

Prof. Dr.–Ing. habil. Thomas Meurer

Regelungstechnik I

Formelsammlung

Kapitel 2

Satz 2.1 (Lokale Existenz und Eindeutigkeit). *Es sei $f(\mathbf{x}, t)$ stückweise stetig in t und erfülle die Lipschitz-Bedingung*

$$\|f(\mathbf{x}_1, t) - f(\mathbf{x}_2, t)\| \leq L\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \quad 0 < L < \infty$$

für alle $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{B} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r\}$ für alle $t \in [t_0, t_0 + \tau]$. Dann existiert ein $\delta > 0$ so, dass

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t), \quad t > t_0, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

genau eine Lösung für $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ besitzt.

Kapitel 3

Zustands- und Ähnlichkeitstransformationen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reellwertige $n \times n$ -Matrix und seien n_k und g_k die algebraische und geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes λ_k von A .

Fall $n_k = g_k$ für alle $k = 1, \dots, m$: Sind für alle Eigenwerte die algebraische und geometrische Vielfachheit identisch, so spannen die Eigenvektoren der Matrix A den Raum \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n auf und bilden eine Eigenbasis von A .

- Jordansche Normalform:

$$\tilde{A} = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{bmatrix}, \quad A_k = \text{diag}(\{\lambda_k\}_{j=1, \dots, n_k}) = \begin{bmatrix} \lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_k \times n_k}$$

mit

$$V = [V_1 | V_2 | \dots | V_m]$$

$$V_k = [\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_2}, \dots, \mathbf{v}_{k_{g_k}}] \in \mathbb{C}^{n \times g_k}.$$

- Transitionsmatrix des transformierten Systems:

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \exp(\Lambda_1 t) & & & \\ & \exp(\Lambda_2 t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp(\Lambda_m t) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \exp(\Lambda_k t) = \text{diag}(\{\exp(\lambda_k t)\}_{j=1, \dots, n_k}).$$

Fall $n_k \neq g_k$ für mindestens ein $k = 1, \dots, m$: Ist für einen Eigenwert λ_k die geometrische Vielfachheit g_k echt kleiner als die algebraische Vielfachheit n_k , dann müssen zusätzlich zu den Eigenvektoren die entsprechenden Hauptvektoren berechnet werden. Ein Vektor \mathbf{v} heißt dabei Hauptvektor r -ter Stufe, wenn gilt

$$(A - \lambda E)^r \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \wedge \quad (A - \lambda E)^{r-1} \mathbf{v} \neq \mathbf{0}.$$

- Jordansche Normalform:

$$\tilde{A} = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_m \end{bmatrix}, \quad J_k = \lambda_k E + N_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_k \times n_k}$$

mit

$$V = [V_1 | V_2 | \dots | V_m]$$

$$V_k = [\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_1}^{(2)}, \dots, \mathbf{v}_{k_1}^{(l_1)}, \dots, \mathbf{v}_{k_{g_k}}, \mathbf{v}_{k_{g_k}}^{(2)}, \dots, \mathbf{v}_{k_{g_k}}^{(l_{g_k})}] \in \mathbb{C}^{n \times n_k},$$

l_k der Länge der Jordan-Kette und

$$N_k = \begin{bmatrix} N^{(1)} & & \\ & N^{(2)} & \\ & & \ddots \\ & & & N^{(g_k)} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad N^{(j)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

- Transitionsmatrix des transformierten Systems:

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \exp(J_1 t) & & \\ & \exp(J_2 t) & \\ & & \ddots \\ & & & \exp(J_m t) \end{bmatrix}$$

mit

$$\exp(J_k t) = \exp(\lambda_k t) \begin{bmatrix} \exp(N^{(1)} t) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(N^{(g_k)} t) \end{bmatrix}, \quad \exp(N^{(j)} t) = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{l_j-1}}{(l_j-1)!} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Reelle Jordansche Normalform

