Prof. Dr.–Ing. habil. Thomas Meurer, Lehrstuhl für Regelungstechnik

Aufgabe 1. Gegeben ist ein lineares zeitinvariantes System Σ_p in der Zustandsdarstellung

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_p + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_p, \qquad t > 0,\ \boldsymbol{x}_p(0) = \boldsymbol{x}_{p0}, \tag{8.1a}$$

$$y_p = \begin{bmatrix} a & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_p, \qquad t \geq 0, \tag{8.1b}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ gilt.

(i) Untersuchen Sie die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des Systems Σ_p und des dazu dualen Systems Σ_d.

(ii) Transformieren Sie beide Systeme auf Diagonalform.

(iii) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des primalen Systems $\hat{g}_p(s)$ und die des dualen Systems $\hat{g}_d(s)$ aus den Jordanschen Normalformen.

(iv) Interpretieren Sie die bezüglich der Steuerbarkeit/Beobachtbarkeit erhaltenen Ergebnisse anhand der Übertragungsfunktionen.

Aufgabe 2. Gegeben ist ein durch die konstante Störung d gestörtes lineares zeitinvariantes System der Form

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} d, \qquad t > 0,\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{8.2a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}, \qquad t \geq 0. \tag{8.2b}$$

Entwerfen Sie eine PI-Zustandsregelung so, dass der geschlossene Regelkreis mit der Führungsgröße $r(t) = \overline{r}\sigma(t)$ stationär genau ist und alle Eigenwerte der Dynamikmatrix des geregelten Systems bei $\lambda^*_{1,2} = -5$ liegen.

Aufgabe 3. Für das lineare zeitinvariante System mit der Zustandsdarstellung

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad t > 0,\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{8.3a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}, \qquad t \geq 0, \tag{8.3b}$$

soll ein vollständiger Luenberger–Beobachter entworfen werden.

Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

(i) Weisen Sie die vollständige Beobachtbarkeit des Systems nach.

(ii) Transformieren Sie das System auf Beobachtungsnormalform. Nutzen Sie dafür die für die Ähnlichkeitstransformation gegebene Transformationsmatrix

$$V = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(iii) Entwerfen Sie einen vollständigen Luenberger-Beobachter in transformierten Koordinaten. Die Fehlerdynamikmatrix soll die Eigenwerte $\lambda^*_{1,2} = -1 \pm \mathrm{i}$ und $\lambda^*_3 = -2$ aufweisen.

(iv) Transformieren Sie den berechneten Beobachterkorrekturvektor $\boldsymbol{l}$ zurück in die Originalkoordinaten.

(v) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis für $\boldsymbol{l}$ mit Hilfe der Formel von Ackermann.

Lösung 1 (Zu Aufgabe: 1). Zunächst wird zu dem gegebenen LTI-System

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}_p &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{bmatrix}}_{A_p} \boldsymbol{x}_p + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}_p} u_p, && t > 0,\ \boldsymbol{x}_p(0) = \boldsymbol{x}_{p0}, \\
y_p &= \underbrace{\begin{bmatrix} a & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{c}_p^T} \boldsymbol{x}_p, && t \geq 0,
\end{aligned}
$$

das duale System aufgestellt

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}_d &= A_d \boldsymbol{x}_d + \boldsymbol{b}_d u_d, && t > 0,\ \boldsymbol{x}_d(0) = \boldsymbol{x}_{d0}, \\
y_d &= \boldsymbol{c}_d^T \boldsymbol{x}_d, && t \geq 0.
\end{aligned}
$$

Hierfür gilt der Zusammenhang

$$
A_d = A_p^T \qquad b_d = c_p \qquad c_d^T = b_p^T.
$$

(i) Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

(a) **Primales System**
Die Kalmansche Steuerbarkeitsmatrix für das primale System lautet

$$
S_p(A_p, \boldsymbol{b}_p) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_p & A_p \boldsymbol{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Das System ist offensichtlich vollständig steuerbar.

Aus der Kalmanschen Beobachtbarkeitsmatrix für das primale System

$$
O_p(A_p, \boldsymbol{c}_p^T) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_p^T \\ \boldsymbol{c}_p^T A_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ a^2 & a \end{bmatrix}
$$

kann sofort abgeleitet werden, dass das System nicht beobachtbar ist.

