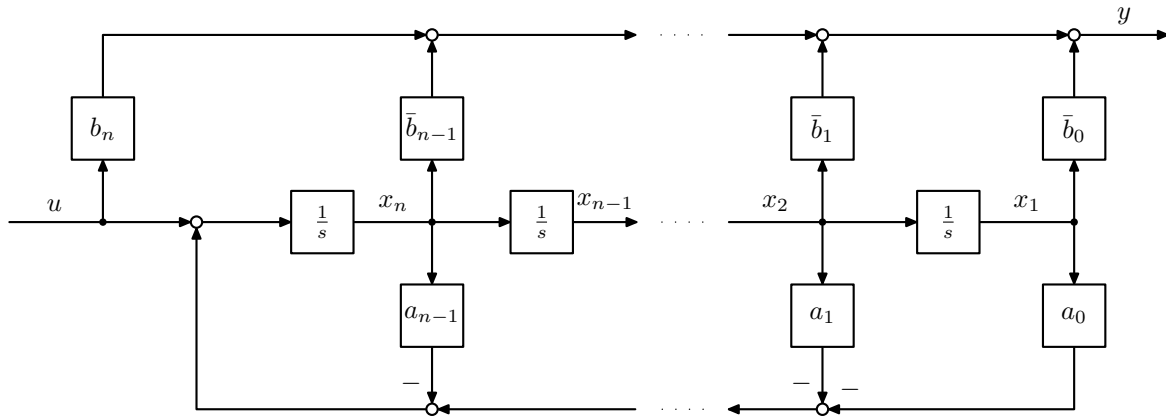


Abb. 4.5.: Strukturschaltbild der 1. Standardform bzw. Regulationsnormalform (4.16).

Dies beweist, dass die beiden Eingrößensysteme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \tag{4.17}$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + du \tag{4.18}$$

und

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{x} + \mathbf{c}u \tag{4.19}$$

$$y = \mathbf{b}^T \mathbf{x} + du \tag{4.20}$$

die gleiche Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$ besitzen. Man bezeichnet das System $\Sigma(\mathbf{A}^T, \mathbf{c}, \mathbf{b}^T, d)$ auch das zu $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$ *duale System*. Das zur 1. Standardform (4.16) duale System ergibt sich folglich zu

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{=\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{=\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{b}_0 \\ \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_{n-2} \\ \bar{b}_{n-1} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{c}} u, \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{4.21a}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{b}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{=\mathbf{x}} + \underbrace{b_n}_{=d} u, \quad t \geq 0. \tag{4.21b}$$

Die Realisierung (4.21) wird als 2. *Standardform* oder *Beobachternormalform* bezeichnet. Das zugehörige Strukturschaltbild zeigt Abbildung 4.6. Diese Normalform wird in Kapitel 6 im Zusammenhang mit der Struktureigenschaft Beobachtbarkeit und dem Entwurf von Zustandsbeobachtern noch genauer untersucht werden.

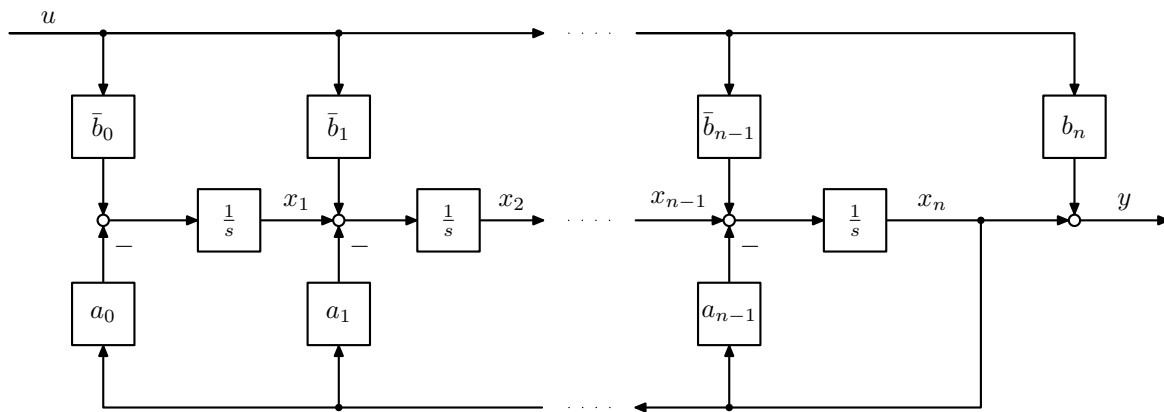


Abb. 4.6.: Strukturschaltbild der 2. Standardform bzw. Beobachtungsnormalform (4.21).

Beispiel 4.2. Zur Illustration der obigen Ergebnisse bestimme man die Realisierung der Übertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{s^3 + 2s}{(s-1)(3s-2)(s+1)}$$

in Regulationsnormalform. Hierzu ist es zunächst notwendig $\hat{g}(s)$ in die monische Form (4.12) zu überführen

$$\hat{g}(s) = \frac{s^3 + 2s}{3s^3 - 2s^2 - 3s + 2} = \frac{\frac{1}{3}s^3 + \frac{2}{3}s}{s^3 - \frac{2}{3}s^2 - s + \frac{2}{3}}$$

Die zugehörige Regulationsnormalform lässt sich nun unmittelbar aus (4.16) ablesen und lautet

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad t > 0$$

$$y = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & 1 & \frac{2}{9} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \frac{1}{3} u, \quad t \geq 0.$$

Aufgabe 4.26. Analysieren Sie die Möglichkeiten, die die CONTROL SYSTEMS TOOLBOX im Programmpaket MATLAB bzw. das Paket CONTROL in OCTAVE bieten. Rufen Sie hierzu `help control` auf und studieren Sie die Befehle `tf`, `tfdata`, `canon`, `ss2tf`, `tf2ss`, `feedback`, etc.

4.4 Eingangs–Ausgangs–Stabilität

Die in Abschnitt 3.3.2 bzw. Definition 3.2 eingeführte Struktureigenschaft der asymptotischen Stabilität (einer Ruhelage) beurteilt das dynamische Verhalten eines linearen, zeitinvarianten, autonomen Systems bei einer Anfangsauslenkung $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ aus der Ruhelage. Mit Hilfe des Konzepts der so genannten *Eingangs–Ausgangs–Stabilität* bzw. der *Bounded Input Bounded Output (BIBO) Stabilität* lässt sich die Stabilität des Eingangs–Ausgangs–Verhaltens eines linearen, zeitinvarianten Systems der Form (4.1) für $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ beurteilen.

Definition 4.3

Ein lineares, zeitinvariantes System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \quad (4.22a)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + du, \quad t \geq 0 \quad (4.22b)$$

heißt *eingangs–ausgangs–stabil (E/A–stabil)*, wenn für verschwindende Anfangswerte $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ und einem beliebigen beschränkten Eingangssignal

$$|u(t)| \leq u_{\max} < \infty \quad \text{für alle } t \geq 0$$

das Ausgangssignal beschränkt bleibt

$$|y(t)| \leq y_{\max} < \infty \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Die Eingangs–Ausgangs–Stabilität lässt sich leicht anhand der Impulsantwort $y(t) = g(t) \star u(t)$ für $u(t) = \delta(t)$ mit der Dirac Delta–Funktion $\delta(t)$ und der Übertragungsfunktion $\hat{g}(s) = \mathbf{c}^T (sE - A)^{-1} \mathbf{b} + d$ beurteilen. Wegen $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ führt dies mit (4.5) auf

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}(\hat{g}(s)1) = \int_0^t g(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \mathbf{c}^T \Phi(t) \mathbf{b} + d\delta(t). \quad (4.23)$$

Die Funktion $g(t)$ wird auch als *Gewichtsfunktion* bezeichnet. Es gilt der folgende Satz.

Satz 4.3: E/A–Stabilität anhand der Impulsantwort

Das lineare, zeitinvariante System (4.22) ist genau dann eingangs–ausgangs–stabil, wenn die Impulsantwort $g(t)$ nach (4.23) absolut integrabel ist, d.h. die Bedingung

$$\int_0^\infty |g(t)| dt < \infty \quad (4.24)$$

erfüllt ist.

Beweis. Der Beweis der Äquivalenz erfolgt in zwei Schritten.

- (i) Impulsantwort ist absolut integrabel \Rightarrow Eingangs–Ausgangs–Stabilität: Mit dem Faltungssatz gilt allgemein für die Ausgangsgleichung

$$y(t) = g(t) \star u(t) = \int_0^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau.$$

Unter der Annahme der absoluten Integrabilität von $g(t)$ folgt für jede beschränkte Eingangsfunktion $|u(t)| \leq u_{\max} < \infty$ die Existenz einer Konstanten y_{\max} so, dass gilt

$$|y(t)| \leq \left| \int_0^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |g(\tau)| |u(t - \tau)| d\tau \leq u_{\max} \int_0^t |g(\tau)| d\tau \leq y_{\max}.$$

- (ii) Eingangs–Ausgangs–Stabilität \Rightarrow Impulsantwort ist absolut integrabel: Der Nachweis dieser Richtung erfolgt durch Widerspruch, indem gezeigt wird, dass $\int_0^\infty |g(t)| dt = \infty$ impliziert, dass das System nicht eingangs–ausgangs–stabil ist. In diesem Fall existiert eine beschränkte Eingangsfunktion $u(t)$ mit $|u(t)| \leq u_{\max} < \infty$ so, dass das Ausgangssignal $y(t)$ unbeschränkt ist. Mit der speziellen Wahl $u(t - \tau) = a \operatorname{sign}(g(\tau))$ für $\tau \in [0, t]$ führt die Auswertung von $y(t) = g(t) \star u(t)$ auf

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau = a \int_0^t g(\tau) \operatorname{sign}(g(\tau)) d\tau = a \int_0^t |g(\tau)| d\tau.$$

Im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ folgt somit unmittelbar, dass $y(t)$ unbeschränkt ist und somit das System unter der Annahme $\int_0^\infty |g(t)| dt = \infty$ nicht eingangs–ausgangs–stabil sein kann. \square

Eine weitere Möglichkeit zur Überprüfung der Eingangs–Ausgangs–Stabilität bietet die Übertragungsfunktion.

Satz 4.4: E/A–Stabilität anhand der Übertragungsfunktion

Das lineare, zeitinvariante System (4.22) ist genau dann eingangs–ausgangs–stabil, wenn sämtliche Pole $s_j = \alpha_j + i\omega_j$ der zugehörigen Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$ die Bedingung

$$\Re(s_j) = \alpha_j < 0 \tag{4.25}$$

erfüllen.