Satz 3.3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit r reellen und $(m-r)/2$ konjugiert komplexen Eigenwerten. Dann existiert eine Ähnlichkeitstransformation mit der Transformationsmatrix

$$V = [V_1 | \dots | V_r | \Re(\mathbf{v}_{(k+1)_1}), \Im(\mathbf{v}_{(k+1)_1}), \Re(\mathbf{v}_{(k+1)_1}^{(2)}), \Im(\mathbf{v}_{(k+1)_1}^{(2)}), \dots] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

bestehend aus linear unabhängigen (komplexwertigen) Eigen- und Hauptvektoren mit

$$V_k = [\mathbf{v}_{k_1}, \mathbf{v}_{k_1}^{(2)}, \dots, \mathbf{v}_{k_1}^{(l_1)}, \dots, \mathbf{v}_{k_{g_k}}, \mathbf{v}_{k_{g_k}}^{(2)}, \dots, \mathbf{v}_{k_{g_k}}^{(l_{g_k})}] \in \mathbb{R}^{n \times n_k}$$

so, dass die transformierte Matrix die Form

$$\tilde{A} = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_l \end{bmatrix}$$

annimmt. Hierbei bezeichnen J_k die Jordan-Blöcke, deren Struktur für reelle Eigenwerte durch

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}$$

bzw. für konjugiert komplexe Eigenwerte $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ in der Form

$$J_k = \begin{bmatrix} W & E_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & W & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & W & E_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & W \end{bmatrix}$$

mit

$$W = \begin{bmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ -\beta_k & \alpha_k \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gegeben ist.

Es gilt zudem, dass

$$\exp(Wt) = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} \cos(\beta t) & e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\ -e^{\alpha t} \sin(\beta t) & e^{\alpha t} \cos(\beta t) \end{bmatrix}.$$

Kapitel 4

Realisierungsproblem und kanonische Formen

Nachfolgend werden zwei *kanonische Minimalrealisierungen* der Übertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{\hat{z}(s)}{\hat{n}(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{n-1} s^{n-1} + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}$$

angegeben, wobei vorausgesetzt wird, dass $\hat{z}(s)$ und $\hat{n}(s)$ teilerfremd sind und das Nennerpolynom $\hat{n}(s)$ *monisch* ist, d.h. der Koeffizient der höchsten Potenz ist 1.

- 1. Standardform oder Regelungsnormalform

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{=\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{=\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{b}} u, \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$y = \underbrace{[\bar{b}_0 \ \bar{b}_1 \ \cdots \ \bar{b}_{n-1}]}_{=\mathbf{c}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{=\mathbf{x}} + \underbrace{b_n}_{=d} u, \quad t \geq 0.$$

mit $\bar{b}_j = b_j - b_n a_j$, $j = 0, 1, \dots, n-1$.

- 2. Standardform oder Beobachtungsnormalform

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{=\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{=A^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{=\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{b}_0 \\ \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_{n-2} \\ \bar{b}_{n-1} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{c}} u, \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$y = \underbrace{[0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]}_{=\mathbf{b}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{=\mathbf{x}} + \underbrace{b_n}_{=d} u, \quad t \geq 0.$$

mit $\bar{b}_j = b_j - b_n a_j$, $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Kapitel 5

Routh–Hurwitz Kriterium

Satz 5.3. Ein Polynom der Form

$$\hat{n}(s) = \sum_{j=0}^n a_j s^j$$

mit den reellen Koeffizienten a_j , $j = 0, 1, \dots, n$ ist genau dann eine Hurwitz–Polynom, wenn alle Elemente der Pivotspalte des nachfolgenden Routh–Schemas

$$\begin{array}{l} s^n \\ s^{n-1} \\ s^{n-2} \\ s^{n-3} \\ \vdots \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \left| \begin{array}{cccc} a_{0,1} = a_n & a_{0,2} = a_{n-2} & a_{0,3} = a_{n-4} & \dots \\ a_{1,1} = a_{n-1} & a_{1,2} = a_{n-3} & a_{1,3} = a_{n-5} & \dots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n-1,1} & 0 & 0 & \dots \\ a_{n,1} & & & \end{array} \right.$$

mit

$$a_{i,j} = \frac{a_{i-1,1}a_{i-2,j+1} - a_{i-2,1}a_{i-1,j+1}}{a_{i-1,1}} \quad \text{für } i = 2, 3, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots$$

von Null verschieden sind und identisches Vorzeichen besitzen.

