Laplace–Transformation

A

Die Laplace–Transformation ist eine im Wesentlichen eineindeutige Zuordnung von Funktionen der Zeit t zu Funktionen einer komplexen Variablen s. Formal kann die Laplace–Transformation auch aus der Fourier–Transformation abgeleitet werden, was auf die zweiseitige Laplace–Transformation führt. Die weiteren Ausführungen beziehen sich auf die einseitige Laplace–Transformation, bei der kausale Zeitfunktionen $f(t)$ betrachtet werden, für die gilt, dass $f(t) = 0$ für $t < 0$ [1, 3].

Definition 1.1: Laplace–Transformation

Sei $f(t)$ kausal, auf jedem finiten Zeitintervall $t \geq 0$ stückweise stetig und gehorche der Ungleichung

$$|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{\gamma t} \tag{A.1}$$

für $M, \gamma \geq 0$. Dann ist das Integral

$$\hat{f}(s) = \mathscr{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{A.2}$$

mit $s = \alpha + \mathrm{i}\omega$ für alle $\Re\{s\} = \alpha > \gamma$ absolut konvergent. Man bezeichnet $\hat{f}(s)$ als die *Laplace–Transformierte* von $f(t)$ und $\mathbb{C}_\gamma = \{s \in \mathbb{C} | \Re\{s\} > \gamma\}$ als das *Existenzgebiet* der Laplace–Transformierten $\hat{f}(s)$.

Beispiel 1.1. *Die Laplace–Transformierte der kausalen Zeitfunktion*

$$f(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{at}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

folgt leicht durch Auswertung von (A.2) *zu*

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{(a-s)t}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{(a-s)t}}{a-s}\bigg|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s-a}$$

für $\Re\{s\} > a$*. Das Existenzgebiet umfasst somit die komplexe Halbebene* $\mathbb{C}_a$.

Beispiel 1.2 (Einheitssprung). *Der Einheitssprung (Heaviside–Funktion)* $\sigma(t)$ *ist durch*

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \textit{undefiniert}, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \tag{A.3}$$

definiert. Offensichtlich genügt $\sigma(t)$ *der Bedingung* (A.1) *für* $\gamma = 0$ *und die Laplace–Transformierte errechnet sich nach* (A.2) *zu*

$$\mathscr{L}(\sigma(t)) = \int_0^\infty \sigma(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \frac{1}{s}$$

für $s \in \mathbb{C}_0$.

Beispiel 1.3 (Einheitsimpuls). *Der Einheitsimpuls (Dirac Delta–Funktion)* $\delta(t)$ *stellt keine Funktion im eigentlichen Sinn dar, sondern ein Funktional bzw. eine Distribution, das über die Beziehungen*

$$\int_{-\infty}^\infty \delta(t)g(t)\mathrm{d}t = g(0), \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\delta(t)g(t)\mathrm{d}t = (-1)^n\Big(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}g\Big)(0)$$

einer stetigen bzw. n–fach stetig differenzierbaren Funktion $g(t)$ *eine reelle Zahl* $g(0)$ *bzw.* $(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}g)|_{t=0}$ *zuordnet.*

Der Einheitsimpuls kann auf verschiedene Weise als Grenzübergang herkömmlicher Funktionen definiert werden, z.B. in der Form

$$\delta(t) = \lim_{\tau\to 0}\delta_\tau(t) = \lim_{\tau\to 0}\frac{\sigma(t)-\sigma(t-\tau)}{\tau}.$$

Mit

$$\mathscr{L}(\delta_\tau(t)) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \frac{1-\mathrm{e}^{-s\tau}}{\tau s}$$

folgt durch die Anwendung der Regel von l'Hospital die Laplace–Transformierte zu

$$\mathscr{L}(\delta(t)) = \lim_{\tau\to 0}\mathscr{L}(\delta_\tau(t)) = \lim_{\tau\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{-s\tau}}{\tau s} = 1.$$

Die ursprüngliche Zeitfunktion $f(t)$ kann aus der Bildfunktion $\hat{f}(s)$ durch die inverse Laplace–Transformation in Form des komplexen Integrals

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}(\hat{f}(s)) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{r-\mathrm{i}\infty}^{r+\mathrm{i}\infty}\hat{f}(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s \tag{A.4}$$

für $t \geq 0$ ermittelt werden. Die reelle Konstante r, die den Abstand des Integrationswegs von der parallel zu ihm verlaufenden ω–Achse der s–Ebene angibt, muss dabei so gewählt werden, dass der Integrationsweg innerhalb des Existenzgebietes verläuft. Damit liegen alle Singularitäten von $\hat{f}(s)$ links des Integrationswegs. Für detaillierte Ausführungen sei hierbei auf [1, 3] verwiesen.