Beweis. Der Beweis der Äquivalenz erfolgt in zwei Schritten.

- (i) Eingangs–Ausgangs–Stabilität $\Rightarrow \hat{g}(s)$ besitzt nur Pole mit negativem Realteil: Wegen Satz 4.3 impliziert die Annahme der Eingangs–Ausgangs–Stabilität die absolute Integrierbarkeit der Impulsantwort. Deren Laplace–Transformierte folgt entsprechend aus

$$\hat{g}(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt.$$

Mit $s \in \mathbb{C}$ bzw. $s = \alpha + i\omega$ führt dies auf die Abschätzung

$$|\hat{g}(s)| \leq \int_0^\infty e^{-\alpha t} |g(t)| dt.$$

Da $g(t)$ gemäß Annahme absolut integrierbar ist, gilt

$$|\hat{g}(s)| \leq \int_0^\infty |g(t)| dt < \infty \quad (\alpha \geq 0).$$

Dies besagt, dass $g(t)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) \geq 0$ beschränkt ist und somit in dieser geschlossenen s –Halbebene keinen Pol s_j aufweisen kann.

- (ii) $\hat{g}(s)$ besitzt nur Pole mit negativem Realteil \Rightarrow Eingangs–Ausgangs–Stabilität: Dieser Teil des Beweises wird dem Leser als Übungsaufgabe überlassen. \square

Der Zusammenhang zwischen der asymptotischen Stabilität eines linearen, zeitinvarianten Systems und dessen Eingangs–Ausgangs–Stabilität ist unmittelbar aus den entsprechenden Definitionen und Eigenschaften ableitbar.

Satz 4.5: Asymptotische Stabilität und E/A–Stabilität

Ist ein lineares, zeitinvariantes System asymptotisch stabil, dann ist es auch eingangs–ausgangs–stabil. Die Umkehrung dieser Aussage gilt nur dann, wenn die Ordnungen der Übertragungsfunktion und des linearen, zeitinvarianten Systems übereinstimmen.

Da nach Satz 4.1 jeder Pol der Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$ ein Eigenwert der Dynamikmatrix A ist, folgt aus der asymptotischen Stabilität der Ruhelage $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$ des autonomen Systems $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$, dass das System auch eingangs–ausgangs–stabil ist.

Aufgabe 4.27. Geben Sie für das nicht eingangs–ausgangs–stabile lineare, zeitinvariante System mit der Übertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

eine beschränkte Eingangsfunktion $u(t)$ so an, dass die Ausgangsfunktion $y(t)$ unbeschränkt ist.

- **Lösung 4.27.** Die Eingangsfunktion $u(t) = a \sin(t)$ führt auf $y(t) = g(t) \star u(t) = \frac{a}{2}(\sin(t) - t \cos(t))$.
- Analog liefert $u(t) = a \cos(t)$ das Ausgangssignal $y(t) = \frac{a}{2} t \sin(t)$.

Aufgabe 4.28. Überprüfen Sie, ob die linearen, zeitinvarianten Systeme mit den folgenden Übertragungsfunktionen eingangs–ausgangs–stabil sind

$$\hat{g}_1(s) = \frac{1}{s}, \quad \hat{g}_2(s) = \frac{s-1}{s+2}, \quad \hat{g}_3(s) = s, \quad \hat{g}_4(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1}, \quad \hat{g}_5(s) = e^{as}, \quad a \in \mathbb{R}^-.$$

Wenden Sie hierzu jeweils die Sätze 4.3 und 4.4 an.

- **Lösung 4.28.** Die Eingangs–Ausgangs–Stabilität folgt für $\hat{g}_2(s)$, $\hat{g}_4(s)$ und $\hat{g}_5(s)$.

Aufgabe 4.29. Ist das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$y = [-1 \quad -3 \quad -2] \mathbf{x}$$

eingangs–ausgangs–stabil? Können Sie von der zugehörigen Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$ auf die asymptotische Stabilität des linearen, zeitinvarianten Systems schließen?

- **Lösung 4.29.** Das System ist eingangs–ausgangs–stabil. Aufgrund einer Pol–Nullstellen Kürzung kann rein aus der Kenntnis von $\hat{g}(s)$ nicht auf die asymptotische Stabilität geschlossen werden.

4.5 Kontinuierlicher Frequenzgang

Wird ein lineares, zeitinvariantes System mit der Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$ durch eine harmonische Eingangsgröße der Form

$$u(t) = A_0 \sin(\omega_0 t)$$

angeregt, so ist die Antwort $y(t)$ des Systems im *eingeschwungenen Zustand*, also nach dem Abklingen aller transienten Vorgänge, wieder eine harmonische Funktion mit identischer Frequenz ω_0 , aber veränderter Phase und Amplitude

$$y(t) = A_0 |\hat{g}(i\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \arg(\hat{g}(i\omega_0))).$$

Dabei muss natürlich die Eingangs–Ausgangs–Stabilität des Systems vorausgesetzt werden. Mit der Auswertung der Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$ entlang der imaginären Achse $s = i\omega$ ergibt sich eine Abbildung $\hat{g}(i\omega)$ der imaginären Achse $i\omega$ mit $\omega \in \mathbb{R}$ in die komplexen Zahlen. Diese Abbildung $\hat{g}(i\omega)$ bezeichnet man als den *Frequenzgang* der Übertragungsfunktion und die reellwertigen Funktionen $|\hat{g}(i\omega)|$ und $\arg(\hat{g}(i\omega))$ in ω werden als *Betragsfrequenzgang* oder *Amplitudengang* bzw. *Winkelfrequenzgang* oder *Phasengang* von $\hat{g}(s)$ bezeichnet.

4.5.1 Nyquist-Ortskuve

Unter der *Nyquist-Ortskuve* bzw. *Ortskuve* versteht man das Bild $\hat{g}(i\omega)$ der imaginären Achse $s = i\omega$ in der komplexen \hat{g} -Ebene mit Abszisse $\Re(\hat{g}(i\omega))$ und Ordinate $\Im(\hat{g}(i\omega))$. Wie Abbildung 4.7 schematisch zeigt, ist die Ortskuve durch ihre Form (Verlauf) und die Frequenzteilung (ω -Teilung) bestimmt.

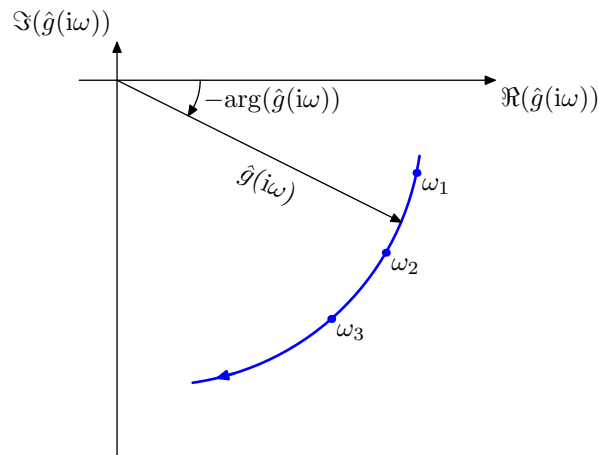


Abb. 4.7.: Nyquist-Ortskuve in der $(\Re(\hat{g}(i\omega)), \Im(\hat{g}(i\omega)))$ -Ebene mit ω -Teilung und $\varphi = \arg(\hat{g}(i\omega))$.

Letztere wird zwar häufig nicht angegeben, sollte jedoch zumindest implizit beachtet werden, da es Ortskurven mit identischer Form gibt, die sich nur durch die ω -Teilung unterscheiden.

Beispiel 4.3. Als Beispiel sei

$$\hat{g}_k(s) = \frac{1}{1 + ks}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (4.26)$$

genannt. Mit $s = i\omega$ folgt

$$\hat{g}_k(i\omega) = \frac{1}{1 + ik\omega} = \frac{1}{1 + (k\omega)^2} + i \frac{-k\omega}{1 + (k\omega)^2} = \Re(\hat{g}_k(i\omega)) + i\Im(\hat{g}_k(i\omega))$$

bzw. $(\Re(\hat{g}_k(i\omega)) - \frac{1}{2})^2 + (\Im(\hat{g}_k(i\omega)))^2 = \frac{1}{4}$, weshalb sich die Nyquist-Ortskuve unabhängig von k als Kreis mit Mittelpunkt $(1/2, 0)$ und Radius $1/2$ darstellt. Für verschiedene Werte $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ unterscheiden sich die Kurven jedoch in der ω -Teilung. Abbildung 4.8 zeigt dies exemplarisch für $k \in \{1, 2\}$.

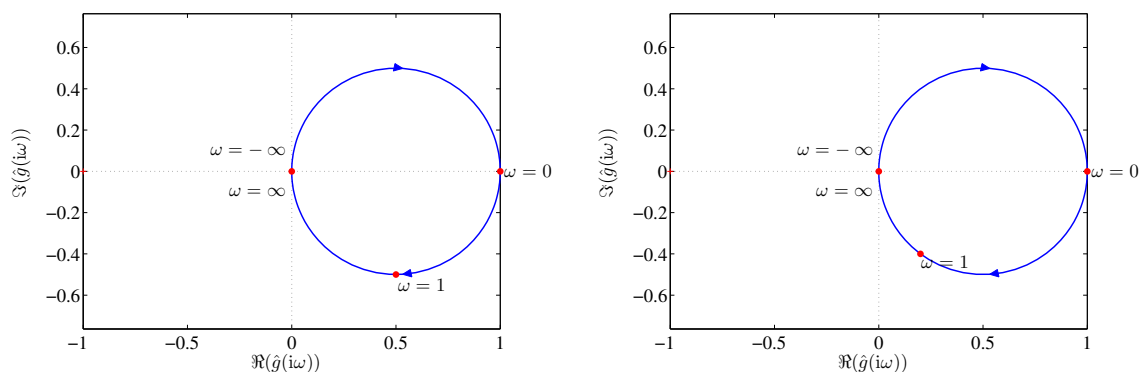


Abb. 4.8.: Nyquist-Ortskuve für die Übertragungsfunktion (4.26) mit $k = 1$ (links) und $k = 2$ (rechts).