Michailov–Kriterium

Satz 5.4. Ein Polynom $\hat{n}(s)$ vom Grad n ist genau dann ein Hurwitz–Polynom, wenn gilt

$$\Delta \arg(\hat{n}(i\omega)) = n\pi.$$

Nyquist–Kriterium

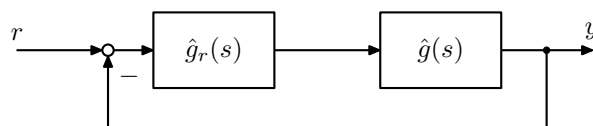


Abb. 5.1: Regelkreis mit einem Freiheitsgrad.

Satz 5.5. Der geschlossene Regelkreis $\hat{t}_{r,y}(s)$ nach Abbildung 5.1 mit der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises $\hat{l}(s)$ ist genau dann eingangs–ausgangs–stabil, wenn die stetige Winkeländerung von $1 + \hat{l}(s)$ die Bedingung

$$\Delta \arg((1 + \hat{l}(i\omega))) = [\max\{\deg \hat{z}_i(s), \deg \hat{n}_i(s)\} - N_-(\hat{n}_i(s)) + N_+(\hat{n}_i(s))] \pi$$

erfüllt.

Satz 5.6 (Generalisiertes Nyquist–Kriterium). Der geschlossene Regelkreis $\hat{t}_{r,y}(s)$ nach Abbildung 5.1 mit der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises $\hat{l}(s)$ ist genau dann eingangs–ausgangs–stabil, wenn

$$(i) \quad 1 + \hat{l}(s) \neq 0, \quad \forall s \in \overline{N}_\infty \text{ und}$$

(ii) $(1 + \hat{l}(s))|_{s \in \overline{N}_\infty}$ den Ursprung $N_+(\hat{l}(s))$ -fach im Gegenuhrzeigersinn umläuft, wobei $N_+(\hat{l}(s))$ die Anzahl der (isolierten) Polstellen des offenen Regelkreises $\hat{l}(s)$ in der rechten offenen komplexen Halbebene bezeichnet, d.h.

$$\text{ind}(1 + \hat{l}(s)) = N_+(\hat{l}(s))$$

mit den so genannten Nyquist–Index

$$\text{ind}(\hat{g}(s)) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\omega \rightarrow \infty} [\arg(\hat{g}(i\omega)|_{\omega \in \overline{N}_\infty}) - \arg(\hat{g}(-i\omega)|_{\omega \in \overline{N}_\infty})].$$

Regelungsentwurf mit dem Frequenzkennlinienverfahren

Satz 5.7 (Nyquist–Kriterium im Frequenzkennliniendarstellung). Es sei angenommen, dass sich die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises $\hat{l}(s)$ in der Form

$$\hat{l}(s) = \frac{V \hat{z}_i(s)}{s^\rho \hat{n}_i(s)} e^{-sT_t}, \quad \hat{z}_i(0) = \hat{n}_i(0) = 1$$

mit den teilerfremden Polynomen $\hat{z}_i(s)$ und $s^\rho \hat{n}_i(s)$ darstellen lässt, wobei die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) der Verstärkungsfaktor V und die Totzeit T_t sind positiv

(ii) es gilt $\deg(\hat{n}_i(s)) + \rho > \deg(\hat{z}_i(s))$,

(iii) das Polynom $\hat{n}_i(s)$ ist ein Hurwitz–Polynom und $\rho \in \{0, 1, 2\}$,