(b) **Duales System**
Die Kalmansche Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsmatrix lauten für das duale System

$$
S_d(A_d, \boldsymbol{b}_d) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_d & A_d \boldsymbol{b}_d \end{bmatrix}
$$

und

$$
O_d(A_d, \boldsymbol{c}_d^T) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_d^T \\ \boldsymbol{c}_d^T A_d \end{bmatrix}.
$$

Wird die Beziehung zwischen primalen und dualen System eingesetzt, ergeben sich

$$
S_d(A_d, \boldsymbol{b}_d) = O_p^T(A_p, \boldsymbol{c}_p^T)
$$

und

$$O_d(A_d, \boldsymbol{c}_d^T) = S_p^T(A_p, \boldsymbol{b}_p).$$

Das duale System ist folglich nicht steuerbar, aber beobachtbar.

(ii) Transformation in Diagonalform

(a) **Primales System**
Die Eigenwerte des Systems ergeben sich zu $\lambda_{1,2} = \pm a$.

Mit

$$(\lambda_i E - A_p)\boldsymbol{v}_{p,i} = 0$$

werden die Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_{p,1} = \begin{bmatrix}1 & a\end{bmatrix}^T$ und $\boldsymbol{v}_{p,2} = \begin{bmatrix}1 & -a\end{bmatrix}^T$ des Systems berechnet.

Die Transfomationsmatrix wird mit den Eigenvektoren aufgestellt

$$V = \begin{bmatrix}1 & 1\\ a & -a\end{bmatrix}.$$

Für die Transformation in Diagonalform wird zusätzlich ihre Inverse

$$V^{-1} = \frac{1}{2a}\begin{bmatrix}a & 1\\ a & -1\end{bmatrix}$$

benötigt.

Mit $\boldsymbol{x} = V\boldsymbol{z}$ ergeben sich die Transormierten Systemmatrizen

$$\tilde{A}_p = V^{-1}AV = \begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & -a\end{bmatrix}$$
$$\tilde{\boldsymbol{c}}_p^T = \boldsymbol{c}_p^T V = \begin{bmatrix}2a & 0\end{bmatrix}$$
$$\tilde{\boldsymbol{b}}_p = V^{-1}\boldsymbol{b}_p = \frac{1}{2a}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

(b) **Duales System**
Die Eigenwerte des dualen Systems entsprechen den Eigenwerten des primalen Systems und müssen daher nicht erneut bestimmt werden.

Analog zum primalen System werden die Eigenvektoren des dualen Systems $\boldsymbol{v}_{d1} = \begin{bmatrix}a & 1\end{bmatrix}^T$ und $\boldsymbol{v}_{d2} = \begin{bmatrix}-a & 1\end{bmatrix}^T$ durch die Lösung des Eigenwertproblems

$$(\lambda_i E - A)\boldsymbol{v}_{di} = \boldsymbol{0}$$

bestimmt.

Mit $\boldsymbol{x}_d = W\boldsymbol{z}_d$, wobei

$$W = \begin{bmatrix}a & -a\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

gilt, werden die Matrizen des dualen Systems in Diagonalform transformiert

$$\tilde{A}_d = W^{-1} A W = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$$
$$\tilde{\boldsymbol{c}}_d^T = \boldsymbol{c}_d^T W = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\tilde{\boldsymbol{b}}_d = W^{-1} \boldsymbol{b}_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(iii) Bestimmung der Übertragungsfunktionen

(a) **Primales System**
Die Übertragungsfunktion des primalen Systems

$$\hat{g}_p(s) = \tilde{\boldsymbol{c}}_p^T \left(sE - \tilde{A}_p\right)^{-1} \tilde{\boldsymbol{b}}_p = \frac{1}{s-a}$$

hat nur den Rang 1, während das System in Zustandsraumdarstellung die Dimension 2 hat. Es findet folglich eine Pol-/Nullstellenkürzung statt.

(b) **Duales System**
Zur Berechnung der Übetragungsfunktion des dualen Systems wird die Definitionsgleichung betrachtet

$$\hat{g}_d(s) = \boldsymbol{c}_d^T (sE - A_d)^{-1} \boldsymbol{b}_d$$

und die Beziehung zwischen primalen und dualen eingesetzt

$$\hat{g}_d(s) = \left(\boldsymbol{c}_p^T \left(sE - A_p\right)^{-1} \boldsymbol{b}_p\right)^T = \hat{g}_p^T(s).$$

Für dieses System muss folglich $\hat{g}_p(s) = \hat{g}_d(s)$ gelten.

(c) Alternativer Bestimmungsweg
Die Transitionsmatrix von A

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \exp(at) & 0 \\ 0 & \exp(-at) \end{bmatrix}$$

des Systems kann in Jordanscher Normalform leicht direkt bestimmt werden. Mit ihre Laplace-Transformierten

$$\hat{\Phi}(s) = (sE - \tilde{A}_p)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+a} \end{bmatrix},$$

die Resolvente genannt wird, kann die Übertragungsfunktion ohne Aufwand berechnet werden

$$\hat{g}_p(s) = \tilde{\boldsymbol{c}}_p^T \hat{\Phi}(s) \tilde{\boldsymbol{b}}_p = \frac{1}{s-a}.$$

(iv) Interpretation
Da das System nicht vollständing steuer- und beobachtbar ist, entspricht der Nennergrad der

Übertragungsfunktion nicht der Systemdimension. Welcher der beiden Eigenschaften nicht erfüllt ist, kann mit Hilfe der Übertragungsfunktion nicht nachgewiesen werden.

Lösung 2 (Zu Aufgabe: 2). Um einen PI-Zustandsregler für das System

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}}_{A} \boldsymbol{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}} u + \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{f}} d, \qquad t > 0,\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0,$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{c}^T} \boldsymbol{x}, \qquad t \geq 0.$$

zu entwerfen, wird zunächst der Ausgangsfehler

$$e = r - y = r - \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$

auf Basis der Führungsgröße r und des Ausangs y definiert. Da es mit dem Ansatz

$$u = -\boldsymbol{k}^T \boldsymbol{x} + hr$$

nicht möglich ist den endgüligen Fehler (für konstante r) verschwinden zu lassen, wird der Ansatz

$$u = -\boldsymbol{k}^T \boldsymbol{x} + V_I \int_0^t e \, \mathrm{d}\tau + V_P e$$

gewählt. Um diese Stellgesetz zu ermöglichen wird der neue Zustand $\dot{x}_I = e$ eingeführt, sodass das Stellgesetz durch

$$\begin{aligned} u &= \begin{bmatrix} -\boldsymbol{k}^T & V_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ x_I \end{bmatrix} + V_P e \\ &= \begin{bmatrix} -\left(\boldsymbol{k}^T + V_p \boldsymbol{c}^T\right) & V_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ x_I \end{bmatrix} + V_P r \end{aligned}$$

beschrieben werden kann.

Für das erweiterte System gilt

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{c}^T & 0 \end{bmatrix}}_{A_I} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ x_I \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}_I} u + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ 1 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ 0 \end{bmatrix} d.$$

Die Zustandsrückführung

$$u = -\boldsymbol{k}_I^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ x_I \end{bmatrix} + V_p r$$

wird mit Hilfe der Ackermannformel

$$\boldsymbol{k}_I^T = \boldsymbol{w}^T (p_0 E + p_1 A_I + p_2 A_I^2 + A_I^3)$$

bestimmt. Dafür wird zunächst die letzte Zeil der inversen Steuerbarkeitsmatrix benötigt. Die Steuerbarkeitsmatrix berechnet sich zu

$$S(A_I, \boldsymbol{b}_I) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -12 \\ 1 & -4 & 18 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Da diese vollständig steuerbar ist, kann ihre Inverse und somit

$$\boldsymbol{w}^T = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

bestimmt werden. Mit den Koeffizienten des gewünschten charakteristischen Polynoms (für $\lambda^* = -5$)

$$p^*(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^*\lambda^2 + 3(\lambda^*)^2\lambda - (\lambda^*)^3$$

wird die Zustandsrückführung bestimmt

$$\boldsymbol{k}_I^T = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}79 & 72 & -250\end{bmatrix}.$$

Mit $\boldsymbol{k}_I^T = \begin{bmatrix}\boldsymbol{k}^T + V_p\boldsymbol{c}^T & -V_I\end{bmatrix}$ ergibt sich $V_I = 250/8$.

Die Parameter $\boldsymbol{k}^T$ und V_p können nicht eindeutig bestimmt werden. Daher wird zunächst V_p bestimmt und $\boldsymbol{k}^T$ anschließend abgeleitet. Es wird angenommen, dass der Eingang durch $u = V_p r_\infty$ gegeben ist, wobei r konstant ist. Resultierend daraus ergibt sich

$$V_p = -\frac{1}{\boldsymbol{c}^T A^{-1}\boldsymbol{b}}.$$

Der Vektor $\boldsymbol{k}^T$ wird anschließend durch

$$\boldsymbol{k}^T = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}79 & 72\end{bmatrix} - V_p\boldsymbol{c}^T = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}67 & 60\end{bmatrix}$$

bestimmt.