Die Ortskurve (einschließlich ω -Teilung) beinhaltet die vollständige Information über das dynamische Eingangs–Ausgangs–Verhalten eines linearen, zeitinvarianten Systems. Mathematisch bedeutet dies, dass man aus der Kenntnis von $\hat{g}(i\omega)$ eindeutig die gesamte Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$ bestimmen kann. Diese Tatsache beruht auf der Cauchyschen Integralformel, die, unter gewissen Voraussetzungen, die Berechnung der Funktionswerte einer komplexwertigen Funktion im Inneren eines Gebietes aus den Funktionswerten längs der dieses Gebiet begrenzenden Kontur (hier die imaginäre Achse) gestattet. Weitere Eigenschaften der Nyquist–Ortskurve sind nachfolgend zusammengefasst:

- (i) Mit den Grenzwertsätzen der Laplace–Transformation ergeben sich die folgenden Zusammenhänge zwischen $\hat{g}(i\omega)$ und der Impulsantwort $g(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \hat{g}(s) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} (i\omega) \hat{g}(i\omega) \quad (4.27a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{g}(s) = \lim_{\omega \rightarrow 0} (i\omega) \hat{g}(i\omega). \quad (4.27b)$$

Hierbei wird vorausgesetzt, dass die Grenzwerte für $t \rightarrow 0+$ bzw. $t \rightarrow \infty$ existieren.

- (ii) Die Nyquist–Ortskurven der wichtigsten Regelkreisglieder sind in Abschnitt 4.7 dargestellt. Dabei sei bemerkt, dass alle Systeme, deren Übertragungsfunktion $\hat{g}(s) = \hat{z}(s)/\hat{n}(s)$ strikt proper ist (d.h. $\deg \hat{z}(s) < \deg \hat{n}(s)$) Nyquist–Ortskurven besitzen, die für $\omega \rightarrow \infty$ im Ursprung enden.

Aufgabe 4.30. Zeichnen Sie die Nyquist–Ortskurven für die folgenden Übertragungsfunktionen

$$\hat{g}_1(s) = \frac{10s^2 + 15s + 10}{s^2 + s + 2}, \quad \hat{g}_2(s) = \frac{s-1}{s+1}, \quad \hat{g}_3(s) = \frac{s+1}{s-1}, \quad \hat{g}_4(s) = \frac{1}{s},$$

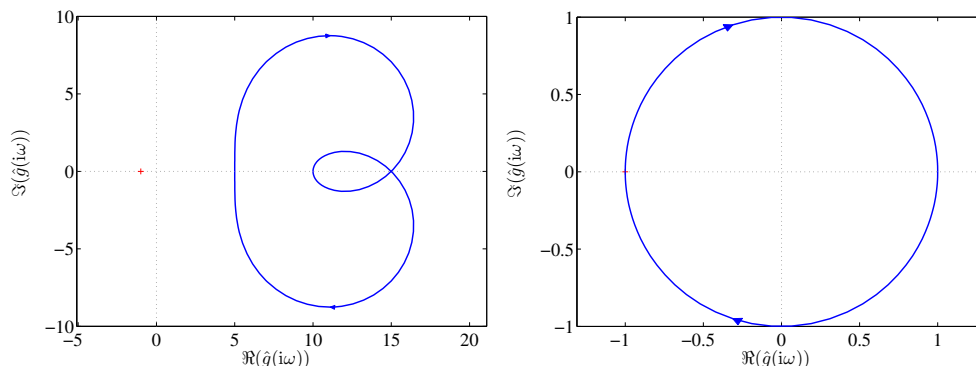
$$\hat{g}_5(s) = \frac{1}{s^2}, \quad \hat{g}_6(s) = \frac{s}{s+2}, \quad \hat{g}_7(s) = \frac{s}{s^2+4}, \quad \hat{g}_8(s) = \exp(-s).$$

Kennzeichnen Sie die Punkte $\omega = -\infty$, $\omega = 0-$, $\omega = 0+$ und $\omega = \infty$ und bestimmen Sie

$$\arg \min_{\omega_0 \geq 0} \Re(\hat{g}_j(i\omega_0)) = 0,$$

d.h. die kleinste Kreisfrequenz $\omega_0 \geq 0$, an der die Nyquist–Ortskurve $\hat{g}_j(i\omega)$ zu ersten Mal die reelle Achse schneidet (falls dieser Fall eintritt). Kontrollieren Sie Ihre Berechnungen mit MATLAB bzw. OCTAVE durch die Verwendung des Befehls `nyquist`.

Lösung 4.30. Den Verlauf der Nyquist–Ortskurven von $\hat{g}_j(i\omega)$, $j = 1, \dots, 8$ zeigt die folgende Abbildung 4.9.



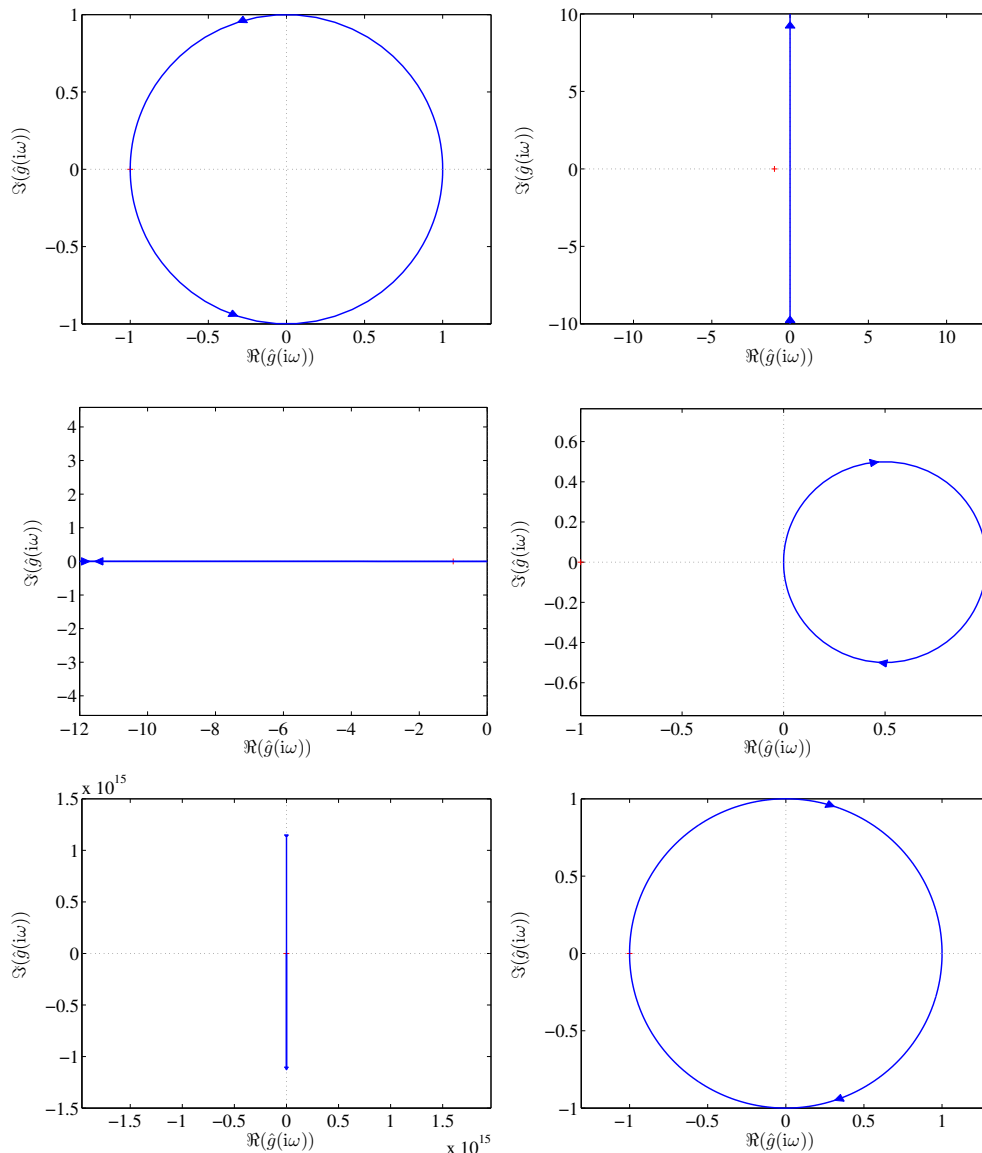


Abb. 4.9.: Nyquist-Ortskurven von $\hat{g}_j(i\omega)$, $j = 1, \dots, 8$.

4.5.2 Bode-Diagramm

Neben der Ortskurve wird häufig eine zweite Darstellung des Frequenzgangs $\hat{g}(i\omega)$ verwendet, die so genannten *Logarithmischen Frequenzkennlinien* oder *Bode-Diagramme*.

Hierzu wird nachfolgend der Begriff einer einfach- bzw. doppel-logarithmischen Darstellung eines Graphen benötigt. Der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wird einfach-logarithmisch genannt, wenn er in Parameterdarstellung $(\log(x), f(x))$ gezeichnet wird. Der Graph wird doppel-logarithmisch in der Darstellung $(\log(x), \log(f(x)))$ bezeichnet.

Bei den Bode-Diagrammen ist es üblich in der doppel-logarithmischen Darstellung auf der Ordinate an Stelle von $\log(f(x))$ die Größe $20\log(f(x))$ aufzutragen. Man sagt dann auch, dass die Größe in *Dezibel* ($f(x)$ in dB) vorliegt mit $(f(x))_{\text{dB}} = 20\log(f(x))$.

Definition 4.4: Bode–Diagramm

Das Bode–Diagramm einer Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$ setzt sich zusammen aus

- (i) dem *Amplitudengang* in Form des Graphen $(\log(\omega), |\hat{g}(i\omega)|_{\text{dB}})$ (doppel–logarithmisch) und
- (ii) dem *Phasengang* in Form des Graphen $(\log(\omega), \arg(\hat{g}(i\omega)))$ (einfach–logarithmisch), wobei die Phase $\arg(\hat{g}(i\omega))$ in $^\circ$ angegeben wird.