(iv) die Betragskennlinie von $\hat{l}(i\omega)$ weist genau einen Schnittpunkt mit der 0 dB Linie (genau eine Durchtrittsfrequenz ω_c) auf bzw. die Ortskurve $\hat{l}(i\omega)$ schneidet den Einheitskreis genau einmal und

(v) im Bereich $|\hat{l}(i\omega)|_{dB} \geq 0$ gelte $-540^\circ < \arg(\hat{l}(i\omega)) < 180^\circ$, d.h. die Ortskurve des offenen Regelkreises $\hat{l}(s)$ kann vor ihrem Eintauchen in den Einheitskreis den Ursprung höchstens einmal vollständig umkreisen.

Unter diesen Voraussetzungen ist der Regelkreis aus Abbildung 5.1 mit der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises $\hat{l}(s)$ genau dann eingangs–ausgangs–stabil, wenn der Abstand der Phase an der Durchtrittsfrequenz $\arg(\hat{l}(i\omega_c))$ zu $-\pi$, die so genannte Phasenreserve ϕ ,

$$\phi = \arg(\hat{l}(i\omega_c)) + \pi$$

positiv ist.

Vorgehen beim Entwurf mit dem Frequenzkennlinienverfahren

1. Für gegebene Streckenübertragungsfunktion $\hat{g}(s)$ müssen die Kenngrößen t_r , M oder \ddot{u} und e_∞ zur Charakterisierung des Einschwingverhaltens des geschlossenen Regelkreises spezifiziert werden.
2. Die Kenngrößen t_r , M oder \ddot{u} und e_∞ werden mit Hilfe der Näherungsbeziehungen in Vorgaben an den Frequenzgang des offenen Regelkreises $\hat{l}(s)$ übertragen.
3. Der Regler $\hat{g}_r(s)$ ist so auszulegen, dass der geschlossene Regelkreis eingangs–ausgangs–stabil ist und die Forderungen aus 2. erfüllt sind. Die Stabilitätsanalyse kann mittels Satz 5.7 durch Überprüfung der Phasenreserve ϕ erfolgen, wenn $\hat{l}(s) = \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)$ die dort formulierten Voraussetzungen erfüllt, oder mittels des Nyquistkriteriums aus Satz 5.5 bzw. 5.6.
4. Zur Vermeidung eines kriechenden Einlaufens der Sprungantwort in den stationären Endwert soll der Regler $\hat{g}_r(s)$ in 3. so entworfen werden, dass ca. 1 Dekade um die Durchtrittsfrequenz ω_c die Betragskennlinie von $\hat{l}(s)$ mit mindestens 20 dB/Dekade abfällt.
5. Da der Entwurf auf empirischen Beziehungen basiert, ist die Qualität des Reglerentwurfs immer durch numerische Simulationen zu überprüfen. Falls kein zufriedenstellendes Ergebnis erzielt wird, dann ist zu überprüfen, ob die in 1. spezifizierten Anforderungen überhaupt prinzipiell erfüllbar sind, oder ob die Verwendung eines anderen Reglers in 3. die Ergebnisse verbessern würde.
6. Es ist zu beachten, dass eine Begrenzung der maximalen Stellgröße $u(t)$, die bei jedem technischen Prozess vorhanden ist, im Rahmen dieses einfachen Entwurfsverfahrens nicht explizit berücksichtigt werden kann. Eine diesbezügliche Analyse kann durch die numerische Simulation des geschlossenen Regelkreises erfolgen. Bei Überschreiten der maximal zulässigen Stellgröße müssen die Anforderungen aus 1. entsprechend verändert werden, wobei insbesondere die Anstiegszeit t_r zu vergrößern ist. Zudem sollte im Rahmen einer Führungsregelung niemals eine Sprungfunktion sondern immer eine hinreichend glatte Referenztrajektorie $r(t)$ verwendet werden.