Die folgende Auflistung fasst die wichtigsten Eigenschaften und Rechenregeln der Laplace–Transformation zusammen:

Laplace–Integral	$\mathscr{L}\left(f(t)\right) = \hat{f}(s) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$	$(\Re\{s\} = \sigma > \gamma)$
Umkehr–Integral	$\mathscr{L}^{-1}\left(\hat{f}(s)\right) = f(t)\vert_{t>0} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{r-\mathrm{i}\infty}^{r+\mathrm{i}\infty} \hat{f}(s)e^{st}\mathrm{d}s$	$(r > \gamma)$
Linearität	$\mathscr{L}\left(k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)\right) = k_1\mathscr{L}\left(f_1(t)\right) + k_2\mathscr{L}\left(f_2(t)\right)$, $\mathscr{L}^{-1}\left(k_1\hat{f}_1(s) + k_2\hat{f}_2(s)\right) = k_1\mathscr{L}^{-1}\left(\hat{f}_1(s)\right) + k_2\mathscr{L}^{-1}\left(\hat{f}_2(s)\right)$	($k_{1,2}$ beliebig)
Maßstabsänderung	$\mathscr{L}\left(f(at)\right) = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$	$(a \in \mathbb{R}^+)$
Zeitverschiebung	$\mathscr{L}\left(\sigma(t-b)f(t-b)\right) = e^{-bs}\hat{f}(s)$	$(b \in \mathbb{R}^+)$
Frequenzverschiebung	$\mathscr{L}^{-1}\left(\hat{f}(s \pm c)\right) = e^{\mp ct}f(t)$	$(c \in \mathbb{C})$
Integration	$\mathscr{L}\left(\int\limits_0^t \ldots \int\limits_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau^n\right) = \frac{1}{s^n}\hat{f}(s)$	
Gewöhnliche Differentiation[1]	$\mathscr{L}\left(f^{(n)}(t)\right) = s^n\hat{f}(s) - s^{n-1}f(0+) - \ldots - f^{(n-1)}(0+)$	
Differentiation der Bildfunktion	$\mathscr{L}^{-1}\left(\hat{f}^{(n)}(s)\right) = (-1)^n t^n f(t)$	
Faltungsintegral	$\mathscr{L}^{-1}\left(\hat{f}_1(s)\hat{f}_2(s)\right) = \int\limits_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\mathrm{d}\tau = f_1(t) \star f_2(t)$	
Grenzwertsätze	• Anfangswert–Satz[1] $\lim\limits_{\sigma\to\infty} s\hat{f}(s) = \lim\limits_{t\to 0+} f(t)$ • Endwert-Satz, Voraussetzung: $\exists f(t \to \infty)$ $\lim\limits_{s\to 0} s\hat{f}(s) = \lim\limits_{t\to\infty} f(t)$	

Tab. A.1.: Eigenschaften und Rechenregeln der Laplace–Transformation.

Aufgabe 1.71. *Beweisen Sie die Beziehungen aus Tabelle A.1.*

[1]Man beachte, dass jeweils der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle $t = 0$ verwendet wird, wobei für eine an $t = 0$ stetige bzw. n–fach stetig differenzierbare Funktion $f(t)$ gilt, dass $f(0) = f(0+)$ bzw. $(\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}f)\vert_{t=0} = (\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}f)\vert_{t=0+}$.

Die Berechnung der Laplace–Transformation und insbesondere der inversen Transformation erfolgt im Allgemeinen nicht über die Beziehungen (A.2) bzw. (A.4) sondern typischerweise mit Hilfe geeigneter Korrespondenzentabellen unter Verwendung der genannten Eigenschaften der Transformation. Tabelle A.2 führt hierzu einige wichtige Korrespondenzen der Laplace–Transformation auf, die in verschiedenen Anwendungen (insbesondere zur Lösung von gewöhnlichen Differenzialgleichungen) von Bedeutung sind. Weitere und deutliche allgemeinere Korrespondenzen, u.a. für transzendente Funktionen in der Laplace–Variable s, sind beispielsweise [4] und den dort aufgeführten Referenzen zu entnehmen.

Nr.	$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{r-i\infty}^{r+i\infty} \hat{f}(s) e^{st} \mathrm{d}s,\ t > 0,\ r \geq \gamma$	$\hat{f}(s) = \int\limits_0^\infty f(t) e^{-st} \mathrm{d}t,\ \Re\{s\} = \sigma > \gamma$
1	$\delta(t)$	1
2	$\sigma(t)$ und 1	$\frac{1}{s}$
3	$t^n, \quad n = 1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
5	$\cos\omega_0 t$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
6	$\sin\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
7	$e^{-at}\cos\omega_0 t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
8	$e^{-at}\sin\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
9	$t\cos\omega_0 t$	$\frac{s^2-\omega_0^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
10	$t\sin\omega_0 t$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
11	$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
12	$e^{-at}+at-1$	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$

Tab. A.2.: Korrespondenzen der Laplace–Transformation.

Aufgabe 1.72. *Beweisen Sie die Gültigkeit der Korrespondenzen in Tabelle A.2. Nutzen Sie dabei ggf. die Eulerschen Formeln*

$$\sin(at) = \frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}, \quad \cos(at) = \frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}$$

und die Linearität der Laplace–Transformation.