Diese Art der Darstellung des Frequenzgangs hat gewisse Vorzüge. Insbesondere kann bei der Serienschaltung von Systemen in einfacher Art und Weise der Einfluss der einzelnen Teil–Übertragungsfunktionen auf das Gesamtsystem dargestellt werden. Zur Illustration betrachte man die beiden Übertragungsfunktionen

$$\hat{g}_1(s) = \frac{\hat{z}_1(s)}{\hat{n}_1(s)}, \quad \hat{g}_2(s) = \frac{\hat{z}_2(s)}{\hat{n}_2(s)}$$

und deren Serienschaltung

$$\hat{g}(s) = \hat{g}_1(s)\hat{g}_2(s) = \frac{\hat{z}_1(s)\hat{z}_2(s)}{\hat{n}_1(s)\hat{n}_2(s)}.$$

Zur Bestimmung des Amplitudengangs führt die Auswertung von $|\hat{g}(i\omega)|_{\text{dB}}$ auf

$$\begin{aligned} |\hat{g}(i\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log \left(\left| \frac{\hat{z}_1(i\omega)\hat{z}_2(i\omega)}{\hat{n}_1(i\omega)\hat{n}_2(i\omega)} \right| \right) \\ &= 20 \log(|\hat{z}_1(i\omega)|) + 20 \log(|\hat{z}_2(i\omega)|) - 20 \log(|\hat{n}_1(i\omega)|) - 20 \log(|\hat{n}_2(i\omega)|), \end{aligned}$$

während für den Phasengang die Berechnung von $\arg(\hat{g}(i\omega))$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \arg(\hat{g}(i\omega)) &= \arg \left(\frac{\hat{z}_1(i\omega)\hat{z}_2(i\omega)}{\hat{n}_1(i\omega)\hat{n}_2(i\omega)} \right) \\ &= \arg(\hat{z}_1(i\omega)) + \arg(\hat{z}_2(i\omega)) - \arg(\hat{n}_1(i\omega)) - \arg(\hat{n}_2(i\omega)) \end{aligned}$$

liefert. Wegen der logarithmischen Darstellung brauchen bei der Bestimmung des Gesamtfrequenzgangs Strecken parallel zur Ordinatenachse jeweils nur addiert (entsprechend Multiplikation) bzw. subtrahiert (entsprechend Division) zu werden.

Für die weitere Analyse und Interpretation des Bode–Diagramms wird die Übertragungsfunktion in eine normierte Form

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{V \hat{z}(s)}{s^r \hat{n}(s)} = \frac{V \prod_{i=1}^k \left(1 + \frac{s}{\omega_{z,i}}\right) \prod_{i=k+1}^m \left(1 + 2\xi_{z,i} \left(\frac{s}{\omega_{z,i}}\right) + \left(\frac{s}{\omega_{z,i}}\right)^2\right)}{s^r \prod_{j=1}^l \left(1 + \frac{s}{\omega_{n,j}}\right) \prod_{j=l+1}^n \left(1 + 2\xi_{n,j} \left(\frac{s}{\omega_{n,j}}\right) + \left(\frac{s}{\omega_{n,j}}\right)^2\right)} \quad (4.28)$$

überführt mit $\hat{z}(0) = \hat{n}(0) = 1$, $r \in \mathbb{Z}$, $\omega_{z,i}, \omega_{n,j} \neq 0$ und $\xi_{z,i}, \xi_{n,j} < 1$. Dabei bezeichnet V den *Verstärkungsfaktor*, $\omega_{z,i}, \omega_{n,j}$ die *Knickfrequenzen* und $\xi_{z,i}, \xi_{n,j}$ die *Dämpfungsgrade* der Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$. Diese normierte Form wird allen weiteren Schritten zugrunde gelegt, so dass in der konkreten Anwendung eine gegebene Übertragungsfunktion zunächst in die Form (4.28) überführt werden muss.

Die Bezeichnung Verstärkungsfaktor wird bei der Analyse des Spezialfalls mit $r = 0$ (keine Null- bzw. Polstelle im Ursprung) und der Annahme einer eingangs–ausgangs–stabilen Übertragungsfunktion nach Definition 4.3 deutlich. In diesem Fall gilt mit dem Endwertsatz der Laplace–Transformation für die Sprungantwort des Systems, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{y}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\hat{g}(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} V \frac{\hat{z}(s)}{\hat{n}(s)} = V$. Offensichtlich wird unter den getroffenen Annahmen stationär die Höhe des Einheitssprunges um den Faktor V auf die Ausgangsgröße verstärkt.

Für den Amplitudengang von $\hat{g}(s)$ aus (4.28) folgt

$$|\hat{g}(i\omega)|_{\text{dB}} = |V|_{\text{dB}} - r|i\omega|_{\text{dB}} + \sum_{i=1}^k \left| 1 + i \frac{\omega}{\omega_{z,i}} \right|_{\text{dB}} - \sum_{j=1}^l \left| 1 + i \frac{\omega}{\omega_{n,j}} \right|_{\text{dB}} + \sum_{i=k+1}^m \left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{z,i}} \right)^2 + i2\xi_{z,i} \left(\frac{\omega}{\omega_{z,i}} \right) \right|_{\text{dB}} - \sum_{j=l+1}^n \left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{n,j}} \right)^2 + i2\xi_{n,j} \left(\frac{\omega}{\omega_{n,j}} \right) \right|_{\text{dB}}, \quad (4.29)$$

während sich der Phasengang zu

$$\arg(\hat{g}(i\omega)) = \arg(V) - r \arg(i\omega) + \sum_{i=1}^k \arg\left(1 + i \frac{\omega}{\omega_{z,i}}\right) - \sum_{j=1}^l \arg\left(1 + i \frac{\omega}{\omega_{n,j}}\right) + \sum_{i=k+1}^m \arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{z,i}}\right)^2 + i2\xi_{z,i} \left(\frac{\omega}{\omega_{z,i}}\right)\right) - \sum_{j=l+1}^n \arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{n,j}}\right)^2 + i2\xi_{n,j} \left(\frac{\omega}{\omega_{n,j}}\right)\right) \quad (4.30)$$

ergibt. Aus (4.29) und (4.30) erkennt man, dass sich sowohl der Amplituden– als auch der Phasengang additiv aus den Amplituden– und Phasengängen der einzelnen Terme zusammensetzt. Zur Beurteilung des Gesamtverhaltens werden somit die jeweiligen Terme zunächst separat analysiert:

(i) Verstärkungsfaktor $\hat{g}_1(s) = V$

$$|\hat{g}_1(i\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |V| \quad (4.31a)$$

$$\arg(\hat{g}_1(i\omega)) = \begin{cases} 0^\circ, & \text{für } V > 0 \\ \pm 180^\circ, & \text{für } V < 0 \end{cases} \quad (4.31b)$$

(ii) Integrierer bzw. Differenzierer $\hat{g}_2(s) = (i\omega)^r$

$$|\hat{g}_2(i\omega)|_{\text{dB}} = 20r \log(\omega) \quad (4.32a)$$

$$\arg(\hat{g}_2(i\omega)) = 90^\circ r \quad (4.32b)$$

(iii) Linearfaktor $\hat{g}_3(s) = 1 + i \frac{\omega}{\omega_k}$

$$|\hat{g}_3(i\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_k} \right)^2} \right) = \begin{cases} 0, & \text{für } \left| \frac{\omega}{\omega_k} \right| \ll 1 \\ 3.0103, & \text{für } \left| \frac{\omega}{\omega_k} \right| = 1 \\ 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_k} \right), & \text{für } \left| \frac{\omega}{\omega_k} \right| \gg 1 \end{cases} \quad (4.33a)$$

$$\arg(\hat{g}_3(i\omega)) = \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_k} \right) = \begin{cases} 0, & \text{für } \left| \frac{\omega}{\omega_k} \right| \ll 1 \\ 45^\circ \text{ sign}(\omega_k), & \text{für } \left| \frac{\omega}{\omega_k} \right| = 1 \\ 90^\circ \text{ sign}(\omega_k), & \text{für } \left| \frac{\omega}{\omega_k} \right| \gg 1 \end{cases} \quad (4.33b)$$

(iv) Quadratischer Faktor $\hat{g}_4(s) = 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2 + i2\xi_k\left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)$

$$|\hat{g}_4(i\omega)|_{dB} = 20 \log \left(\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi_k \frac{\omega}{\omega_k}\right)^2} \right)$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{für } \left|\frac{\omega}{\omega_k}\right| \ll 1 \\ 40 \log(\sqrt{2\xi_k}), & \text{für } \left|\frac{\omega}{\omega_k}\right| = 1 \\ 40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_k}\right), & \text{für } \left|\frac{\omega}{\omega_k}\right| \gg 1 \end{cases} \quad (4.34a)$$

$$\arg(\hat{g}_4(i\omega)) = \arctan\left(\frac{2\xi_k \frac{\omega}{\omega_k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{für } \left|\frac{\omega}{\omega_k}\right| \ll 1 \\ 90^\circ \operatorname{sign}(\omega_k), & \text{für } \left|\frac{\omega}{\omega_k}\right| = 1 \\ 180^\circ \operatorname{sign}(\omega_k), & \text{für } \left|\frac{\omega}{\omega_k}\right| \gg 1 \end{cases} \quad (4.34b)$$

Es zeigt sich aus (4.33) und (4.34), dass bei einem Linearfaktor bzw. bei einem quadratischen Faktor im Zähler (Nenner) der Amplitudengang für $\omega \gg \omega_k$ mit *20 dB pro Dekade* bzw. *40 dB pro Dekade* steigt (fällt) und für $\omega \ll \omega_k$ konstant 0 dB beträgt.

Beim Zeichnen des Bode-Diagramms wird oftmals der exakte Verlauf in der Umgebung der Knickfrequenz ω_k vernachlässigt und durch so genannte *Asymptoten* angenähert.

Beispiel 4.4. Exemplarisch wird dies in Abbildung 4.10 für die Übertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{20}}. \quad (4.35)$$

Die Knickfrequenz ergibt sich hierbei zu $\omega_n = 20 \text{ rad/s}$. Die zugehörigen Asymptoten für $\omega \ll \omega_n$ und $\omega \gg \omega_n$ entsprechend (4.33a) und (4.33b) sind rot in Form von Geraden gekennzeichnet.

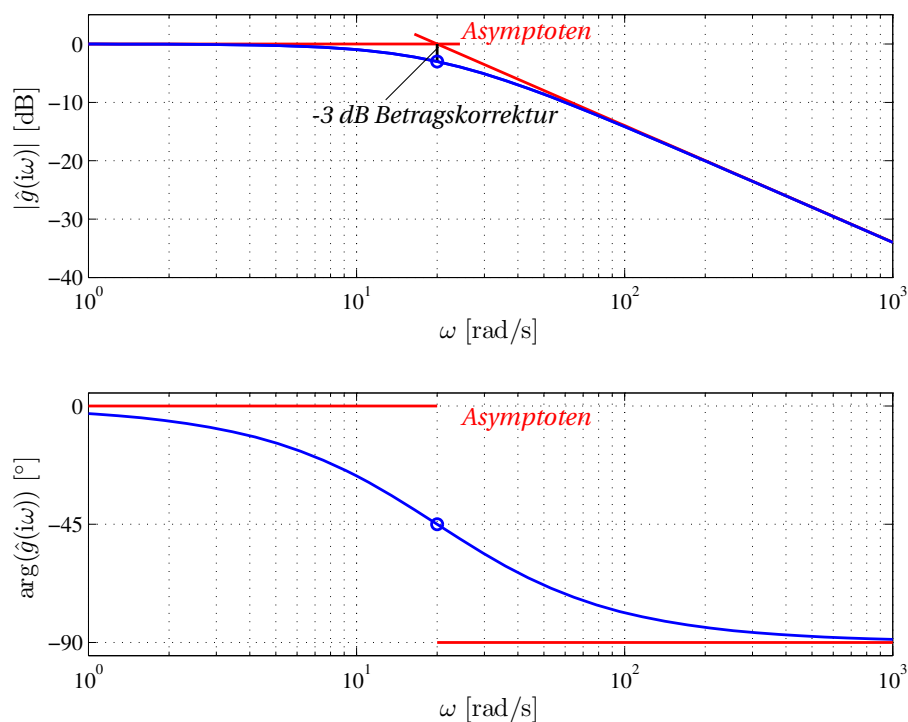


Abb. 4.10.: Bode-Diagramm für die Übertragungsfunktion (4.35).

Beispiel 4.5. Im Fall eines quadratischen Faktors im Nenner hängt der Verlauf des Amplituden- und Phasengangs neben der Knickfrequenz auch vom Dämpfungsgrad ab. Dies wird am Beispiel der Übertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{1 + 2\xi\left(\frac{s}{20}\right) + \left(\frac{s}{20}\right)^2} \quad (4.36)$$

in Abbildung 4.11 für $\xi \in \{0.01, 0.1, 0.5, 1\}$ dargestellt.

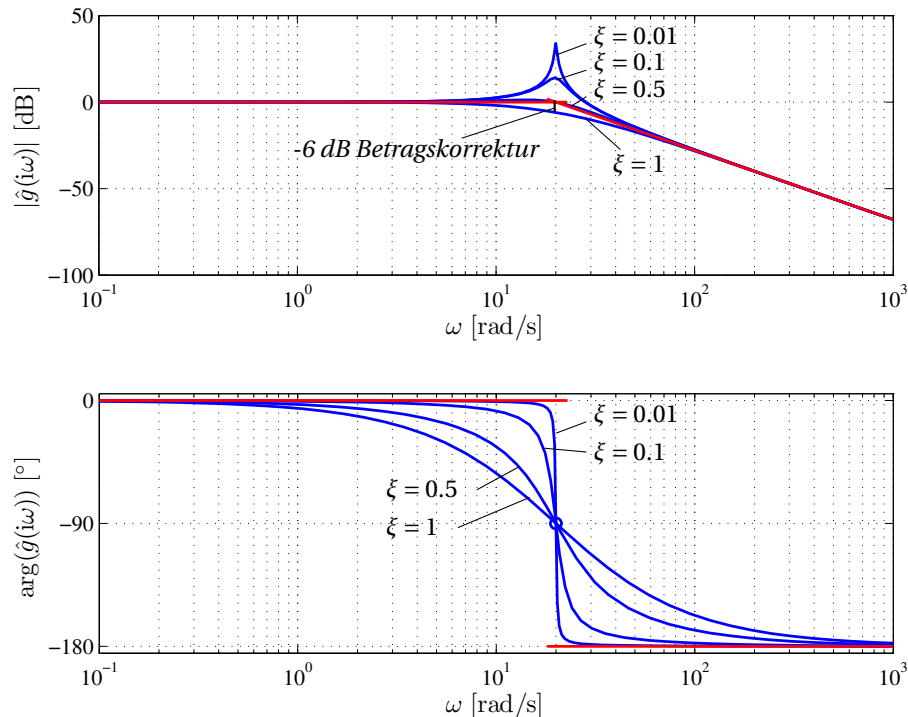


Abb. 4.11.: Bode-Diagramm für die Übertragungsfunktion (4.36). Asymptoten für $\xi = 1$ sind in rot gekennzeichnet.

Beispiel 4.6. Die Eigenschaft, dass sich das Bode-Diagramm einer Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$ gemäß (4.28) als Summe der Amplituden- und Phasengänge der einzelnen Anteile von $\hat{g}(s)$ darstellen lässt, kann unmittelbar zur Konstruktion des Bode-Diagramms herangezogen werden. Dies wird im Weiteren anhand des Beispiels

$$\hat{g}(s) = -\frac{1}{10} \frac{s-5}{s^2(s^2+s+4)\left(s+\frac{1}{2}\right)} \quad (4.37)$$

ausgeführt. In normierter Form gemäß (4.28) ergibt sich

$$\hat{g}(s) = \underbrace{\frac{1}{10} \frac{5}{2}}_{=V} \frac{1 - \frac{s}{5}}{s^2 \left(1 + 2\frac{1}{4}\left(\frac{s}{2}\right) + \left(\frac{s}{2}\right)^2\right) \left(1 + \frac{s}{1/2}\right)},$$

womit sich mit den obigen Ergebnissen der Amplituden- und Phasengang von $\hat{g}(s)$ durch die Summation der Amplituden- und Phasengänge der Teilübertragungsfunktionen

$$\hat{g}_1(s) = V = \frac{1}{4}, \quad \hat{g}_2(s) = \frac{1}{s^2}, \quad \hat{g}_3(s) = 1 - \frac{s}{5}, \quad \hat{g}_4(s) = \frac{1}{1 + 2\frac{1}{4}\left(\frac{s}{2}\right) + \left(\frac{s}{2}\right)^2}, \quad \hat{g}_5(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{1/2}}$$

ergibt. Abbildung 4.12 zeigt die zugehörige Konstruktion.

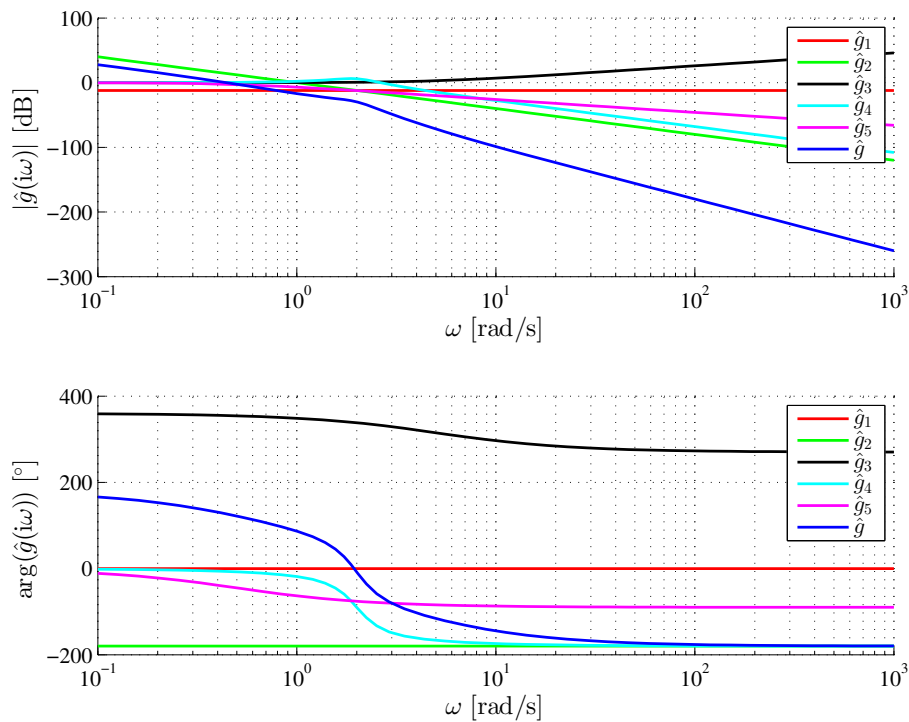


Abb. 4.12.: Bode-Diagramm für die Übertragungsfunktion (4.37).

Abschließend wird noch der Begriff einer *phasenminimalen Übertragungsfunktion* angegeben.

Definition 4.5: Phasenminimale Übertragungsfunktion

Eine Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$ wird *phasenminimal* genannt, wenn alle Pol- und Nullstellen von $\hat{g}(s)$ in der linken offenen Halbebene liegen.

Dieser Begriff kommt daher, dass es für diese Klasse von Systeme möglich ist, den Phasengang rein aus der Kenntnis des Amplitudenganges mittels der Beziehung

$$\arg(\hat{g}(i\omega_0)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \log(|\hat{g}(i\omega)|)}{d \log(\omega)} \ln \left(\coth \left(\left| \frac{r}{2} \right| \right) \right) dr, \quad r = \ln \frac{\omega}{\omega_0} \quad (4.38)$$

zu ermitteln, wobei angenommen wird, dass der Verstärkungsfaktor V der Übertragungsfunktion positiv ist. Man kann sich anhand der Beispiele

$$\hat{g}_1(s) = \frac{1+s}{1+\frac{s}{10}}, \quad \hat{g}_2(s) = \frac{-1+s}{1+\frac{s}{10}}, \quad \hat{g}_3(s) = \frac{-(1+s)}{1-\frac{s}{10}} \quad (4.39)$$

leicht davon überzeugen, dass (4.38) bei *nicht phasenminimalen Übertragungsfunktion* nicht mehr gültig ist, da alle $\hat{g}_j(s)$, $j = 1, 2, 3$ zwar den gleichen Amplitudengang, aber vollkommen unterschiedliche Phasengänge aufweisen.

Aufgabe 4.31. Zeichnen Sie die Bode-Diagramme der Übertragungsfunktionen (4.39).

4.6 Pol–Nullstellen Diagramm

Zusätzlich zur Charakterisierung einer Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$ als Frequenzgang in Form der Nyquist–Ortskurve oder des Bode–Diagramms, wird sehr oft das so genannte *Pol–Nullstellen Diagramm* verwendet. Dabei werden Pole typischerweise mit \times und Nullstellen mit \circ in der komplexen s –Ebene symbolisiert.