Lead–Lag–Reglerentwurf

- Die Übertragungsfunktion eines Lead–Gliedes lautet

$$\hat{g}(s) = V \frac{1 + Ts}{1 + T\eta s}, \quad 0 < \eta < 1, \quad T > 0.$$

Will man eine maximale Phasenhebung von $\Delta\varphi$ an der Stelle ω_c erreichen, dann berechnen sich die Koeffizienten gemäß

$$\eta = 1 + 2 \tan(\Delta\varphi) \left(\tan(\Delta\varphi) - \sqrt{\tan^2(\Delta\varphi) + 1} \right)$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{\eta}\omega_c}.$$

- Die Übertragungsfunktion eines Lag–Gliedes lautet

$$\hat{g}(s) = V \frac{1 + Ts}{1 + T\eta s}, \quad \eta > 1, \quad T > 0.$$

Will man eine Betragsabsenkung um ΔA und eine Phasenabsenkung um $\Delta\varphi$ an der Stelle ω_c erreichen, dann berechnen sich die Koeffizienten gemäß

$$T = \frac{\Delta A \sqrt{1 + \tan^2(\Delta\varphi)} - 1}{\omega_c \tan(\Delta\varphi)}$$

$$\eta = \frac{\omega_c T - \tan(\Delta\varphi)}{\omega_c T (1 + \omega_c T \tan(\Delta\varphi))}.$$

Polvorgabe für den Regelkreis mit einem Freiheitsgrad

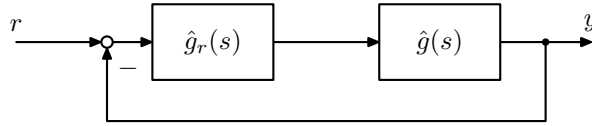


Abb. 5.2: Regelkreis mit einem Freiheitsgrad.

Es gilt für die realisierbaren Übertragungsfunktionen von Strecke und Regler

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{z}(s)}{\hat{n}(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \cdots + b_{n-1}s^{n-1} + b_ns^n}{a_0 + a_1s + \cdots + a_{n-1}s^{n-1} + a_ns^n}, \quad a_n \neq 0$$

und

$$\hat{g}_r(s) = \frac{\hat{z}_r(s)}{\hat{n}_r(s)} = \frac{d_0 + d_1s + \cdots + d_{m-1}s^{m-1} + d_ms^m}{c_0 + c_1s + \cdots + c_{m-1}s^{m-1} + c_ms^m}, \quad c_m \neq 0$$

mit den teilerfremden Polynomen $(\hat{z}(s), \hat{n}(s))$ und $(\hat{z}_r(s), \hat{n}_r(s))$.

Satz 5.11 (Polvorgabe mit einem Freiheitsgrad). Gegeben ist der Regelkreis mit einem Freiheitsgrad gemäß Abbildung 5.2 mit der strikt properen Streckenübertragungsfunktion der Ordnung n

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{z}(s)}{\hat{n}(s)}, \quad \deg(\hat{z}(s)) < \deg(\hat{n}(s)) = n$$

und den teilerfremden Polynomen $\hat{z}(s)$ und $\hat{n}(s)$. Dann existiert zu jedem Polynom $\hat{f}(s)$ mit $\deg(\hat{f}(s)) = 2n - 1$ eine Lösung $(\hat{z}_r(s), \hat{n}_r(s))$ der Diophantischen Gleichung

$$\hat{z}(s)\hat{z}_r(s) + \hat{n}(s)\hat{n}_r(s) = \hat{f}(s)$$

so, dass für die Übertragungsfunktion des Reglers $\hat{g}_r(s)$ gilt

$$\hat{g}_r(s) = \frac{\hat{z}_r(s)}{\hat{n}_r(s)}, \quad \deg(\hat{z}_r(s)) \leq \deg(\hat{n}_r(s)) = n - 1.$$

Sei $\hat{f}(s)$ ein Polynom vom Grad p , d.h.

$$\hat{f}(s) = f_0 + f_1s + \cdots + f_{p-1}s^{p-1} + f_ps^p, \quad f_p \neq 0.$$

dann können die Koeffizienten des Reglers aus der Resultante R gemäß

$$\underbrace{\begin{bmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & b_0 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_n & b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & b_1 & a_1 \\ \vdots & \vdots & b_n & a_n & \cdots & b_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n & a_n \end{bmatrix}}_{= R} \begin{bmatrix} d_0 \\ c_0 \\ d_1 \\ c_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{2n-2} \\ f_{2n-1} \end{bmatrix}.$$

bestimmt werden.