Die explizite Bestimmung der inversen Laplace–Transformation bedingt im Allgemeinen die Analyse rationaler Funktionen in der Laplace–Variablen s. Hierzu können verschiedene Ansätze verfolgt werden, die sich beispielsweise die möglichst günstige Darstellung der rationalen Ausdrücke mittels *Partialbruchzerlegung* zu Nutze machen.

Satz 1.1: Partialbruchzerlegung
Sei

$$\hat{f}(s) = \frac{\hat{z}(s)}{\hat{n}(s)}$$

eine rationale Funktion in s mit den teilerfremden reellwertigen Polynomen $\hat{z}(s)$ und $\hat{n}(s)$ für die gilt, dass $\deg(\hat{z}(s)) \leq \deg(\hat{n}(s)) = n$. Zudem sei angenommen, dass das Nennerpolynom eine Faktorisierung in der Form

$$\hat{n}(s) = \prod_{j=1}^{p} \left(s - \lambda_j\right)^{k_j} \prod_{j=1}^{m} \left((s - \alpha_j)^2 + \beta_j^2\right)^{l_j}$$

erlaubt mit $n = \sum_{j=1}^{p} k_j + 2\sum_{j=1}^{m}$. Dann besitzt $\hat{f}(s)$ eine eindeutige Darstellung in der Form

$$\hat{f}(s) = c_0 + \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{k_j} \frac{c_{j,i}}{(s - \lambda_j)^i} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{l_j} \frac{d_{j,i} + e_{j,i} s}{\left((s - \alpha_j)^2 + \beta_j^2\right)^i} \qquad \text{(A.5)}$$

mit $c_0 = \lim_{s\to\infty} \hat{z}(s)/\hat{n}(s)$ und $c_{j,i},\ d_{j,i},\ e_{j,i} \in \mathbb{R}$. Man nennt (A.5) auch die Partialbruchzerlegung von $\hat{f}(s)$.

Die Koeffizienten in (A.5) können meist sehr leicht durch die Lösung eines linearen Gleichungssystems bestimmt werden. Die Bestimmung der Originalfunktion $f(t) = \mathscr{L}^{-1}(\hat{f}(s))$ erfolgt dann durch termweise Rücktransformation der einzelnen Summanden unter Ausnutzung der obigen Korrespondenzentabelle.

Beispiel 1.4. *Als Beispiel soll das Anfangswertproblem*

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} y(t) - 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) + 2y(t) = u(t), \qquad y(0) = 1,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(0) = -1$$

für $u(t) = t\sigma(t)$ mittels der Laplace–Transformation gelöst werden. Die Laplace–Transformierte der Differenzialgleichung lautet

$$s^2 \hat{y}(s) - (1)s - (-1) - 2\big(s\hat{y}(s) - (1)\big) + 2\hat{y}(s) = \hat{u}(s)$$

mit $\hat{u}(s) = 1/s^2$. Dies führt auf

$$\hat{y}(s) = \frac{s^2(s-3)+1}{s^2(s^2-2s+2)}.$$

Die entsprechende Partialbruchzerlegung errechnet sich somit aus

$$\hat{y}(s) = \frac{c_{1,1}}{s} + \frac{c_{1,2}}{s^2} + \frac{d_{1,1} + e_{1,1}s}{(s-1)^2+1}$$

mittels Koeffizientenvergleich zu

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right) + \frac{-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}s}{(s-1)^2+1}.$$

Die Rücktransformation in den Zeitbereich erfolgt über Tabelle A.2 und ergibt

$$y(t) = \frac{1}{2}\Big(1 + t + \mathrm{e}^{t}\big(\cos(t) - 4\sin(t)\big)\Big), \qquad t \geq 0.$$

Aufgabe 1.73. *Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion*

$$\hat{g}(s) = \frac{5s^4 - s^3 - 3s^2 - 6s - 3}{s^2(s^2 + s + 1)}.$$

Lösung 1.73. *Es gilt*

$$\hat{g}(s) = 5 - \frac{3}{s} - \frac{3}{s^2} - \frac{2 + 3s}{s^2 + s + 1}.$$

Eine Alternative zur Partialbruchzerlegung bietet beispielsweise der *Residuensatz*, der insbesondere nicht nur auf rationale Funktionen sondern auch transzendente Übertragungsfunktion anwendbar ist. Für entsprechende Ausführungen wird auf [2, S. 267–284] verwiesen.

Literatur

[1] G. Doetsch. *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace–Transformation*. München: R. Oldenbourg, 1961 (zitiert auf den Seiten A1, A2).

[2] G. Doetsch. *Handbuch der Laplace–Transformation I*. Birkhäuser, 1950 (zitiert auf Seite A6).

[3] O. Föllinger. *Laplace–, Fourier– und z–Transformation*. 10. Aufl. VDE Verlag, 2011 (zitiert auf den Seiten A1, A2).

[4] G.E. Roberts und H. Kaufman. *Table of Laplace Transforms*. W.B. Saunders Complany, 1966 (zitiert auf Seite A4).