Dies wird in Abbildung 4.13 für die Übertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{10s(s+1)(s-2)}{(s+4)(s-3)(s^2+2s+4)} \quad (4.40)$$

gezeigt. Die Graphik wurde dabei mit dem Befehl `pzmap` von MATLAB bzw. OCTAVE erstellt. Dabei

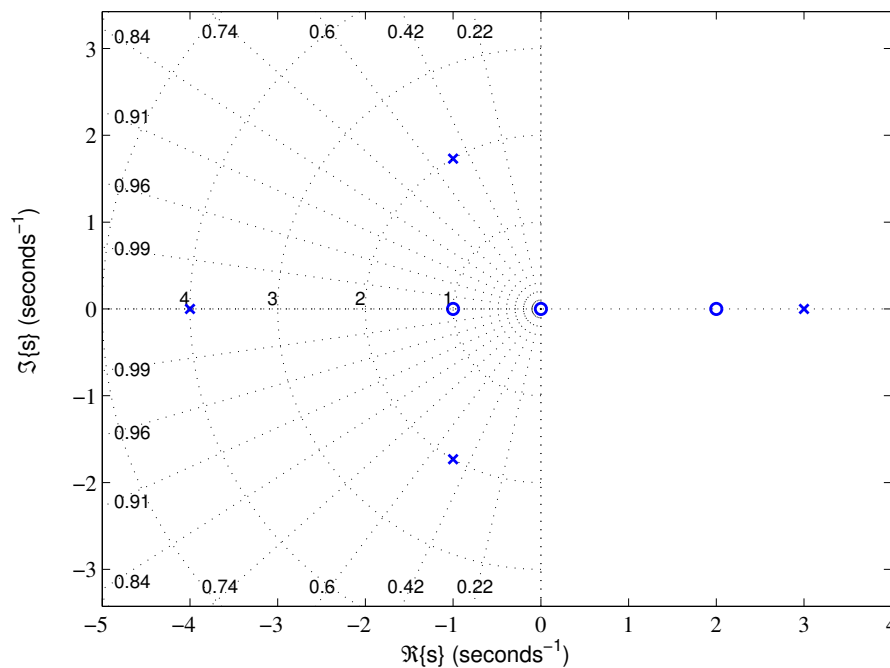


Abb. 4.13.: Pol–Nullstellen Diagramm der Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$ von (4.40).

sei auf die Bedeutung des eingezeichneten Gitters in Form von Strahlen und Kreisen in der linken komplexen Halbebene hingewiesen. Für ein Polynom zweiten Grades

$$\hat{n}(s) = s^2 + 2\xi \frac{s}{T} + \frac{1}{T^2}$$

mit $\xi < 1$ bezeichnet man mit $\lambda = \alpha \pm i\omega$ das zugehörige konjugiert komplexe Nullstellenpaar. Wegen

$$\hat{n}(s) = (s - \alpha - i\omega)(s - \alpha + i\omega) = s^2 + 2\xi \frac{s}{T} + \frac{1}{T^2}$$

besteht der folgende Zusammenhang

$$\xi = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2}}, \quad T = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

zwischen Real– und Imaginärteil der Nullstelle und der Zeitkonstanten T bzw. dem Dämpfungsgrad ξ . Offensichtlich liegen im Pol–Nullstellen Diagramm Punkte konstanten Dämpfungsgrades ξ auf einem Strahl durch den Nullpunkt mit konstanter Steigung, also $\frac{\omega}{\alpha}$ konstant. Zudem beschrieben

Punkte konstanter Zeitkonstante T im Pol–Nullstellen Diagramm einen Kreis mit Radius $\frac{1}{T}$ gegeben durch $\alpha^2 + \omega^2 = \frac{1}{T^2}$. Unter der Voraussetzung, dass $\Re\{\lambda\} = \alpha < 0$ ist, wird als Ausschnitt nur die linke komplexe Halbebene in Betracht gezogen. Im Beispiel (4.40) liegt das konjugiert komplexe Polpaar $s_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{3}$ auf einem Halbkreis mit Radius $\frac{1}{T} = 2$ in den Schnittpunkten mit einem Strahl der Steigung $\frac{\omega}{\alpha} = \pm\sqrt{3}$, was einem Dämpfungsgrad von $\xi = 1/\sqrt{1+\frac{\omega}{\alpha}} = \frac{1}{2}$ entspricht.

4.7 Analyse wichtiger Regelkreisglieder

Im Folgenden werden einige, für die Regelungstechnik wichtige Übertragungsglieder erläutert und mit den bislang eingeführten Methoden und Werkzeugen analysiert. Hierzu liegt den Betrachtungen die Übertragungsfunktion $\hat{g}(s) = \hat{y}(s)/\hat{u}(s)$ gemäß Abbildung 4.14 zugrunde. Neben harmonischen Testsignalen sind dabei auch die Antwort des Systems auf einen Einheitssprung $u(t) = \sigma(t)$, die so genannte *Sprungantwort* $h(t)$, und die Antwort des Systems auf einen Einheitsimpuls $\hat{u}(s) = \delta(t)$, die so genannte *Impulsantwort* $g(t)$, von besonderer Bedeutung.

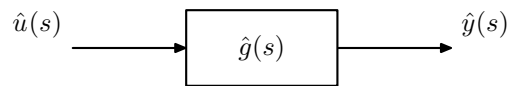


Abb. 4.14.: Übertragungsglied mit der Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$.

Auf die Anwendung dieser Regelkreisglieder im Rahmen der Regelung linearer, zeitkontinuierlicher Systeme wird in den weiteren Abschnitten noch weiter eingegangen.

4.7.1 Proportional–Glied (P–Glied)

Bei einem Proportional–Glied ist die Ausgangsgröße $y(t)$ unmittelbar proportional zur Eingangsgröße

$$y(t) = V_P u(t). \tag{4.41}$$

Damit folgt die Übertragungsfunktion zu

$$\hat{g}(s) = V_P. \tag{4.42}$$

Die Sprungantwort, die Nyquist–Ortskurve, das Bode–Diagramm und das Pol–Nullstellen Diagramm des P–Gliedes zeigt exemplarisch Abbildung 4.15 für $V_P = 10$.

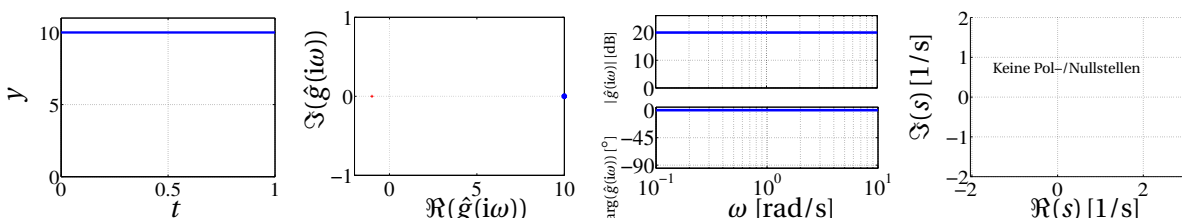


Abb. 4.15.: Sprungantwort, Nyquist–Ortskurve, Bode–Diagramm und Pol–Nullstellen Diagramm des P–Gliedes für $V_P = 10$.

4.7.2 Verzögerungsglied 1. Ordnung (P-T₁-Glied)

Die Differenzialgleichung eines Verzögerungsglieds 1. Ordnung lautet

$$T \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = V_P u(t), \quad (4.43)$$

womit sich die entsprechende Übertragungsfunktion zu

$$\hat{g}(s) = \frac{V_P}{1 + Ts} \quad (4.44)$$

ergibt, mit dem Verstärkungsfaktor bzw. Beiwert V_P und der Zeitkonstanten $T > 0$. Eine graphische Darstellung der Sprungantwort, der Nyquist-Ortskurve, des Bode-Diagramms und des Pol-Nullstellen Diagramms des P-T₁-Gliedes ist Abbildung 4.16 für $V_P = 10$ und $T = \frac{1}{2}$ zu entnehmen. Die Sprung-

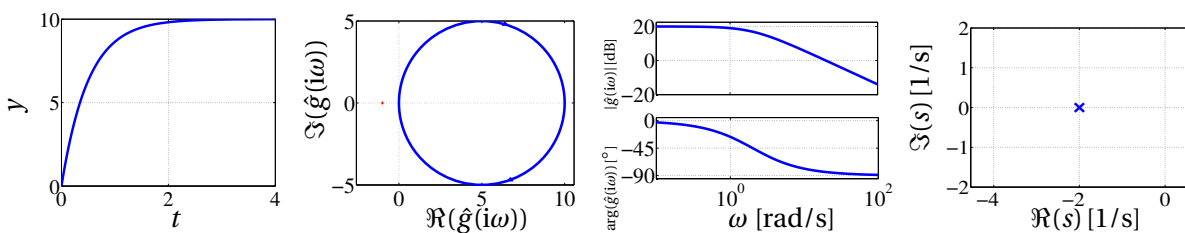


Abb. 4.16.: Sprungantwort, Nyquist-Ortskurve, Bode-Diagramm und Pol-Nullstellen Diagramm des P-T₁-Gliedes für $V = 10$ und $T = \frac{1}{2}$.

wie die Impulsantwort des P-T₁-Gliedes können leicht durch Anwendung der Laplace-Transformation als

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \hat{g}(s) \frac{1}{s} \right\} = V_P \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \sigma(t)$$

bzw.

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \hat{g}(s) \} = \frac{d}{dt} h(t) = \frac{V_P}{T} e^{-\frac{t}{T}} \sigma(t)$$

ermittelt werden.

4.7.3 Verzögerungsglied 2. Ordnung (P-T₂-Glied)

Das Verzögerungsglied 2. Ordnung wird durch die Differenzialgleichung

$$T^2 \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 2\xi T \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = V u(t) \quad (4.45)$$

bzw. im Frequenzbereich durch die Übertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{V_P}{1 + 2\xi Ts + (Ts)^2} \quad (4.46)$$

beschrieben mit dem Verstärkungsfaktor V_P , der Zeitkonstanten $T > 0$ und dem Dämpfungsgrad $\xi \in [0, 1)$. Die Sprungantwort, die Nyquist-Ortskurve, das Bode-Diagramm und das Pol-Nullstellen Diagramm des P-T₂-Gliedes sind in Abbildung 4.17 für $V_P = 10$, $T = \frac{1}{2}$ und $\xi = \frac{1}{4}$ gezeigt. Das Bode-Diagramm bei Variation des Dämpfungsgrades ξ wird zudem in Beispiel 4.5 analysiert.

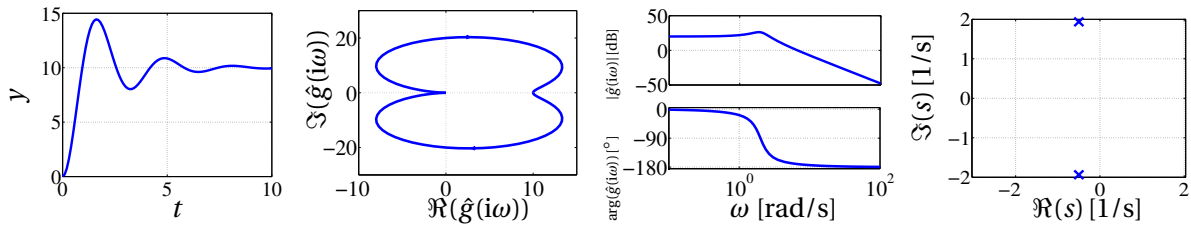


Abb. 4.17.: Sprungantwort, Nyquist–Ortskurve, Bode–Diagramm und Pol–Nullstellen Diagramm des P-T₂–Gliedes für $V_P = 10$, $T = \frac{1}{2}$ und $\xi = \frac{1}{4}$.

Die Sprung– und Impulsantwort des P-T₂–Gliedes können wiederum leicht durch die Anwendung der Laplace–Transformation bestimmt werden und ergeben sich in allgemeiner Form zu

$$h(t) = V_P \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[\xi \sin\left(\sqrt{1-\xi^2} \frac{t}{T}\right) + \sqrt{1-\xi^2} \cos\left(\sqrt{1-\xi^2} \frac{t}{T}\right) \right] e^{-\xi \frac{t}{T}} \right) \sigma(t)$$

sowie

$$g(t) = \frac{V_P}{T\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \frac{t}{T}} \sin\left(\sqrt{1-\xi^2} \frac{t}{T}\right) \sigma(t).$$

4.7.4 Integrator (I–Glied)

Beim Integrator entspricht die Ausgangsgröße $y(t)$ dem Integral über die Eingangsgröße $u(t)$, d.h.

$$y(t) = V_I \int_0^t u(\tau) d\tau, \quad y(0) = 0, \tag{4.47}$$

womit sich die Übertragungsfunktion zu

$$\hat{g}(s) = \frac{V_I}{s} \tag{4.48}$$

ergibt. Sprungantwort, Nyquist–Ortskurve, Bode–Diagramm und Pol–Nullstellen Diagramm zeigt Abbildung 4.18 für $V_I = 10$.

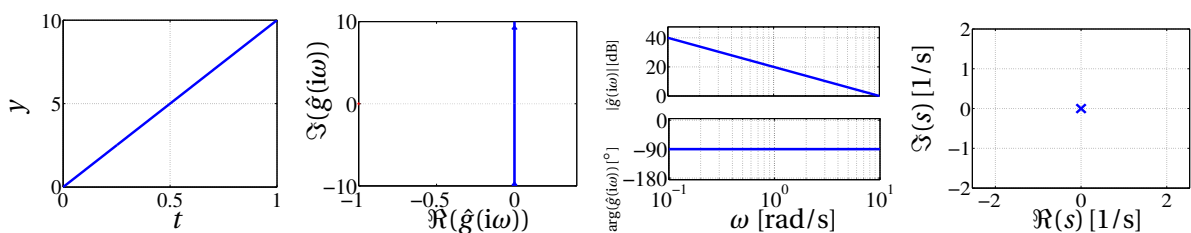


Abb. 4.18.: Sprungantwort, Nyquist–Ortskurve, Bode–Diagramm und Pol–Nullstellen Diagramm des I–Gliedes für $V_I = 10$.

4.7.5 Differenzierer (D–Glied)

Die Übertragungsfunktion eines idealen Differenzierers lautet

$$\hat{g}(s) = V_D s. \tag{4.49}$$

Es sei bemerkt, dass gemäß Satz 4.2 die Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$ *nicht realisierbar* ist. In Abbildung 4.19 sind Sprungantwort, Nyquist–Ortskurve, Bode–Diagramm und Pol–Nullstellen von $\hat{g}(s)$ für $V_D = 10$ dargestellt.

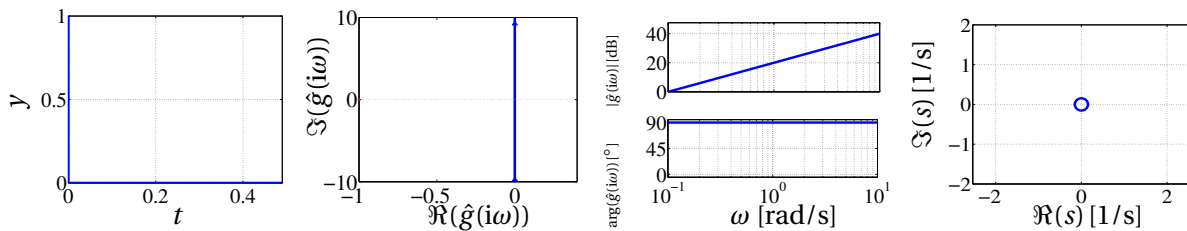


Abb. 4.19.: Sprungantwort, Nyquist–Ortskurve, Bode–Diagramm und Pol–Nullstellen Diagramm des D–Gliedes für $V_D = 10$.

4.7.6 Differenzierer mit Realisierungsterm (D- T_1 –Glied)

Eine realisierbare Version des Differenzierers erhält man, indem im Nenner von (4.49) ein so genannter *Realisierungsterm* hinzugefügt wird, so dass

$$\hat{g}(s) = \frac{V_D s}{1 + T_R s}, \quad 0 < T_R \ll 1. \quad (4.50)$$

Die Übertragungsfunktion ist proper und damit in der Form

$$T_R \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = V_D \frac{d}{dt} u(t) \quad (4.51)$$

realisierbar. Die entsprechende Sprungantwort, die Nyquist–Ortskurve, das Bode–Diagramm und das Pol–Nullstellen Diagramm des D- T_1 –Gliedes für $V_D = 10$ und $T_R = \frac{1}{10}$ zeigt Abbildung 4.20.

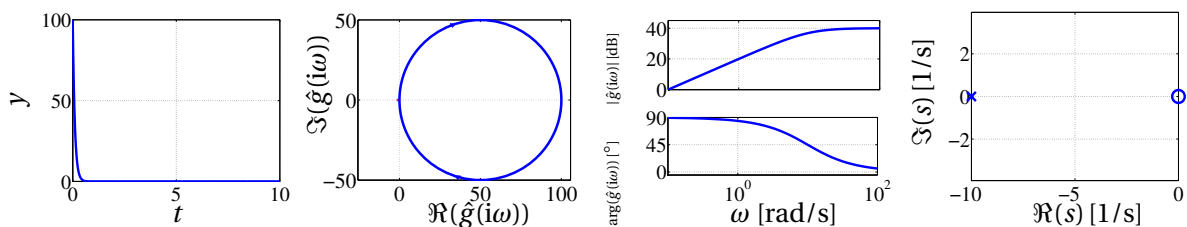


Abb. 4.20.: Sprungantwort, Nyquist–Ortskurve, Bode–Diagramm und Pol–Nullstellen Diagramm des D- T_1 –Gliedes für $V_D = 10$ und $T_R = \frac{1}{10}$.

4.7.7 Proportional–Integral–Glied (PI–Glied)

Aus der Parallelschaltung eines P–Gliedes und eines I–Gliedes ergibt sich das Proportional–Integral–Glied mit der Übertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{V_I(1 + T_I s)}{s} = \frac{V_I}{s} + \underbrace{V_I T_I}_{= V_P}, \quad T_I > 0. \quad (4.52)$$

Die Ausgangsgröße ergibt sich somit zu

$$y(t) = V_I \int_0^t u(\tau) d\tau + V_I T_I u(t), \quad y(0) = V_I T_I u(0). \quad (4.53)$$

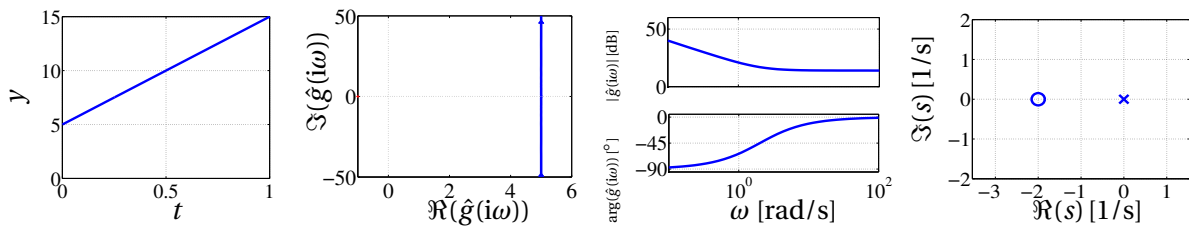


Abb. 4.21.: Sprungantwort, Nyquist–Ortskurve, Bode–Diagramm und Pol–Nullstellen Diagramm des PI–Gliedes für $V_I = 10$ und $T_I = \frac{1}{2}$.

Beispielhaft zeigt Abbildung 4.21 die Sprungantwort, die Nyquist–Ortskurve, das Bode–Diagramm und das Pol–Nullstellen Diagramm des PI–Gliedes für $V_I = 10$ und $T_I = \frac{1}{2}$.

4.7.8 Proportional–Differenzial–Glied (PD–Glied)

Analog zum PI–Glied führt die Parallelschaltung eines P–Gliedes und eines D–Gliedes auf das Proportional–Differenzial–Glied mit der Übertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = V_P(1 + T_D s) = V_P + \underbrace{V_P T_D}_{= V_D} s, \quad T_D > 0. \quad (4.54)$$

Die Sprungantwort, die Nyquist–Ortskurve, das Bode–Diagramm und das Pol–Nullstellen Diagramm des PD–Gliedes für $V_P = 10$ und $T_D = \frac{1}{2}$ ist in Abbildung 4.22 dargestellt.

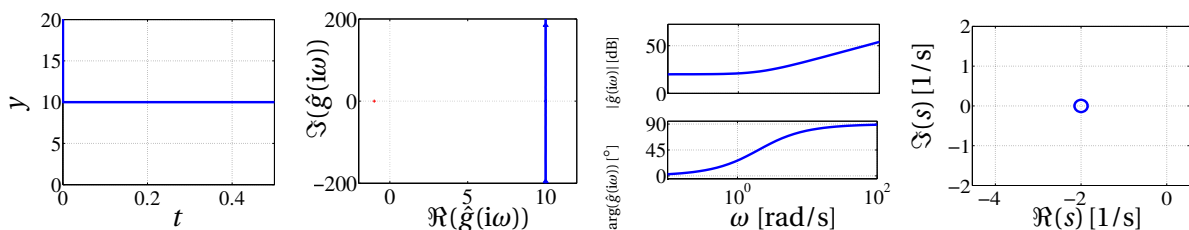


Abb. 4.22.: Sprungantwort, Nyquist–Ortskurve, Bode–Diagramm und Pol–Nullstellen Diagramm des PD–Gliedes für $V_P = 10$ und $T_D = \frac{1}{2}$.

Es folgt unmittelbar, dass die Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$ nicht proper und damit nach Satz 4.2 *nicht realisierbar* ist. Durch das Hinzufügen eines Realisierungsterms erhält man das so genannte Lead–Glied.

4.7.9 Lead–Glied (PD– T_1 –Glied) und Lag–Glied (PP– T_1 –Glied)

Die Übertragungsfunktion des PD– T_1 –Gliedes bzw. des Lead–Gliedes folgt somit unmittelbar aus der Übertragungsfunktion des PD–Gliedes zu

$$\hat{g}(s) = V \frac{1 + Ts}{1 + T\eta s}, \quad 0 < \eta < 1, \quad T > 0. \quad (4.55)$$

Eine graphische Illustration der Sprungantwort, der Nyquist–Ortskurve, des Bode–Diagramms und des Pol–Nullstellen Diagramm des PD– T_1 –Gliedes für $V = 10$, $T = \frac{1}{2}$ und $\eta = \frac{1}{10}$ zeigt Abbildung 4.23.

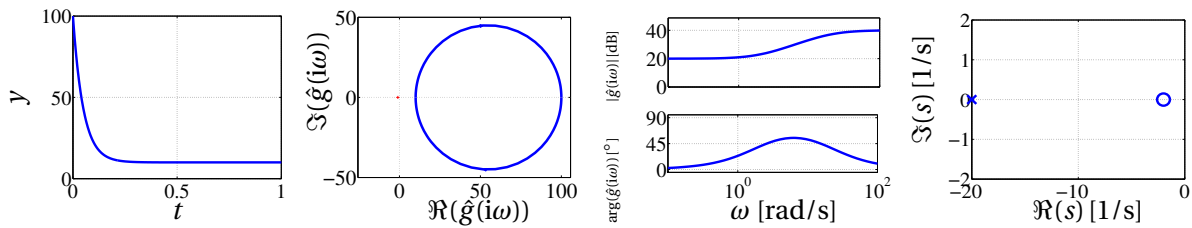


Abb. 4.23.: Sprungantwort, Nyquist-Ortskurve, Bode-Diagramm und Pol-Nullstellen Diagramm des PD-T₁-Gliedes für $V = 10$, $T = \frac{1}{2}$ und $\eta = \frac{1}{10}$.

Aus dem Phasengang in Abbildung 4.23 ist unmittelbar ersichtlich, dass das Lead-Glied in einem bestimmten Frequenzbereich eine Phasenhebung bewirkt. Die maximale Phasenhebung des Lead-Gliedes kann leicht wegen

$$\arg(\hat{g}(i\omega)) = \arctan(\omega T) - \arctan(\omega T\eta)$$

aus

$$\frac{d}{d\omega} \arg(\hat{g}(i\omega)) = \frac{T}{1 + (\omega T)^2} - \frac{T\eta}{1 + (\omega T\eta)^2} = 0$$

bestimmt werden. Insbesondere gilt für die Frequenz $\omega = \omega_{\max}$ am Punkt der maximalen Phasenhebung φ_{\max} der Wert

$$\omega_{\max} = \frac{1}{T\sqrt{\eta}},$$

woraus folgt, dass

$$\varphi_{\max} = \arg(\hat{g}(i\omega_{\max})) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right) - \arctan(\sqrt{\eta}).$$

Für $\eta > 1$ bezeichnet man die Übertragungsfunktion (4.55) als Lag-Glied (PP-T₁-Glied), das eine Phasenabsenkung bewirkt. Abbildung 4.24 zeigt das entsprechende dynamische Verhalten. Es sei

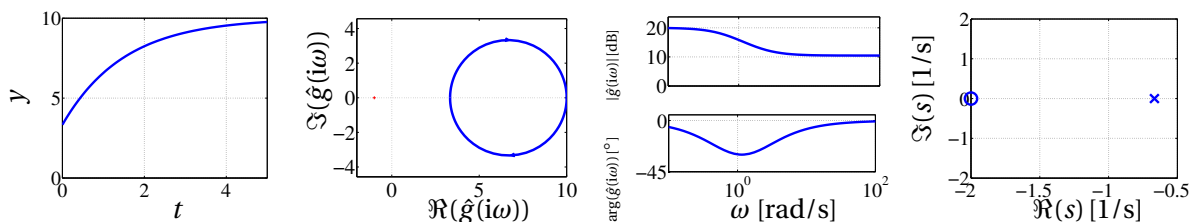


Abb. 4.24.: Sprungantwort, Nyquist-Ortskurve, Bode-Diagramm und Pol-Nullstellen Diagramm des Lag-Gliedes für $V = 10$, $T = \frac{1}{2}$ und $\eta = 3$.

bemerkt, dass sich die Anfangs- und Endwerte der Sprungantwort $h(t)$ mit Hilfe der Grenzwertsätze der Laplace-Transformation zu $h(0) = \frac{V}{\eta}$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = V$ ergeben.

4.7.10 Proportional-Differenzial-Integral-Glied (PID-Glied)

Aus der Kombination des P-Gliedes, des I-Gliedes und des D-T₁-Gliedes erhält man das Proportional-Differenzial-Integral-Glied (mit Realisierungsterm) mit der Übertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = V_P \frac{(1 + T_I s)(1 + T_D s)}{s(1 + T_R s)}, \quad 0 < T_R \ll 1, T_I, T_D > 0 \quad (4.56)$$

Die zugehörige Sprungantwort, die Nyquist-Ortskurve, das Bode-Diagramm und das Pol-Nullstellen Diagramm zeigt exemplarisch Abbildung 4.25 für $V_P = 10$, $T_I = \frac{1}{2}$, $T_D = 1$ und $T_R = \frac{1}{10}$.

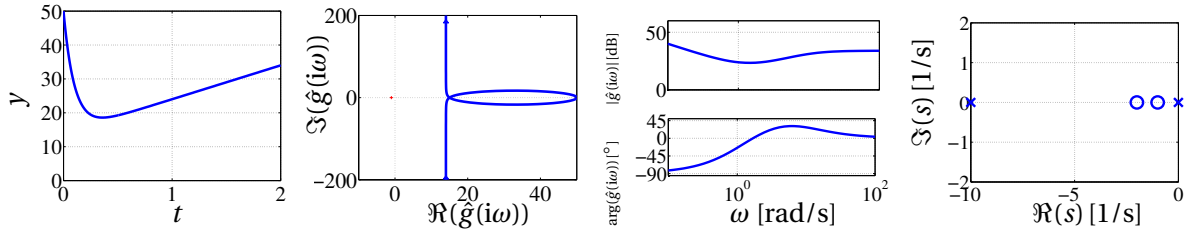


Abb. 4.25.: Sprungantwort, Nyquist-Ortskurve, Bode-Diagramm und Pol-Nullstellen Diagramm des PID-Gliedes für $V_P = 10$, $T_I = \frac{1}{2}$, $T_D = 1$ und $T_R = \frac{1}{10}$.

4.7.11 Totzeit-Glied (T_t -Glied)

Wenn durch das System von Abbildung 4.14 mit der Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$ die Eingangsgröße $u(t)$ zeitlich um eine konstante Zeit T_t verzögert (nach rechts verschoben) wird, d.h. wenn die Ausgangsgröße die Form

$$y(t) = u(t - T_t)$$

annimmt, dann bezeichnet man das System auch als Totzeit-Glied mit der Totzeit T_t . Mit dem ersten Verschiebungssatz der Laplace-Transformation lautet die zugehörige Übertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = e^{-T_t s}. \quad (4.57)$$

Die dynamischen Eigenschaften des Totzeit-Gliedes zeigt Abbildung 4.26. Diese Systeme treten typischerweise bei Transportvorgängen, z.B. bei einem Förderband oder dem in Beispiel 1.9 analysierten chemischen Prozess auf. Da hierbei jedoch oftmals eine zeitlich variable Totzeit auftritt, ist die Formulierung (4.57) nicht mehr gültig.

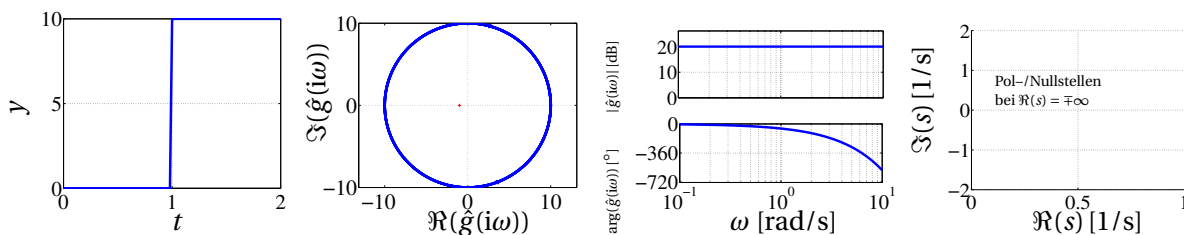


Abb. 4.26.: Sprungantwort, Nyquist-Ortskurve, Bode-Diagramm und Pol-Nullstellen Diagramm des T_t -Gliedes für $V = 10$ und $T_t = 1$.

Literatur

- [1] C.-T. Chen. *Linear System Theory and Design*. New York: Oxford Univ. Press, 1999 (zitiert auf den Seiten 57, 58).
- [2] G. Doetsch. *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation*. München: R. Oldenbourg, 1961 (zitiert auf Seite 51).
- [3] O. Föllinger. *Laplace-, Fourier- und z-Transformation*. 10. Aufl. VDE Verlag, 2011 (zitiert auf Seite 51).
- [4] S.J. Mason. „Feedback Theory — Further Properties of Signal Flow Graphs“. In: *Proc. IRE* 44.7 (1957), S. 920–926 (zitiert auf Seite 57).
- [5] W. Oppelt. *Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge*. Weinheim: Verlag Chemie, 1972 (zitiert auf Seite 57).