Prof. Dr.–Ing. habil. Thomas Meurer, Lehrstuhl für Regelungstechnik

Aufgabe 1. Gegeben ist ein lineares zeitinvariantes System der Form

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} u, \qquad t > 0,\ \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{7.1a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}, \qquad t \geq 0. \tag{7.1b}$$

Untersuchen Sie das System auf Stabilität und vollständige Steuerbarkeit. Entwerfen Sie für das System eine Zustandsrückführung $\boldsymbol{k}^T$ so, dass die Pole des geschlossenen Kreises bei $\lambda_1^* = -5$ und $\lambda_2^* = -6$ liegen, ohne dabei die Formel von Ackermann zu verwenden.

Aufgabe 2. Das System, gegeben durch die Zustandsdarstellung

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \qquad t > 0,\ \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{7.2a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}, \qquad t \geq 0, \tag{7.2b}$$

soll untersucht und mittels Eigenwertvorgabe geregelt werden.

Untersuchen Sie das System auf Stabilität und vollständige Steuerbarkeit. Geben Sie die Transformationsmatrix V an, die das System in Regelungsnormalform (RNF) transformiert. Zeichnen Sie das Blockschaltbild der Darstellung in RNF. Berechnen Sie für das System in RNF den Rückführvektor $\boldsymbol{k}_c^T$ so, dass der geschlossene Regelkreis Eigenwerte bei $\lambda_1^* = -1$, $\lambda_2^* = -2$ und $\lambda_3^* = -3$ besitzt. Ermitteln Sie mit Hilfe der Ackermann–Formel den Rückführvektor $\boldsymbol{k}^T$ in Originalkoordinaten.

Aufgabe 3. Gegeben ist ein lineares zeitinvariantes System der Form

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad t > 0,\ \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{7.3a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}, \qquad t \geq 0. \tag{7.3b}$$

Untersuchen Sie das System auf Stabilität. Zeigen Sie, dass das System durch eine Zustandsrückführung stabilisierbar ist. Entwerfen Sie für das System eine Zustandsrückführung $\boldsymbol{k}^T$ so, dass für die Eigenwerte λ_1 und λ_2 des geschlossenen Regelkreises in der linken komplexen Halbebene gilt $\lambda_1 = \lambda_2$.

Lösung 1 (Zu Aufgabe: 1). Gegeben ist das LTI-System

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}}_{A} \boldsymbol{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}} u, \qquad t > 0, \; \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{c}^T} \boldsymbol{x}, \qquad t \geq 0.$$

der dimension $n = 2$.

Zunächst wird die Stabilität des Systems mit Hilfe der Eigenwerte der Dynamikmatrix A untersucht

$$p(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ 5 & \lambda - 10 \end{bmatrix}\right) = (\lambda - 3)(\lambda - 10).$$

Da beide Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 10$ einen positiven Realteil haben ist das System folglich instabil.

Die Steuerbarkeit des Systems wird mit Hilfe der Kalmanschen Steuerbarkeitsmatrix überprüft

$$S(A, \boldsymbol{b}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 18 \\ 0 & -30 \end{bmatrix}.$$

Da diese vollen Rang hat ist das System vollständig steuerbar.

Um einen geeigneten Regler zu entwerfen wird zunächst das charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises

$$\begin{aligned} \det\left(\lambda E - (A - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T)\right) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 3 + 6k_1 & 6k_2 \\ 5 & \lambda - 10 \end{bmatrix}\right) \\ &= \lambda^2 + (-3 + 6k_1 - 10)\lambda + 30 - 60k_1 - 30k_2 \end{aligned}$$

bestimmt.

Ein Koeffizientenvergleich mit dem gewünschten charakteristischen Polynom

$$p^*(\lambda) = (\lambda + 5)(\lambda + 6) = \lambda^2 + 11\lambda + 30$$

führt auf das zu lösende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 11 &= -3 + 6k_1 - 10 \\ 30 &= 30 - 60k_1 - 30k_2. \end{aligned}$$

Die Reglerkoeffizienten der Zustandsrückführung können nun direkt bestimmt werden

$$\boldsymbol{k}^T = \begin{bmatrix} 4 & -8 \end{bmatrix}.$$

Lösung 2 (Zu Aufgabe: 2). Gegeben ist das LTI-System

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \boldsymbol{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}} u, \qquad t > 0,\ \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{c}^T} \boldsymbol{x}, \qquad t \geq 0.$$

Die Stabilität des Systems wird anhand der Eigenwerte der Dynamikmatrix A überprüft

$$0 = p(\lambda) = \det(\lambda E - A) = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 1)$$

Die berechneten Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 2$ und $\lambda_3 = 1$ zeigen eindeutig die Instabilität des Systems. Analog zu Aufgabe 1 wird die Steuerbarkeit mit Hilfe der Kalmanschen Steuerbarkeitsmatrix nachgewiesen

$$S(A, \boldsymbol{b}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} & A^2\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -14 \end{bmatrix}.$$

Da $\operatorname{rank}(S(A, \boldsymbol{b})) = n$ gilt, ist das System vollständig steuerbar.