Kapitel 6

Kalmansche Steuerbarkeitsmatrix

$$S(A, B) = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$$

Kalmansche Beobachtbarkeitsmatrix

$$O(C, A) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

PBH–Eigenvektortest

Gegeben ist das System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, & t > 0, & & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u}, & t \geq 0 \end{aligned}$$

der Ordnung n . Sei $\mathbf{v}_{k_j}^T \neq \mathbf{0}^T$ Linkseigenvektor von A zum Eigenwert λ_k mit geometrischer Vielfachheit g_k und sei $\mathbf{v}_{k_j} \neq \mathbf{0}$ Rechtseigenvektor von A zum Eigenwert λ_k mit geometrischer Vielfachheit g_k .

- Das System bzw. das Paar (A, B) ist genau dann vollständig steuerbar, wenn für alle k aus der Bedingung

$$\left(\alpha_1 \mathbf{v}_{k_1}^T + \dots + \alpha_{g_k} \mathbf{v}_{k_{g_k}}^T \right) B = \mathbf{0}^T$$

folgt, dass $\alpha_1 = \dots = \alpha_{g_k} = 0$.

- Das System bzw. das Paar (C, A) ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn für alle k aus der Bedingung

$$C \left(\alpha_1 \mathbf{v}_{k_1} + \dots + \alpha_{g_k} \mathbf{v}_{k_{g_k}} \right) = \mathbf{0}$$

folgt, dass $\alpha_1 = \dots = \alpha_{g_k} = 0$.

PBH–Rangtest

Das System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, & t > 0, & & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u}, & t \geq 0 \end{aligned}$$

der Ordnung n ist genau dann

- vollständig steuerbar, wenn

$$\text{rang} [sE - A \quad B] = n \quad \text{für alle } s \in \mathbb{C}.$$

- vollständig beobachtbar, wenn

$$\text{rang} \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad \text{für alle } s \in \mathbb{C}.$$

Satz von Cayley–Hamilton

Satz 6.1. Jede quadratische $(n \times n)$ -Matrix A erfüllt ihr charakteristisches Polynom. Sei $p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$, dann gilt

$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0E = \mathcal{O}$$

mit \mathcal{O} der $(n \times n)$ -Nullmatrix.

Regelungsentwurf in Regelungsnormalform

Satz 6.14 (Ackermann–Formel im Eingrößenfall). Gegeben ist das System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, & t > 0, & & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} + du, & t \geq 0. & & & \end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Dynamikmatrix $A_g = A - \mathbf{b}\mathbf{k}^T$ des geschlossenen Regelkreises

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \underbrace{(A - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)}_{= A_g} \mathbf{x} + \mathbf{b}hr, & t > 0, & & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y &= (\mathbf{c}^T - d\mathbf{k}^T) \mathbf{x} + dhr, & t \geq 0 & & & \end{aligned}$$

können genau dann durch eine Zustandsrückführung

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} + hr$$

beliebig platziert werden, wenn das Paar (A, \mathbf{b}) vollständig steuerbar ist. In diesem Fall berechnet sich der Rückführvektor nach der Formel

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{w}^T (p_0 E + p_1 A + \dots + p_{n-1} A^{n-1} + A^n), \quad \mathbf{w}^T = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1] S^{-1}(A, \mathbf{b}) \quad (6.2)$$

mit p_j , $j = 0, 1, \dots, n-1$, den Koeffizienten des gewünschten charakteristischen Polynoms der Matrix A_g .

