

Prof. Dr.–Ing. habil. Thomas Meurer, Lehrstuhl für Regelungstechnik

Aufgabe 1. Gegeben ist die Übertragungsfunktion der Regelstrecke

$$\hat{g}(s) = \frac{2}{3} \cdot \frac{s + 0.1}{s(s + 1)}.$$

Bestimmen Sie mittels des Frequenzkennlinienverfahrens einen geeigneten Regler so, dass die folgenden Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis

$$\dot{u} = 18\%$$

$$t_r \approx 0.6 \text{ s}$$

$$e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$$

erfüllt werden.

Aufgabe 2. Gegeben ist die Strecke

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{s(s + 1)\left(\frac{s}{\sqrt{2}-1} + 1\right)}.$$

Skizzieren Sie das Bodediagramm von $\hat{g}(s)$ auf beiliegendem Blatt. Berechnen Sie anschließend die Parameter eines Reglers $\hat{g}_r(s)$ der Form

$$\hat{g}_r(s) = \frac{V(sT + 1)}{sT_R + 1}$$

so, dass der geschlossene Regelkreis folgende Anforderungen erfüllt:

$$t_r = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{2}-1} \text{ s}$$

$$\dot{u} = 10\%$$

$$e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0.$$

Dabei soll für die Zeitkonstante T_R des Realisierungspols $T_R \ll 1$ angenommen werden, womit dieser Pol für die Auslegung der Parameter T und V nicht berücksichtigt werden muss. Wählen Sie zum Schluss einen geeigneten Parameter T_R .

Überprüfen Sie die Eigenschaften des geschlossenen Kreises durch Simulation der Sprungantwort in MATLAB.

Aufgabe 3. Gegeben ist die Strecke

$$\hat{g}(s) = \frac{200^2(s + 0.1)}{(s^2 + 2 \cdot 0.05 \cdot 200s + 200^2)(s + 3)}$$

für die ein geeigneter Regler so entworfen werden soll, dass die folgenden Anforderungen an den geschlossenen Kreis erfüllt werden:

$$t_r = 1 \text{ s}$$

$$\ddot{u} = 0 \%$$

$$e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0.$$

Skizzieren Sie dazu zunächst **handschriftlich** das Bodediagramm der Strecke auf beiliegendem Blatt. Überprüfen Sie die Eigenschaften des geschlossenen Kreises durch Simulation der Sprungantwort. Analysieren Sie die Stabilität des geschlossenen Kreises mittels eines geeigneten Kriteriums.

Lösung 1 (zu Aufgabe 1). Gegeben ist die Übertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{2}{3} \frac{s + 0.1}{s(s + 1)}$$

Die Normalform der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises ist

$$\hat{l}(s) = \hat{g}_r(s)\hat{g}(s) = \frac{V}{s^\rho} \frac{\hat{z}_l(s)}{\hat{n}_l(s)} e^{-sT_t} = \frac{2}{30} \frac{1 + 10s}{s(1 + s)} \frac{\hat{z}_r(s)}{\hat{n}_r(s)}$$

Die Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis lauten

- $t_r = 0.6s = \frac{1.5}{\omega_c}$
- $\ddot{u} = 18[\%] = 70[^\circ] - \phi(\hat{l}(j\omega_c)) [^\circ]$
- $e_\infty|_{r=\sigma} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \hat{l}(s)} \frac{1}{s} = 0$

Daraus ergeben sich die Anforderungen an $\hat{l}(j\omega)$:

- Durchtrittsfrequenz: $\omega_c = \frac{1.5}{0.6s} = 2.5 \text{ rad/s} \Leftrightarrow |\hat{l}(j\omega_c)| \stackrel{!}{=} 1 = 0\text{dB}$
- Soll-Phasenreserve: $\phi_{soll} = 70^\circ - \ddot{u} = 52^\circ$
- Integralanteil: $\rho = 1 \checkmark$

Bestimmung der Ist-Phasenreserve:

$$\arg(\hat{g}(j\omega_c)) = \arctan(25) - \frac{\pi}{2} - \arctan(2.5) \approx -1.2303 \frac{180^\circ}{\pi} \approx -70.4892^\circ$$

$$\phi_{ist} = \arg(\hat{g}(j\omega_c)) - (-180^\circ) \approx 109.5108^\circ$$

Somit muss die Phase in $\omega = \omega_c = 2.5$ um die Differenz

$$\Delta\phi = \phi_{ist} - \phi_{soll} = 109.5108^\circ - 52^\circ = 57.5108^\circ$$

nach unten verschoben werden. Dies soll im Folgenden mit Hilfe eines *lag*-Gliedes

$$\hat{g}_r(s) = V_r \frac{1 + sT}{1 + s\eta T}, \quad \eta > 1, T > 0$$

realisiert werden. Die beiden Entwurfswfreiheitsgrade T, η werden hierzu wie folgt bestimmt:

- Argument der maximalen Phasenverschiebung: $\omega_{\max} = \frac{1}{T\sqrt{\eta}} \stackrel{!}{=} \omega_c$
- maximale Phasenverschiebung¹: $\varphi_{\max} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right) - \arctan(\sqrt{\eta}) = \arctan\left(\frac{1-\eta}{2\sqrt{\eta}}\right)$

Damit erhält man durch Gleichsetzen von $\varphi_{\max} = \Delta\phi$

$$\tan(\Delta\phi) = \frac{1-\eta}{2\sqrt{\eta}} \Leftrightarrow \sqrt{\eta}^2 + 2\sqrt{\eta} \tan(\Delta\phi) - 1 = 0$$

¹ $\arctan(x) - \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$ für $xy > -1$.

$$\Leftrightarrow \eta = \left(-\tan(\Delta\phi) \pm \sqrt{\tan(\Delta\phi)^2 + 1} \right)^2$$

Nun gilt, dass für $\eta < 1$ ein Lead-Glied zur Anhebung der Phase und für $\eta > 1$ ein Lag-Glied zum Absenken der Phase vorliegt. Eine genauere Betrachtung der Lösungen η aus der obigen Gleichung ergibt

$$0 \leq \left(-\tan(\Delta\phi) + \sqrt{\tan(\Delta\phi)^2 + 1} \right)^2 \leq \left(-\tan(\Delta\phi) - \sqrt{\tan(\Delta\phi)^2 + 1} \right)^2.$$

Da die Phase abgesenkt werden muss ($\eta > 1$) wird daher die zweite Lösung genommen, d.h.

$$\eta = \left(-\tan(\Delta\phi) - \sqrt{\tan(\Delta\phi)^2 + 1} \right)^2 = 1 + 2 \tan(\Delta\phi) \left(\tan(\Delta\phi) - \sqrt{\tan(\Delta\phi)^2 + 1} \right).$$

Mit $\Delta\phi = 57.5108^\circ$ und $\omega_c = 2.5$ folgt somit

$$\eta = 10.1366, \quad T = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\eta}} = 0.1256.$$

Um die geforderte Durchtrittsfrequenz $\omega_c = 2.5$ zu erhalten wird nun noch V_r bestimmt:

$$\begin{aligned} |\hat{l}(j\omega_c)| = |\hat{g}_r(j \cdot 2.5)| |\hat{g}(j \cdot 2.5)| \stackrel{!}{=} 1 &\Leftrightarrow V_r \left| \frac{1 + j \cdot 2.5 \cdot 0.1256}{1 + j \cdot 2.5 \cdot 10.1366 \cdot 0.1256} \right| |\hat{g}(j \cdot 2.5)| = 1 \\ \Leftrightarrow V_r = 12.8487 \end{aligned}$$

Lösung 2 (zu Aufgabe 2). Gegeben ist die Übertragungsfunktion der Strecke

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{s(1+s) \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}-1}\right)}$$

Die Knickfrequenzen für das Bodediagramm sind $\omega_{1,2} = 1$, $\omega_3 = \sqrt{2} - 1$. Die Amplituden- und Phasenverläufe der Einzelübertragungsfunktionen und der Resultierenden sind im Bodediagramm in Abb. 5.3 dargestellt.

Die Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis lauten

- $\ddot{u} = 10[\%] = 70[^\circ] - \phi(\hat{l}(j\omega_c))[^\circ]$
- $t_r = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{2}-1} s = \frac{1.5}{\omega_c}$
- $e_\infty|_{r=\sigma} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+\hat{l}(s)} \frac{1}{s} = 0$

Daraus ergeben sich die Kenngrößen

- $\omega_c = \frac{1.5}{t_r} = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow |\hat{l}(j\omega_c)| \stackrel{!}{=} 1 = 0\text{dB}$
- $\rho = 1 \checkmark$
- $\phi = 70^\circ - \ddot{u} = 60^\circ$

Zunächst wird die Ist-Phase in $\omega_c = \sqrt{2} - 1$ bestimmt

$$\arg(\hat{g}(j\omega_c)) = -\frac{\pi}{2} - \arctan(\omega_c) - \underbrace{\arctan(1)}_{\pi/4} \approx -2.7489 \text{ rad} \approx -157.5^\circ$$

$$\hookrightarrow \phi(\hat{g}(j\omega_c)) = 22.5^\circ, \quad \Delta\phi = -37.5^\circ$$

Die Phase muss also in ω_c um 37.5° angehoben werden. Hierfür kann z.B. ein PD-Regler

$$\hat{g}_r(s) = \frac{V_r(1+Ts)}{1+T_Rs}$$

verwendet werden. Für die Phase des Reglers bei ω_c muss somit gelten ²

$$\arg(\hat{g}_r(j\omega_c)) = \arg(1 + j\omega_c T) = \arctan(\omega_c T) \stackrel{!}{=} 37.5^\circ$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{1}{\omega_c} \tan\left(\frac{37.5^\circ \cdot \pi}{180^\circ}\right) = 1.8525.$$

Der Verstärkungsfaktor V_r wird nun so bestimmt, dass die Durchtrittsfrequenz bei $\omega_c = \sqrt{2} - 1$ liegt:

$$1 \stackrel{!}{=} |\hat{l}(j\omega_c)| = V_r \left| \frac{1 + j1.8525(\sqrt{2}-1)}{j(\sqrt{2}-1) \left(1 + j(\sqrt{2}-1)\right) (1+j)} \right|$$

²Falls T_R klein gegen die kleinste Zeitkonstante der Strecke ist, kann der Einfluß des Realisierungsterms bei der Reglerauslegung vernachlässigt werden.

$$= V_r \frac{|1 + j1.8525(\sqrt{2} - 1)|}{(\sqrt{2} - 1) |(1 + j(\sqrt{2} - 1))| |(1 + j)|} = V_r \frac{\sqrt{1 + 1.8525^2 (\sqrt{2} - 1)^2}}{(\sqrt{2} - 1) \sqrt{1 + (\sqrt{2} - 1)^2} \sqrt{2}},$$

woraus folgt, dass

$$V_r = 0.5030$$

gilt. Abschließend muss T_R für das Realisierungsglied gewählt werden. Der Einfluß des Realisierungsterms auf das Übertragungsverhalten des offenen Regelkreises ist in Abb. 5.4 dargestellt.

Es wird hier $T_R = 10^{-4} s$ gewählt. Die Sprungantwort für diesen Fall ist in Abb. 5.5 dargestellt.

Lösung 3 (zu Aufgabe 3). Die Übertragungsfunktion und ihre Normaldarstellung ist wie folgt:

$$\hat{g}(s) = \frac{200^2(s+0.1)}{(s^2 + 2 \cdot 0.05 \cdot 200s + 200^2)(s+3)} = \frac{1}{30} \frac{(1 + \frac{s}{0.1})}{(1 + 2 \cdot \underbrace{0.05}_{\zeta} \frac{s}{200} + (\frac{s}{200})^2) (1 + \frac{s}{3})}$$

- Der Anteil der Gleichverstärkung in Dezibel ist $20 \log(1/30) \text{dB} = -29.5424 \text{dB}$
- Die Resonanzüberhöhung berechnet sich zu $-40 \log(\sqrt{2\zeta}) = 20 \text{dB}$

Hiermit resultiert das in Abb. 5.6 dargestellte Bodediagramm. Die Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis lauten

- $t_r = 1 \text{s} \Leftrightarrow \omega_c = \frac{1.5}{1 \text{s}} = 1.5 \text{ rad/s}$
- $\ddot{u} = 0\% \Leftrightarrow \phi(\hat{l}(j\omega_c)) = 70^\circ$
- $e_\infty|_{r=\sigma} = 0 \Leftrightarrow \rho = 1$

Da es sich um ein schwingungsfähiges System handelt (die Übertragungsfunktion enthält ein PT-2 Glied) kann die Anforderungen $\ddot{u} = 0$ nur mittels eines Kompenesationsreglers erreicht werden. Es ergibt sich

$$\hat{g}_r(s) = V_r \frac{(1 + 2 \cdot 0.05 \frac{s}{200} + (\frac{s}{200})^2)}{s}$$

Dieser Regler ist jedoch nicht realisierbar (Zählergrad ist hier größer als der Nennergrad), weshalb ein Realisierungsterm eingeführt und der folgende Regler verwendet wird:

$$\hat{g}_r(s) = V_r \frac{(1 + 2 \cdot 0.05 \frac{s}{200} + (\frac{s}{200})^2)}{s(1 + sT)}$$

Somit lautet die Übertragungsfunktion des offenen Kreises

$$\hat{l}(s) = \frac{V_r}{30 s} \frac{(1 + \frac{s}{0.1})}{(1 + \frac{s}{3})(1 + sT)}$$

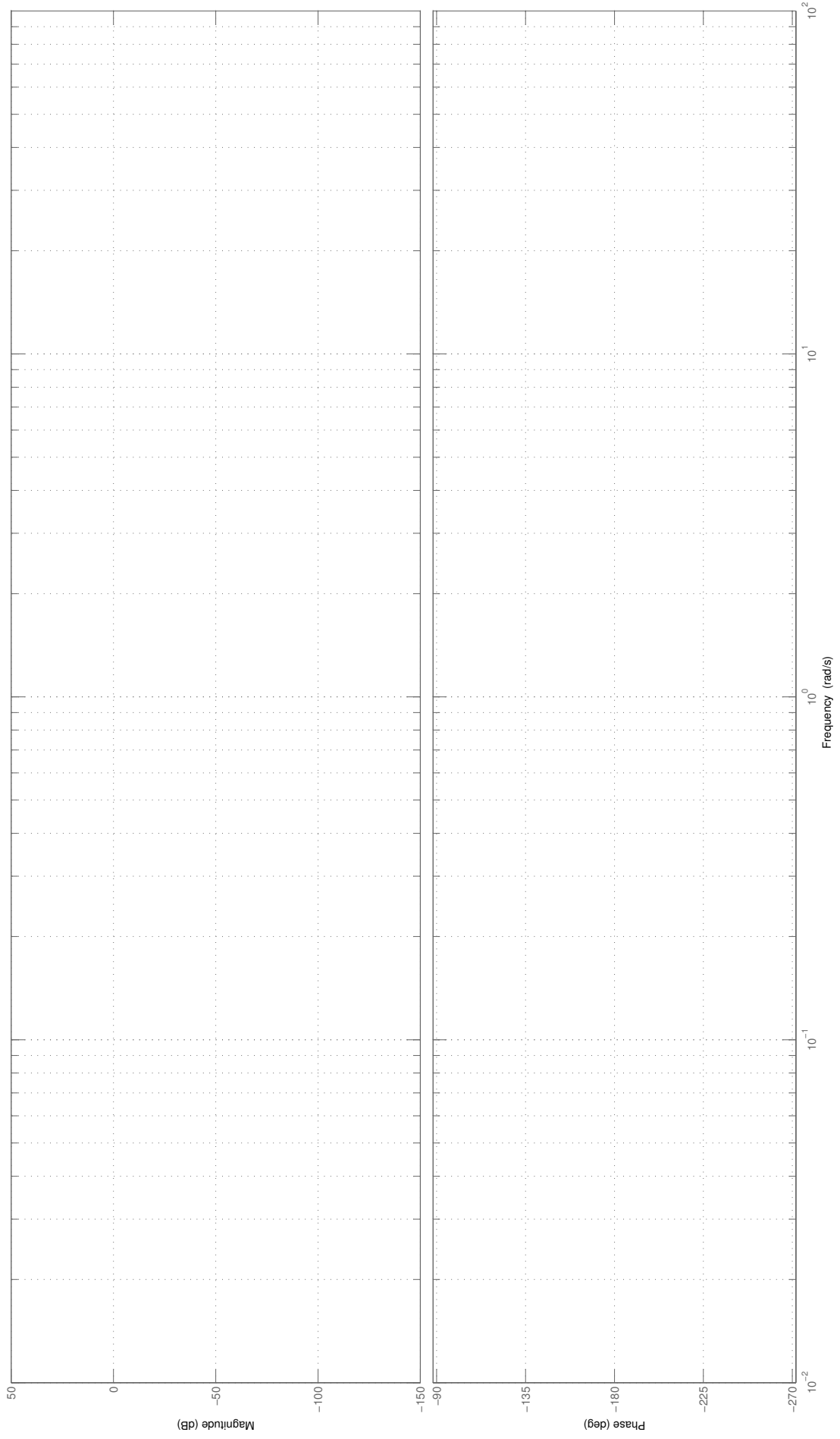
Die Zeitkonstante T wird über die Soll-Phase in ω_c bestimmt:

$$\begin{aligned} \arg(\hat{l}(j\omega_c)) &= \arctan(15) - \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan(1.5T) \stackrel{!}{=} -110^\circ \frac{\pi}{180^\circ} \\ \Leftrightarrow T &= 3.6389 \end{aligned}$$

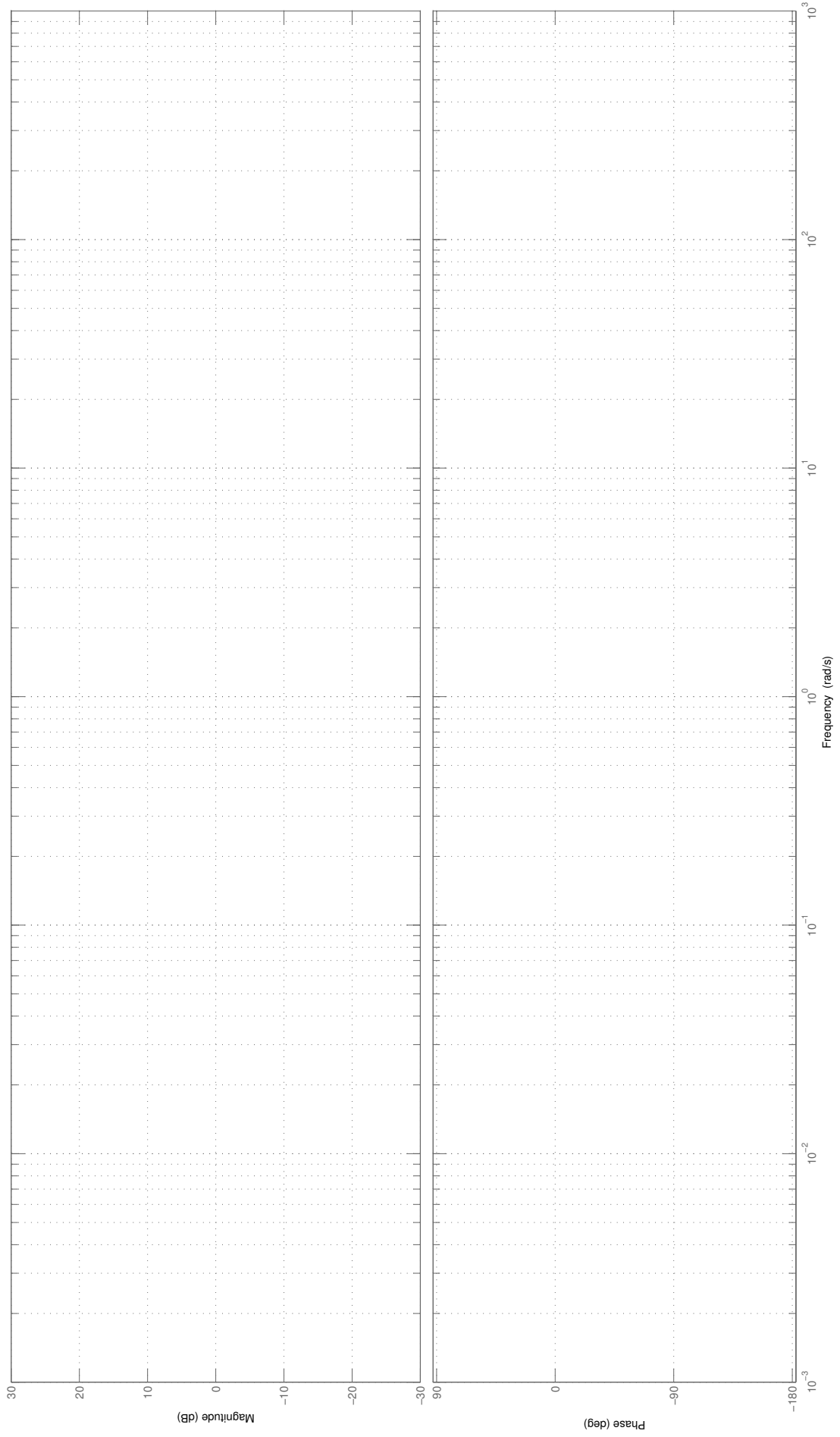
Die Gleichverstärkung V_r des Reglers wird über die geforderte Durchtrittsfrequenz eingestellt:

$$|\hat{l}(j\omega_c)| \stackrel{!}{=} 1 = \frac{V_r}{30 \omega_c} \frac{|1 + j \frac{\omega_c}{0.1}|}{|1 + j \frac{\omega_c}{3}| |1 + j\omega_c T|} \Leftrightarrow V_r = 18.576.$$

Bode Diagram



Bode Diagram



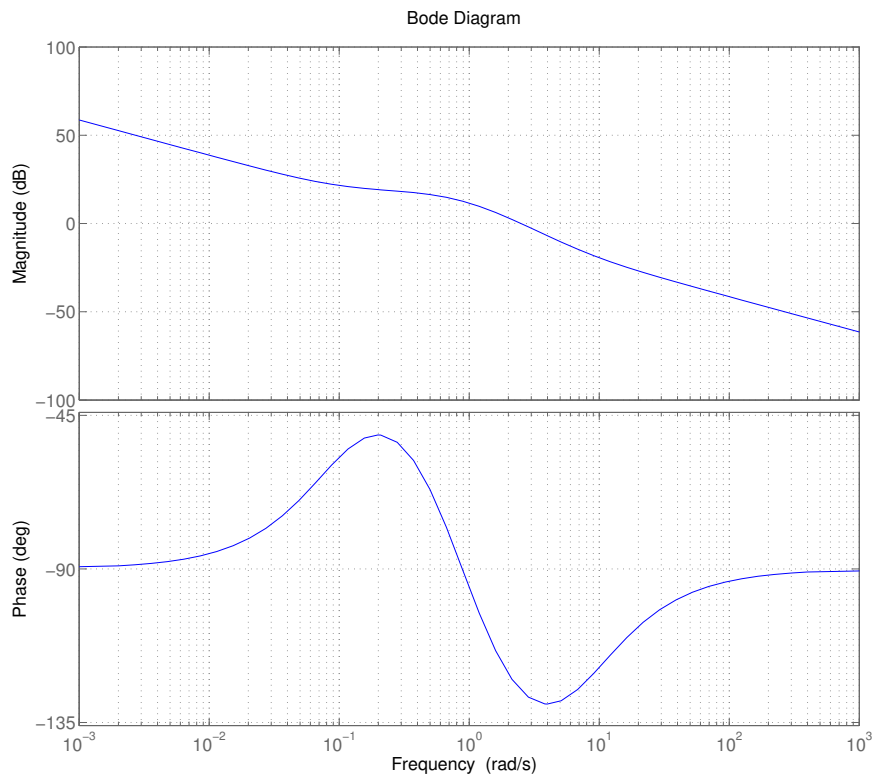


Abb. 5.1: Bodediagram für den offenen Regelkreis $\hat{l}(j\omega) = \hat{g}_r(j\omega)\hat{g}(j\omega)$.

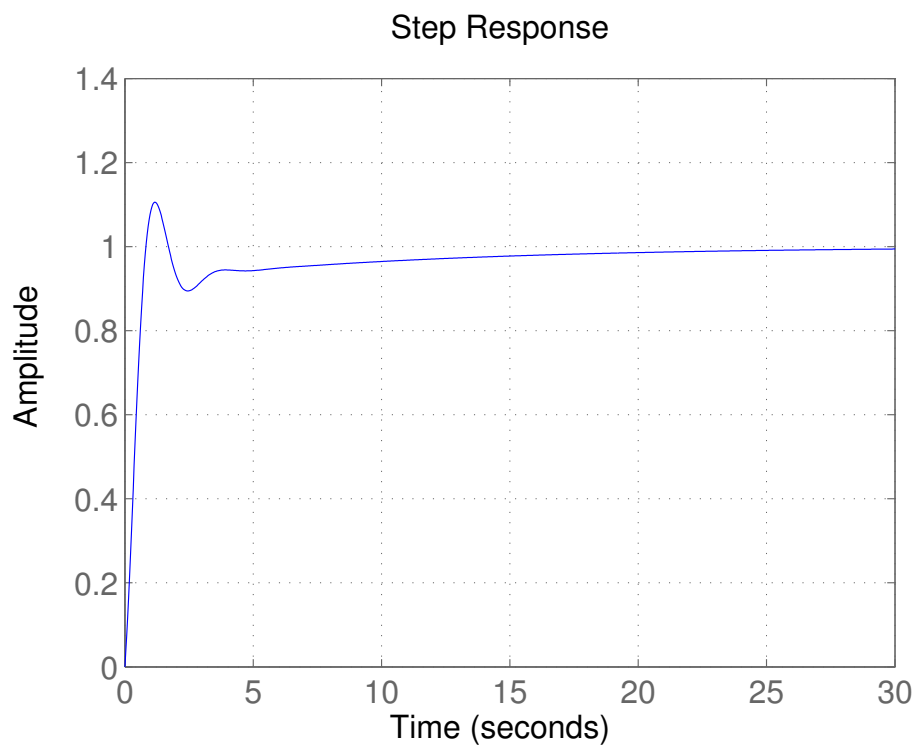


Abb. 5.2: Sprungantwort für den geschlossenen Regelkreis aus Aufgabe 5.1.

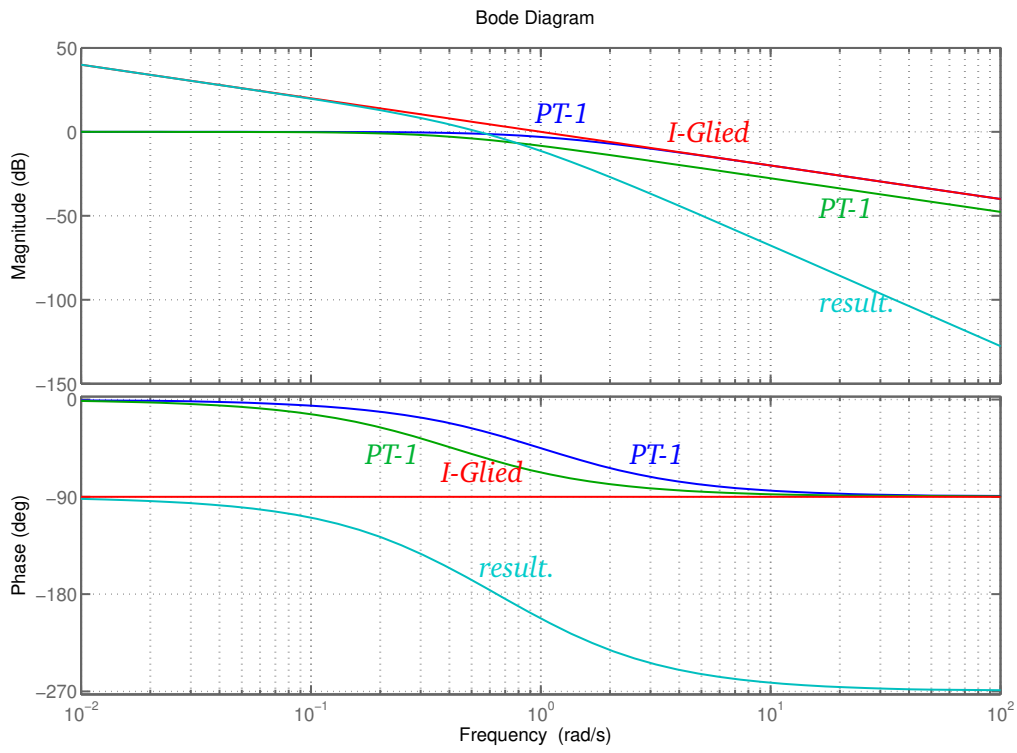


Abb. 5.3: Bodediagramm zu Aufgabe 5.2.

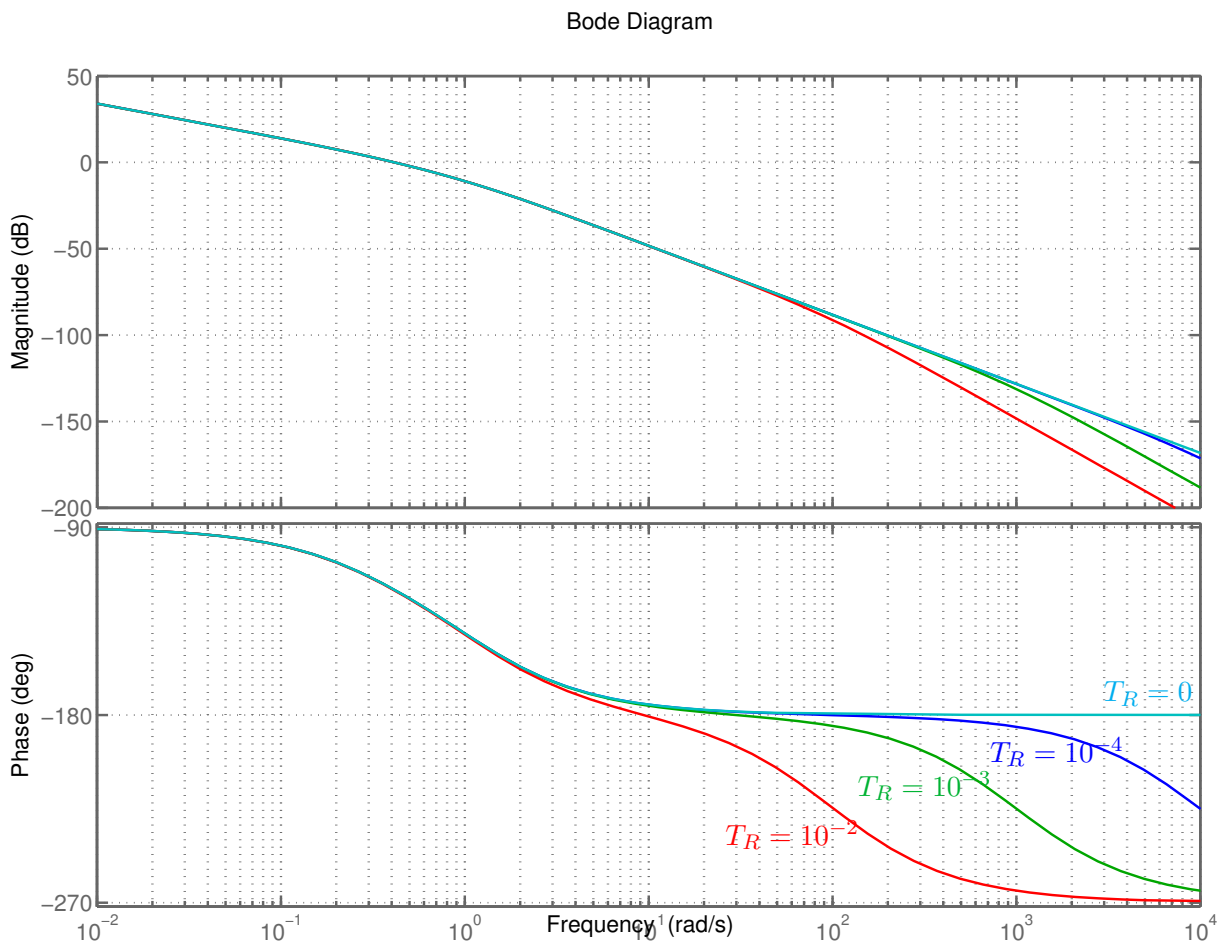


Abb. 5.4: Einfluß des Realisierungsterms auf das Übertragungsverhalten des offenen Regelkreises in Aufgabe 5.2.

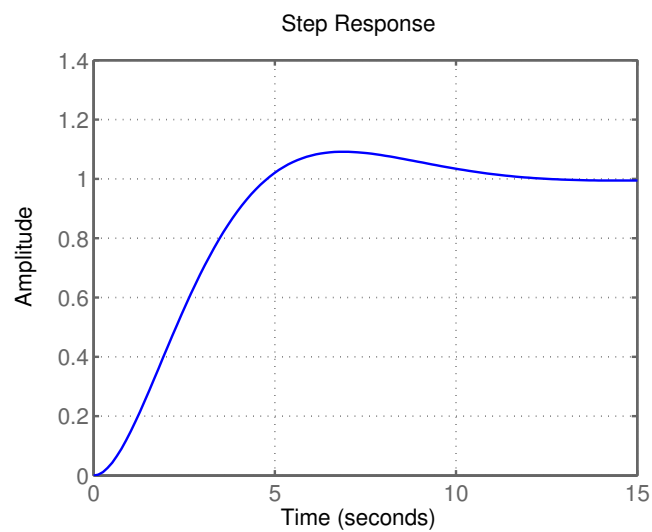


Abb. 5.5: Sprungantwort für den geschlossenen Regelkreis aus Aufgabe 5.2.