Um das System in die Regelungsnormalform (RNF) zu transformieren wird die Transformationsmatrix

$$W = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}^T \\ \boldsymbol{w}^T A \\ \boldsymbol{w}^T A^2 \end{bmatrix}$$

berechnet. Der Vektor $\boldsymbol{w}^T$ ist die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} S^{-1}(A, \boldsymbol{b}) \\ &= -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -4 & 0 - 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nach der Berechnung von der Transformationsmatrix W und ihrer Inversen V

$$W = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \\ 8 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

kann das System mit Hilfer der Transformation $z = Wx$ (oder $x = Vz$) in Regelungsnormalform überführt werden. Die Dynamikmatrix in der Regelungsnormalform ergibt sich zu

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix},$$

sodass der geschlossene Regelkreis die Dynamikmatrix

$$A_c - \boldsymbol{b}_c \boldsymbol{k}_c^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 - k_{c,1} & -8 - k_{c,2} & 5 - k_{c,3} \end{bmatrix}.$$

hat. Die gewünschte Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises

$$A_c^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -p_0^* & -p_1^* & -p_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

ergibt sich aus dem gewünschten charakteristischen Polynom

$$p^*(\lambda) = (\lambda - \lambda_1^*)(\lambda - \lambda_2^*)(\lambda - \lambda_3^*) = \lambda^3 + p_2^* \lambda^2 + p_1^* \lambda + p_0^*.$$

Mit Hilfe der gewünschten Dynamikmatrix können die Regelerkoeffizienten durch Koeffizientenvergleich aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4 - k_{c,1} &= -6 \\ -8 - k_{c,2} &= -11 \\ 5 - k_{c,3} &= -6 \end{aligned}$$

bestimmt $\boldsymbol{k}_c^T = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 11 \end{bmatrix}$ werden.

Um den Rückführvektor mit Hilfe der Ackermannformel (für $n = 3$)

$$\boldsymbol{k}^T = \boldsymbol{w}^T \left(p_0^* E + p_1^* A + p_2^* A^2 + A^3 \right)$$

zu berechnen, müssen $\boldsymbol{w}^T$ und die Koeffizienten des gewünschten charakteristischen Polynoms p_0^*, p_1^*, p_2^* bekannt sein. Durch Einsetzen ergibt sich $\boldsymbol{k}^T = \begin{bmatrix} 36.5 & 11 & 6.5 \end{bmatrix}$.

Lösung 3 (Zu Aufgabe: 3). Zunächst wird das lineare zeitinvariante System

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \boldsymbol{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}} u, \qquad t > 0,\ \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{c}^T} \boldsymbol{x}, \qquad t \geq 0.$$

auf seine Stabilität untersucht. Hierzu werden die Eigenwerte der Dynamikmatrix A betrachtet

$$\begin{aligned} 0 = p(\lambda) &= \det(\lambda E - A) \\ &= (\lambda + 1)(\lambda - 5). \end{aligned}$$

Das System ist folglich nicht stabil.

Um die Steuerbarkeit des Systems zu überprüfen wird die Kalmansche Steuerbarkeitsmatrix aufgestellt

$$S(A, b) = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Da diese offensichtlich den Rang 1 hat ist das System nicht vollständig steuerbar.

Um einen Regler zu entwerfen wird das System in ein steuerbares und ein nicht steuerbares Untersystem zerlegt

$$\dot{x}_1 = -x_1, \tag{7.6a}$$

$$\dot{x}_2 = 5x_2 + u. \tag{7.6b}$$

Gleichung (7.6a) ist das stabile aber nicht steuerbare Untersystem, während Gleichung (7.6b) das instabile aber steuerbare System darstellt.

Wird der geschlossene Regelkreis des steuerbaren Untersystems wird mit $u = -k_2 x_2$ aufgestellt

$$\dot{x}_2 = 5x_2 - k_2 x_2,$$

zeight sich, dass um den gewünschten Eingenwert $\lambda_2^* = -1$ zu erreichen, $k_2 = 6$ bzw. $\boldsymbol{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & 6 \end{bmatrix}$ gelten muss.