Lösung 3 (Zu Aufgabe: 3). Entwurf eines Luenberger–Beobachters für das lineares zeitinvariantes System

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \boldsymbol{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}} u, \qquad t > 0,\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0,$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{c}^T} \boldsymbol{x}, \qquad t \geq 0.$$

(i) Beobachtbarkeit
Mit Hilfe der Kalmanschen Beobachtbarkeitsmatrix wird die Beobachtbarkeit des Systems überprüft

$$O\left(A, \boldsymbol{c}^T\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Da $\det(O(A, \boldsymbol{c}^T)) = 5 \neq 0$ gilt ist das System vollständig beobachtbar.

(ii) Transformation in die Beobachtungsnormalform
Um das System in Beobachtungsnormalform zu transformieren, wird das Dualitätsprinzip genutzt, das heißt, für das duale System (siehe Aufgabe 1) wird die Regelungsnormalform aufgestellt. Im folgenden wird das duale System mit dem Index d gekennzeichnet.

Die für die Transformation benötigte Steuerbarkeitsmatrix lautet

$$S_d(A_d, \boldsymbol{b}_d) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mit der letzen Zeile ihrer Inversen

$$\boldsymbol{w}_d^T = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

kann die Transformationsmatrix

$$V_d = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

aufgestellt werden. Durch die Transformation $\boldsymbol{z}_d = V_d \boldsymbol{x}_d$ wird die erste Standartform des dualen Systems aufgestellt

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{z}}_d &= V_d A_d V_d^{-1} \boldsymbol{z}_d + V_d \boldsymbol{b}_d u \\ y_d &= \boldsymbol{c}_d^T V_d^{-1} \boldsymbol{z}_d. \end{aligned}$$

Das zur ersten Standartform duale System ist die Beobachtungsnormalform des primalen Systems

$$\dot{\boldsymbol{z}} = V_d^{-T} A V_d^T \boldsymbol{z} + V_d^{-T} \boldsymbol{b} u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{z} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} u$$
$$y = \boldsymbol{c}^T V_d^T \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}.$$

(iii) Beobachterentwurf in transformierten Koordinaten
Die Ableitung des Fehlers

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}$$

zwischen dem System und dem Luenberger–Beobachter

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = A\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b}u + \boldsymbol{l}(y - \hat{y})$$
$$\hat{y} = \boldsymbol{c}^T \hat{\boldsymbol{x}}$$

ergibt die Beobachterfehlerdynamik

$$\dot{\boldsymbol{e}} = (A - \boldsymbol{l}\boldsymbol{c}^T)\boldsymbol{e}.$$

In Beobachtungsnormalform ergibt sich die Dynamikmatrix der Beobachterfehlerdynamik zu

$$\tilde{A} - \tilde{\boldsymbol{l}}\tilde{\boldsymbol{c}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 - \tilde{l}_1 \\ 1 & 0 & -5 - \tilde{l}_2 \\ 0 & 1 & -3 - \tilde{l}_3 \end{bmatrix}.$$

Die gewünschte Beobachterfehlerdynamik soll das gewünschte charakteristische Polynom

$$p^*(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 - 6\lambda - 4$$

erfüllen. Durch Koeffizientenvergleich ergeben sich die Bestimmungsgleichungen

$$-5 - \tilde{l}_1 = -4$$
$$-5 - \tilde{l}_2 = -6$$
$$-3 - \tilde{l}_3 = -4.$$

Die resultierende Beobachterverstärkung

$$\tilde{\boldsymbol{l}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(iv) Rücktransformation
Die Beobachterverstärkung wird durch

$$\boldsymbol{l} = V_d \tilde{\boldsymbol{l}}$$

zurücktransformiert, sodass sich

$$\boldsymbol{l} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ergibt.

(v) Überprüfung
Durch Auswertung der Ackermannformel für den Beobachterentwurf

$$\boldsymbol{l} = (p_0^* E + p_1^* A + p_2^* A^2 + A^3)\,\boldsymbol{v}$$

mit $\boldsymbol{v} = 1/5 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$

$$\boldsymbol{l} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$