Um zu erreichen, dass gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y - r = y_\infty - r_\infty = 0$$

mit r_∞ , dem stationären Wert der Führungsgröße, ist der Vorfilterfaktor h gemäß

$$h = \frac{1}{d - (\mathbf{c}^T - d\mathbf{k}^T)(A - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)^{-1} \mathbf{b}}.$$

zu wählen.

Beobachterentwurf in Beobachtungsnormalform

Satz 6.16 (Ackermann-Formel für den Zustandsbeobachterentwurf im Eingrößenfall). Gegeben ist das System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, & t > 0, & & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} + du, & t \geq 0. & & & \end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Dynamikmatrix $A_b = A - \mathbf{l}\mathbf{c}^T$ der Beobachterfehlerdynamik

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \underbrace{(A - \mathbf{l}\mathbf{c}^T)}_{= A_b} \tilde{\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0.$$

eines vollständigen Luenberger-Beobachters der Form

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= A\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{l}(y - \hat{y}), & \hat{\mathbf{x}}(0) &= \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{y} &= \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}} + du \end{aligned}$$

können genau dann durch \mathbf{l} beliebig platziert werden, wenn das Paar (\mathbf{c}^T, A) vollständig beobachtbar ist. In diesem Fall berechnet sich der Beobachterkorrekturvektor nach der Formel

$$\mathbf{l} = (\hat{p}_0 E + \hat{p}_1 A + \dots + \hat{p}_{n-1} A^{n-1} + A^n) \hat{\mathbf{w}}, \quad \hat{\mathbf{w}} = O^{-1}(\mathbf{c}^T, A) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

mit \hat{p}_j , $j = 0, 1, \dots, n-1$, den Koeffizienten des gewünschten charakteristischen Polynoms

$$\hat{p}^*(\lambda) = \hat{p}_0 + \hat{p}_1 \lambda + \dots + \hat{p}_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n = \prod_{j=1}^n (\lambda - \hat{\lambda}_j^*) \quad (6.4)$$

der Matrix A_b .

Vorsteuerungsentwurf in Regelungsnormalform

Satz 6.18. Gegeben ist das System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, & t > 0, & & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} + du, & t \geq 0. & & & \end{aligned}$$

Sei das Paar (A, \mathbf{b}) vollständig steuerbar und sei $\zeta^*(t) \in C^n(\mathbb{R})$. Dann ist $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t)$ mit

$$\mathbf{x}^* = W^{-1} \begin{bmatrix} \zeta^* \\ \frac{d}{dt} \zeta^* \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \zeta^* \end{bmatrix}$$

und

$$W = \begin{bmatrix} \mathbf{w}^T \\ \mathbf{w}^T A \\ \vdots \\ \mathbf{w}^T A^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}^T = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1] S^{-1}(A, \mathbf{b})$$

Lösung der Zustandsdifferenzialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^*(0)$ für die Einganggröße $u(t) = u^*(t)$ mit

$$u^* = -\mathbf{w}^T \mathbf{A}^n \mathbf{x}^* + \frac{d^n}{dt^n} \zeta^*.$$

Für die Ausganggröße gilt in diesem Fall $y(t) = y^*(t)$ mit

$$y^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* + du^*.$$

Folgeregelungsentwurf in Regelungsnormalform

Satz 6.19. Gegeben ist das System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, & t > 0, & & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} + du, & t \geq 0. & & & \end{aligned}$$

Sei das Paar (\mathbf{A}, \mathbf{b}) vollständig steuerbar und sei $\zeta^*(t) \in C^n(\mathbb{R})$. Ferner bezeichne $\zeta^*(t)$ den Vektor

$$\zeta^* = \begin{bmatrix} \zeta^* \\ \frac{d}{dt} \zeta^* \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \zeta^* \end{bmatrix}$$