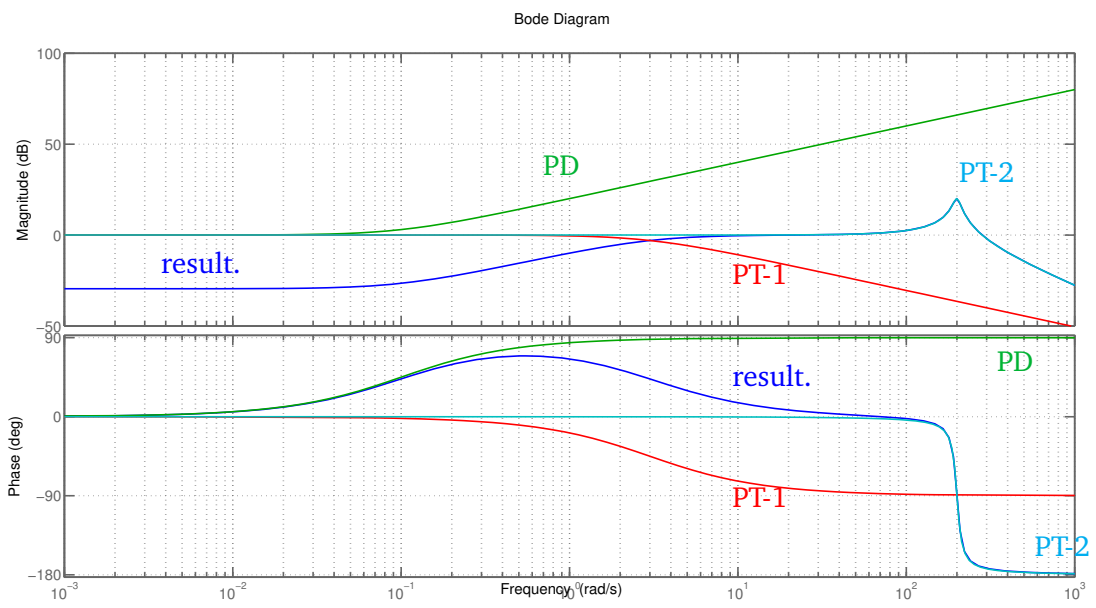


Abb. 5.6: Bodediagramm der Strecke aus Aufgabe 5.3.

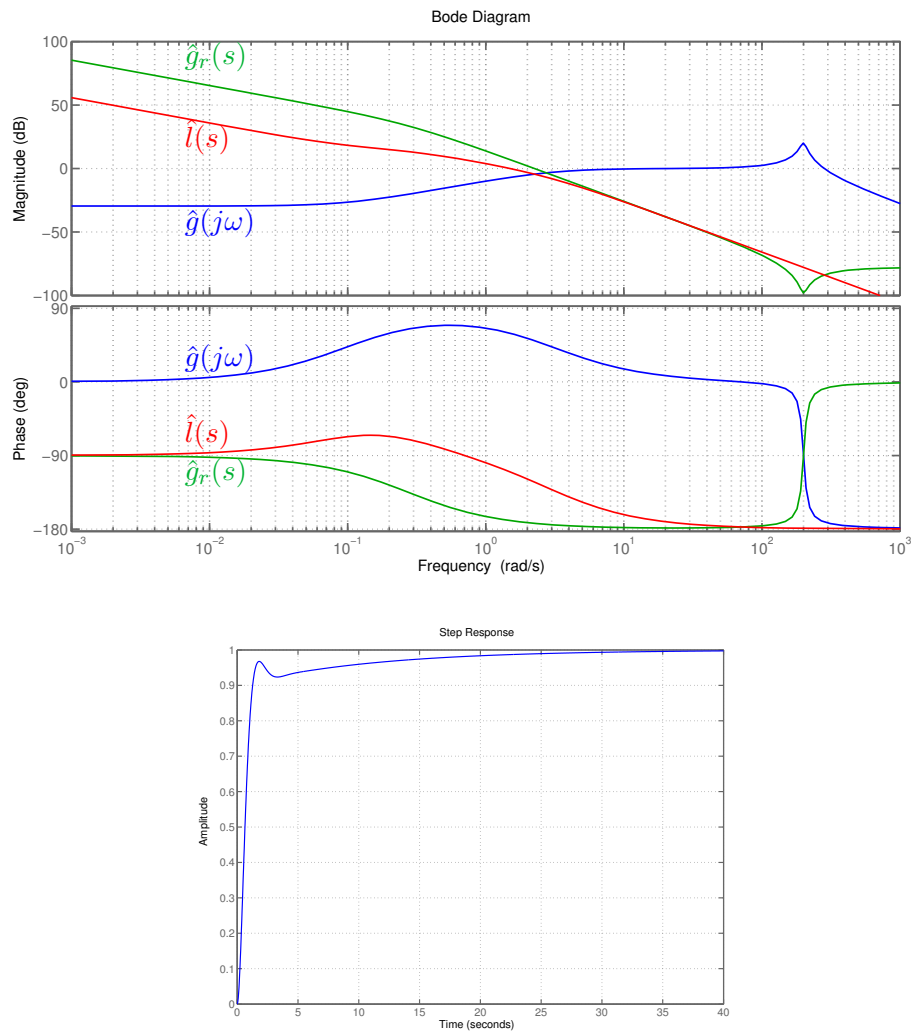


Abb. 5.7: Oben: Bodediagramm für die Strecke (blau), den Regler (grün) und den offenen Regelkreis (rot). Unten: Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises aus Aufgabe 5.3.