Dann können die Eigenwerte des Folgefehlersystems

$$\dot{\mathbf{e}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_{n-1} \end{bmatrix}}_{= A_e} \mathbf{e}, \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}_0.$$

im Zustand

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{w}^T \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{w}^T \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{x} \end{bmatrix} - \zeta^*$$

mit der Zustandsrückführung

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} + \mathbf{p}^T \zeta^* + \frac{d^n}{dt^n} \zeta^*$$

beliebig platziert werden. In diesem Fall berechnet sich der Rückführvektor nach der Formel

$$\mathbf{k}^T = \mathbf{w}^T (p_0 \mathbf{E} + p_1 \mathbf{A} + \dots + p_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{A}^n), \quad \mathbf{w}^T = [0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 1] S^{-1}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$$

mit dem Vektor

$$\mathbf{p}^T = [p_0 \ p_1 \ \cdots \ p_{n-1}],$$

der die Koeffizienten p_j , $j = 0, 1, \dots, n-1$, des gewünschten charakteristischen Polynoms zusammenfasst.

Appendix

Eigenschaften und Rechenregeln der Laplace-Transformation

Laplace-Integral	$\mathcal{L}(f(t)) = \hat{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$	$(\Re\{s\} = \sigma > \gamma)$
Umkehr-Integral	$\mathcal{L}^{-1}(\hat{f}(s)) = f(t) _{t>0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} \hat{f}(s)e^{st} ds$	$(r > \gamma)$
Linearität	$\mathcal{L}(k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)) = k_1 \mathcal{L}(f_1(t)) + k_2 \mathcal{L}(f_2(t)),$ $\mathcal{L}^{-1}(k_1 \hat{f}_1(s) + k_2 \hat{f}_2(s)) = k_1 \mathcal{L}^{-1}(\hat{f}_1(s)) + k_2 \mathcal{L}^{-1}(\hat{f}_2(s))$	$(k_{1,2} \text{ beliebig})$
Maßstabsänderung	$\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$	$(a \in \mathbb{R}^+)$
Zeitverschiebung	$\mathcal{L}(\sigma(t-b)f(t-b)) = e^{-bs} \hat{f}(s)$	$(b \in \mathbb{R}^+)$
Frequenzverschiebung	$\mathcal{L}^{-1}(\hat{f}(s \pm c)) = e^{\mp ct} f(t)$	$(c \in \mathbb{C})$
Integration	$\mathcal{L}\left(\int_0^t \dots \int_0^t f(\tau) d\tau^n\right) = \frac{1}{s^n} \hat{f}(s)$	
Gewöhnliche Differentiation ¹	$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n \hat{f}(s) - s^{n-1} f(0+) - \dots - f^{(n-1)}(0+)$	
Differentiation der Bildfunktion	$\mathcal{L}^{-1}(\hat{f}^{(n)}(s)) = (-1)^n t^n f(t)$	
Faltungsintegral	$\mathcal{L}^{-1}(\hat{f}_1(s)\hat{f}_2(s)) = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau) d\tau = f_1(t) \star f_2(t)$	
Grenzwertsätze	<ul style="list-style-type: none"> • Anfangswert-Satz¹ $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} s \hat{f}(s) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$ • Endwert-Satz, Voraussetzung: $\exists f(t \rightarrow \infty)$ $\lim_{s \rightarrow 0} s \hat{f}(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ 	

Korrespondenzen der Laplace-Transformation

Nr.	$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} \hat{f}(s)e^{st} ds, t > 0, r \geq \gamma$	$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \Re\{s\} = \sigma > \gamma$
1	$\delta(t)$	1
2	$\sigma(t)$ und 1	$\frac{1}{s}$
3	$t^n, n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
5	$\cos \omega_0 t$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
6	$\sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
7	$e^{-at} \cos \omega_0 t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
8	$e^{-at} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
9	$t \cos \omega_0 t$	$\frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$
10	$t \sin \omega_0 t$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$
11	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
12	$e^{-at} + at - 1$	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$

Einige trigonometrische Beziehungen

$\sin(0) = 0$	$\cos(0) = 1$	$\tan(0) = 0$
$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$	$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$	$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$
$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$
$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$	$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$	$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 + \sqrt{3}$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty$