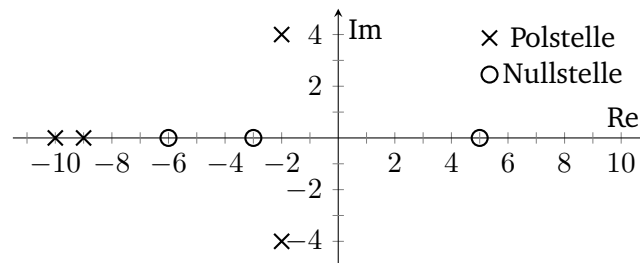


Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Meurer, Lehrstuhl für Regelungstechnik

**Aufgabe 1.** Gegeben ist die Übertragungsfunktion  $\hat{g}(s)$  eines linearen, zeitinvarianten, kontinuierlichen Systems anhand des Pol- und Nullstellendiagramms in Abbildung 4.1.



**Abb. 4.1:** Pol- und Nullstellendiagramm.

Geben Sie die Übertragungsfunktion  $\hat{g}(s)$  so an, dass die stationäre Verstärkung der Übertragungsfunktion  $V = 2$  beträgt.

- Ist die Strecke BIBO-stabil?
- Ist die Strecke sprungfähig?
- Ist die Strecke phasenminimal?

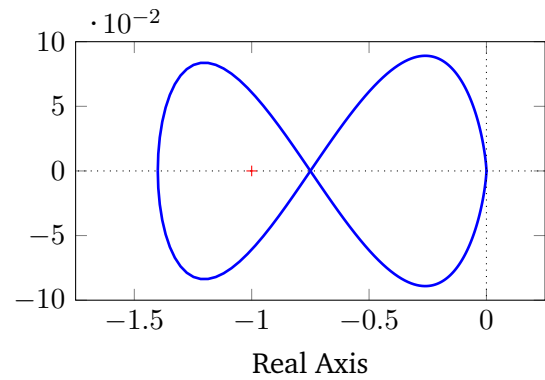
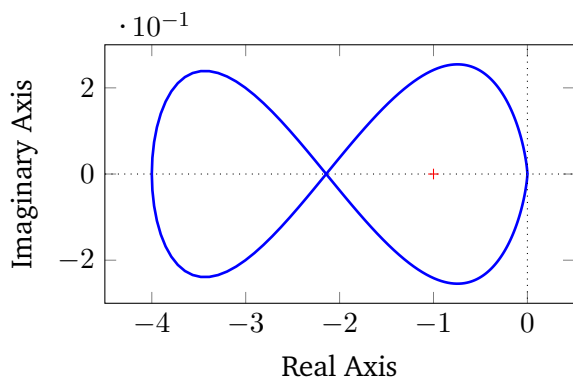
**Aufgabe 2.** Gegeben ist die Übertragungsfunktion  $\hat{l}_i(s) = \hat{g}_{ri}(s)\hat{g}_i(s)$  eines offenen Regelkreises für die vier Fälle

$$\hat{l}_1(s) = \frac{4(1+s)}{(s^2-1)(1+0.5s)(1+0.3s)} \quad \text{bzw.} \quad \hat{l}_2(s) = \frac{1.4(1+s)}{(s^2-1)(1+0.5s)(1+0.3s)}$$

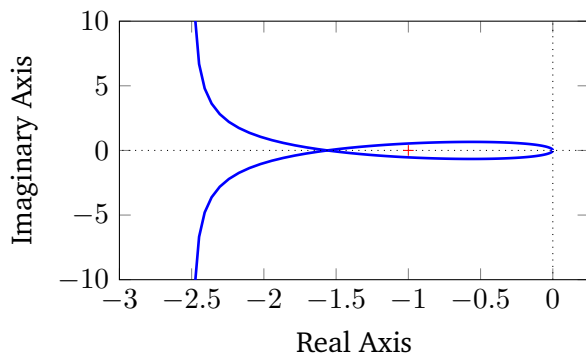
und

$$\hat{l}_3(s) = \frac{(1+s)^2}{s(s-1)(1+0.5s)} \quad \text{bzw.} \quad \hat{l}_4(s) = \frac{(1+s)^2}{s(s^2-1)(1+0.5s)} .$$

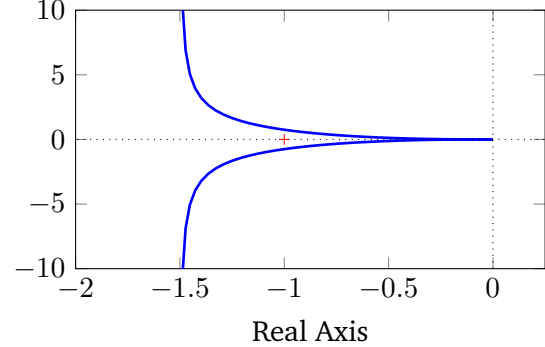
Die Abbildungen 4.2 (a)–(d) zeigen die jeweilige Ortskurve. Kennzeichnen Sie in den Ortskurven die Punkte  $\omega = \pm 0$ ,  $\omega = \pm\infty$  und den Durchlaufsin. Beurteilen Sie die jeweilige Stabilität des geschlossenen Regelkreises mit einem Freiheitsgrad anhand des Nyquist-Kriteriums.



(a)  $\hat{l}_1(s)$



(b)  $\hat{l}_2(s)$



(c)  $\hat{l}_3(s)$

(d)  $\hat{l}_4(s)$

Abb. 4.2: Ortskurven zu Aufgabe 2.

**Aufgabe 3.** Zeichnen Sie das Bodediagramm und die Ortskurve für die Übertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{8(s + 20)}{s(s + 1)(s + 4)} .$$

Konstruieren Sie zuerst das Bodediagramm. Bringen Sie dazu  $\hat{g}(s)$  in normierte Form und zeichnen Sie zunächst die Asymptoten der Teilübertragungsfunktionen. Die Ortskurve erhalten Sie durch Ablesen von Amplituden- und Phasenwerten aus dem Bodediagramm für jeweils gleiche  $\omega$ -Werte und nachfolgende Berechnung von  $\text{Re}\{\hat{g}(i\omega)\}$  und  $\text{Im}\{\hat{g}(i\omega)\}$ .

**Aufgabe 4.** Gegeben ist die Übertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{10 + 9s - s^2}{(s^2 - 0.4s + 1)(s + 100)} .$$

Skizzieren Sie das Bodediagramm dieser Übertragungsfunktion. Bestimmen Sie anhand Ihrer Skizze näherungsweise den Betrag und die Phase bei  $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$  und bei  $\omega_2 = 10^3 \text{ rad/s}$ . Vergleichen Sie die erhaltenen Werte mit numerisch (MATLAB, Taschenrechner) berechneten Werten.

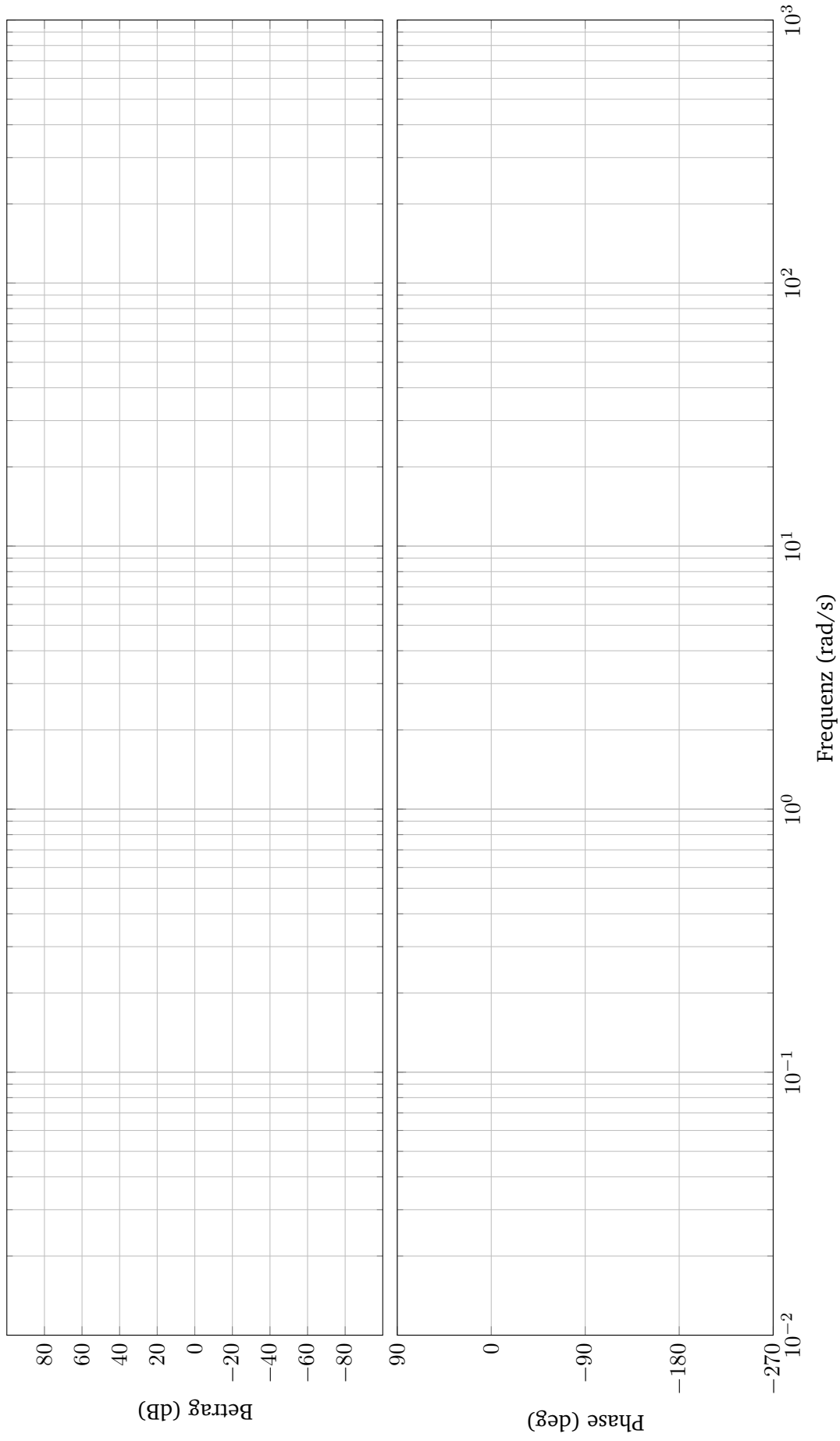


Abb. 4.3: Bodediagramm für Aufgabe 3

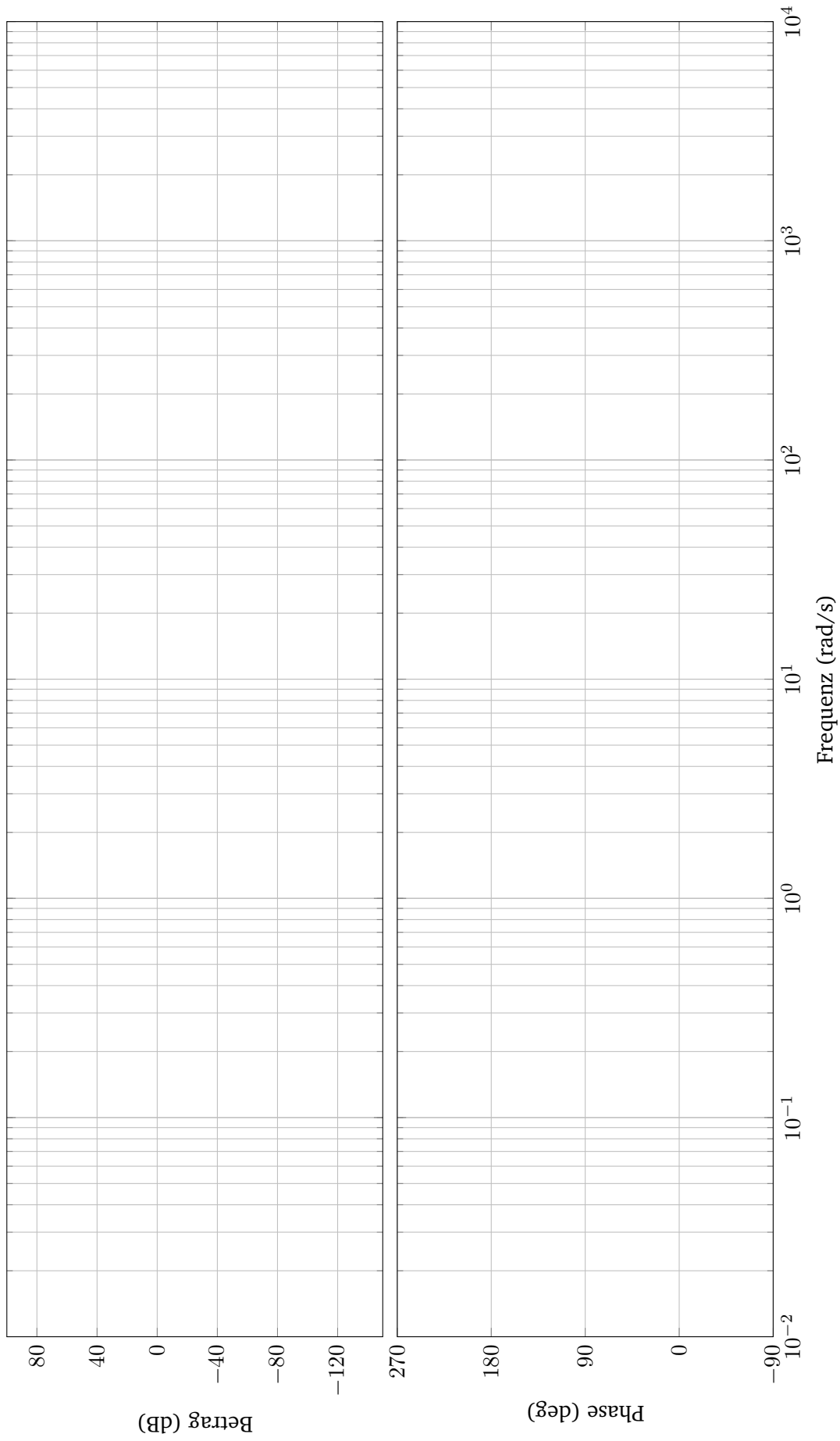


Abb. 4.4: Bodediagramm für Aufgabe 4

Prof. Dr.–Ing. habil. Thomas Meurer, Lehrstuhl für Regelungstechnik

**Lösung 1.** Mittels Ablesen der Null- und Polstellen erhält man

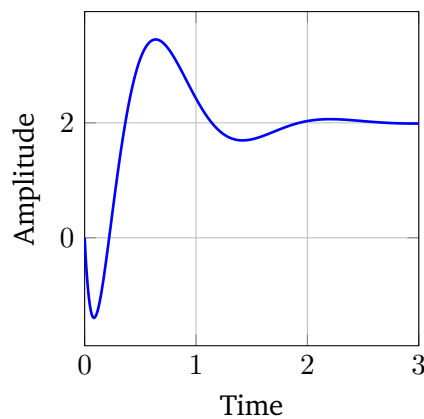
$$\hat{g}(s) = \frac{k(s-5)(s+3)(s+6)}{(s^2+4s+20)(s+9)(s+10)} \quad (4.1)$$

Zur Bestimmung der stationären Verstärkung verwendet man den Grenzwertsatz (FS. S 13) mit dem Einheitssprung  $\hat{u}(s) = s^{-1}$  (FS S. 14). Dies führt auf

$$V = \lim_{s \rightarrow 0} s\hat{g}(s)s^{-1} = -\frac{k}{20}, \quad (4.2)$$

woraus für die geforderte stationäre Verstärkung  $V = 2$  der Faktor  $k = -40$  folgt.

- BIBO-stabilität: Ja
- Sprungfähigkeit: Nein
- Phasenminimalität: Nein



**Abb. 4.5:** Step response of  $\hat{g}(s)$ .

## Lösung 2. (I) $\hat{l}_1(s)$

Zunächst bestimmt man

$$\hat{l}_1(i0) = -\frac{4}{1} \quad (4.3)$$

und

$$\hat{l}_1(i\infty) = 0. \quad (4.4)$$

Die entsprechende Phase für ein beliebiges  $\omega$  erhält man über den Zusammenhang

$$\begin{aligned} \arg(\hat{l}_1(i\omega)) &= \arg(1 + i\omega) - \arg((i\omega)^2 - 1) - \arg(1 + 0.5i\omega) - \arg(1 + 0.3i\omega) \\ &= \arctan(\omega) - \pi - \arctan(0.5\omega) - \arctan(0.3\omega). \end{aligned}$$

Für  $0 < \omega \ll 1$  gilt

$$\arctan(\omega) > \arctan(0.5\omega) + \arctan(0.3\omega),$$

also

$$\arctan(\omega) - \arctan(0.5\omega) - \arctan(0.3\omega) > 0,$$

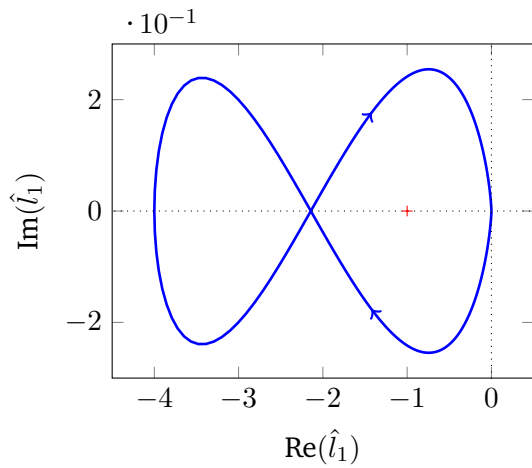
wodurch sich  $\arg(\hat{l}_1(i\omega)) > -\pi$  ergibt, sodass die Nyquistkurve von ihrem linken Extremum bei  $-4$  für  $\omega = 0$  mit steigendem  $\omega$  nach unten rechts läuft. Mit Hilfe dieser Informationen ist der Umlaufsinn bestimmt, welcher in Abbildung 4.6a dargestellt ist.

Zur Bestimmung der Stabilität des geschlossenen Regelkreises wird das Nyquist-Kriterium ausgewertet (Satz 5.5 in der Formelsammlung)

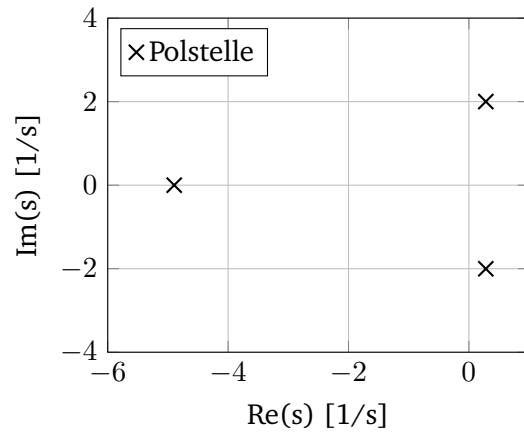
$$-2\pi \neq +2\pi. \quad (4.5)$$

Folglich ist das System nicht eingangs–ausgangs–stabil.

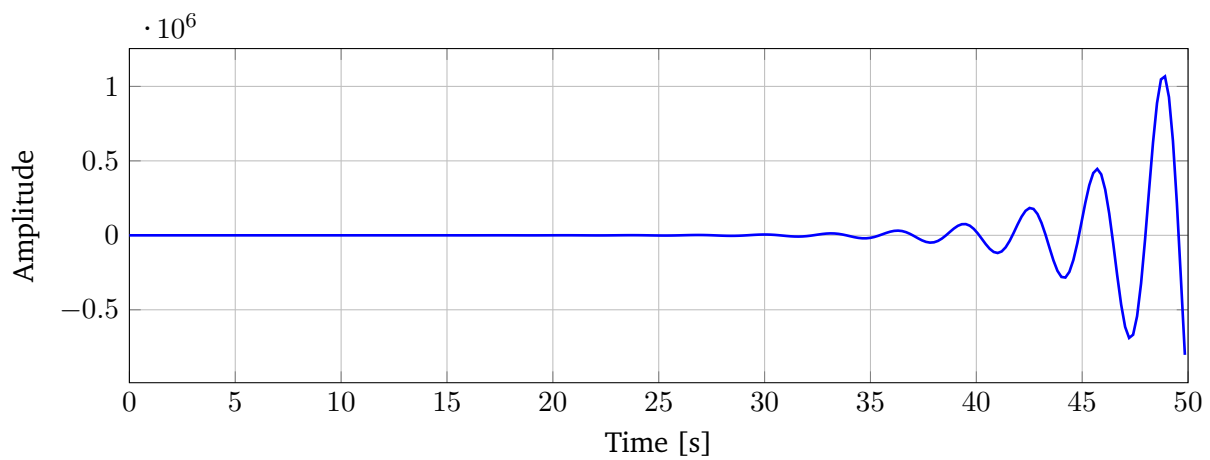
Zur Veranschaulichung ist in Abbildung 4.6 das Nyquistdiagramm mit Umlaufsinn, die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises, das Pol-Nullstellendiagramm und das Bodediagramm dargestellt.



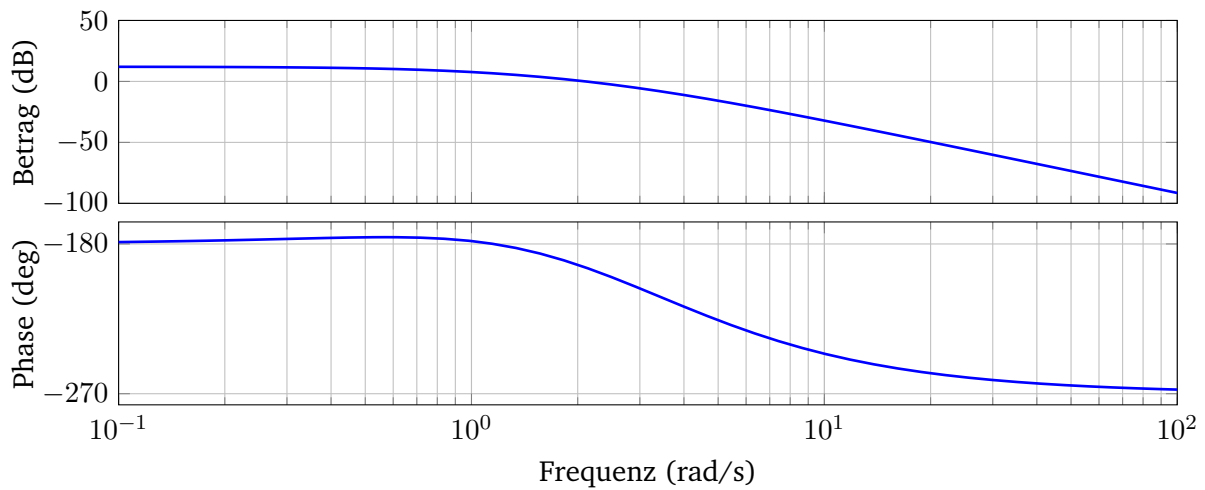
(a) Nyquistkurve der Übertragungsfunktion.



(b) Pol- und Nullstellendiagramm des geschl. Regelkreises.



(c) Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises.



(d) Bodediagramm der Übertragungsfunktion.

**Abb. 4.6:** Lösung zu Aufgabe 2 mit der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises  $\hat{l}_1$ .

## (II) $\hat{l}_2(s)$

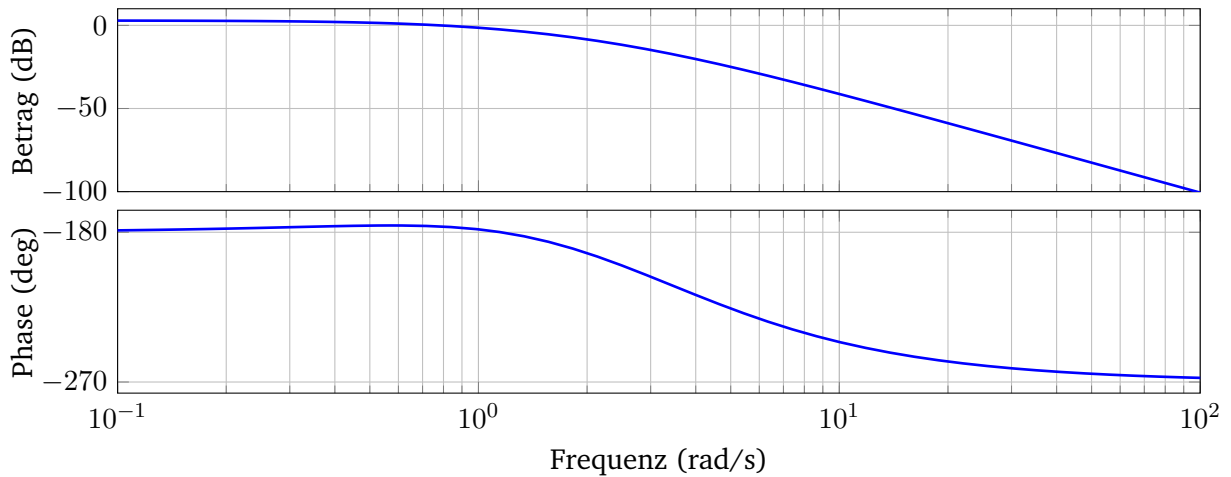
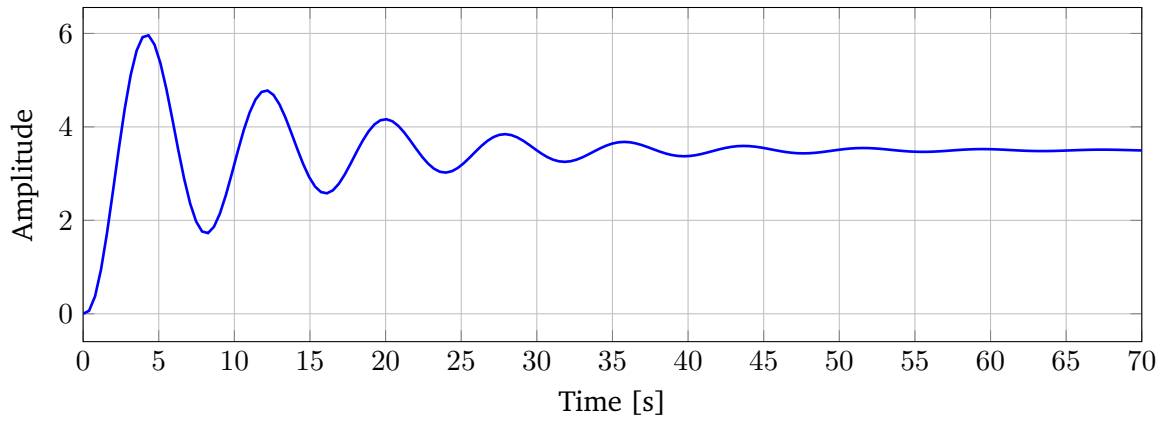
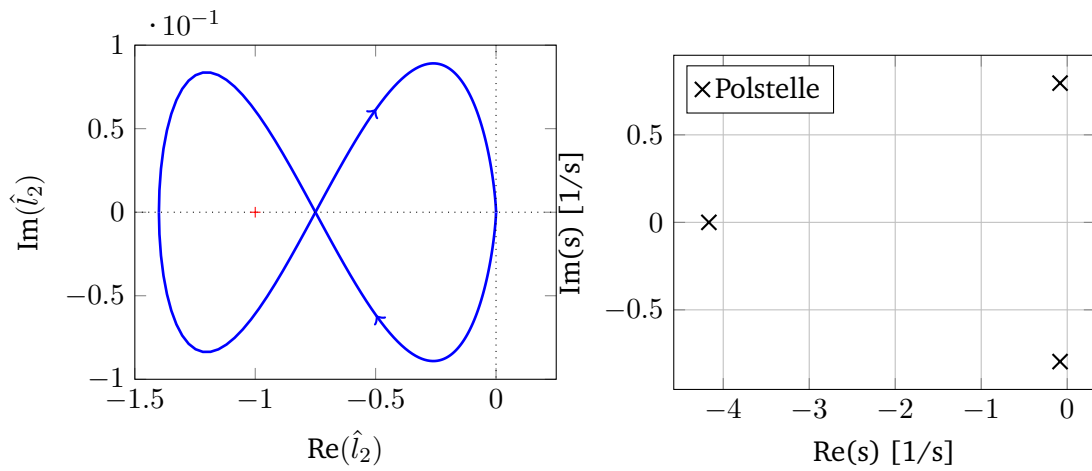
Durch den Zusammenhang

$$\hat{l}_2(s) = \frac{1.4}{4} \hat{l}_1(s)$$

können die gesuchten Punkte in der Ortskuve ( $\hat{l}_2(i0) = -1.4 = 1.4e^{-i\pi}$  und  $\hat{l}_2(i\infty) = 0$ ), sowie der Durchlaufsinne ohne Rechnung bestimmt werden.

Gemäß des Nyquist-Kriteriums ist der geschlossene Regelkreis eingangs–ausgangs–stabil. Dies wird in Abbildung 4.7 mit Hilfe der Sprungantwort (Abbildung 4.7c), des Pol- und Nullstellendiagramms (Abbildung 4.7b) und des Bodediagramms (Abbildung 4.7d) verdeutlicht.





**Abb. 4.7:** Lösung zu Aufgabe 2 mit der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises  $\hat{l}_2$ .

### (III) $\hat{l}_3(s)$

Zur Bestimmung der Punkte  $\omega = \pm 0$  und  $\omega = \pm\infty$  bietet es sich an, den Betrag der Übertragungsfunktion  $\hat{l}_3(s)$  zu untersuchen. Es lässt sich ablesen, dass

$$|\hat{l}_3(i0^\pm)| = \infty \quad \text{und} \quad |\hat{l}_3(\pm i\infty)| = 0 \quad (4.6)$$

gilt. Die Phase ergibt sich zu

$$\arg(\hat{l}_3(i\omega)) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 3 \arctan(\omega) - \arctan(0.5\omega), & \text{für } \omega > 0 \\ -\frac{\pi}{2} + 3 \arctan(\omega) - \arctan(0.5\omega), & \text{für } \omega < 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

womit der in Abbildung 4.8a dargestellte Umlaufsinn bestimmt wird.

Alternativ kann man die Übertragungsfunktion auch in Real- und Imaginärteil aufspalten

$$\hat{l}_3(i\omega) = -\frac{10 + 2\omega^2}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4} - i \frac{-4 + 6\omega^2 + 2\omega^4}{\omega^5 + 5\omega^3 + 4\omega}. \quad (4.8)$$

Aus dieser Form lassen sich die Werte für verschiedene  $\omega$  einfach bestimmen

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \operatorname{Re}(\hat{l}_3(j\omega)) = 0 \quad \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \operatorname{Im}(\hat{l}_3(j\omega)) = 0 \quad (4.9)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Re}(\hat{l}_3(j\omega)) = -2.5 \quad \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Im}(\hat{l}_3(j\omega)) = \infty \quad (4.10)$$

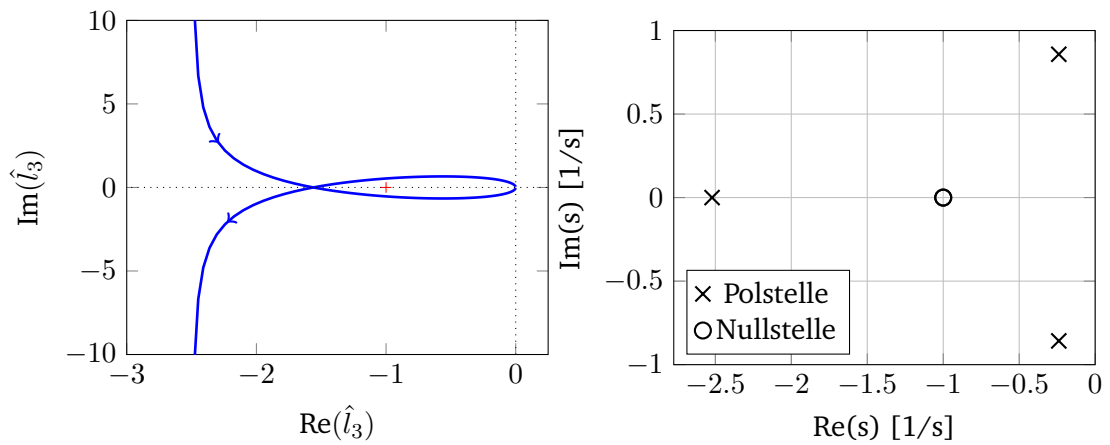
$$\lim_{\omega \rightarrow 0^-} \operatorname{Re}(\hat{l}_3(j\omega)) = -2.5 \quad \lim_{\omega \rightarrow 0^-} \operatorname{Im}(\hat{l}_3(j\omega)) = -\infty \quad (4.11)$$

so dass sich der Umlaufsinn wie in Abbildung 4.8a dargestellt ergibt.

Die Phasenänderung ergibt sich durch Ablesen aus dem Nyquistdiagramm zu

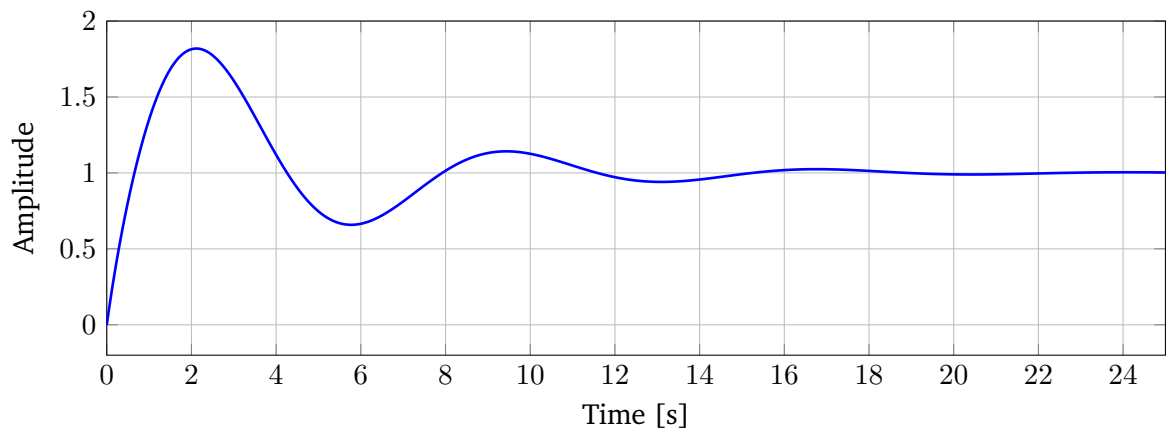
$$\Delta \arg(\hat{l}_3(i\omega) + 1) = +3\pi. \quad (4.12)$$

Der geschlossene Regelkreis ist somit gemäß dem Nyquistkriterium eingangs-ausgangs-stabil. Dies ist in Abbildung 4.8 anhand der Sprungantwort (Abbildung 4.8c) sowie des Pol-Nulstellendiagramms (Abbildung 4.8b) veranschaulicht. Abbildung 4.8d zeigt das dazugehörige Bodediagramm.

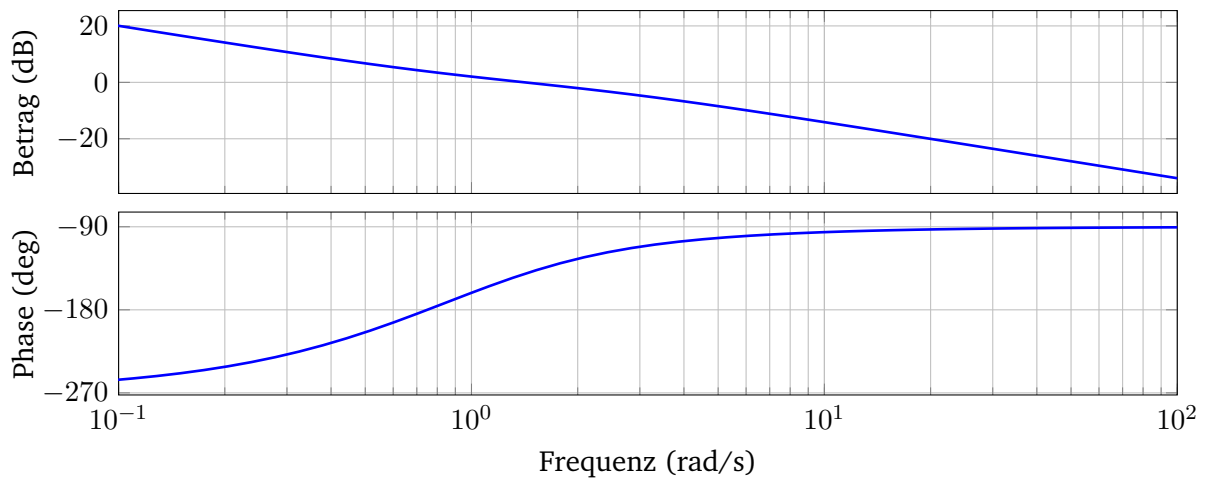


(a) Nyquistkurve der Übertragungsfunktion.

(b) Pol- und Nullstellendiagramm des geschl. Regelkreises.



(c) Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises.



(d) Bodediagramm der Übertragungsfunktion.

**Abb. 4.8:** Lösung zu Aufgabe 2 mit der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises  $\hat{l}_3$ .

#### (IV) $\hat{l}_4(s)$

Man bemerke, dass

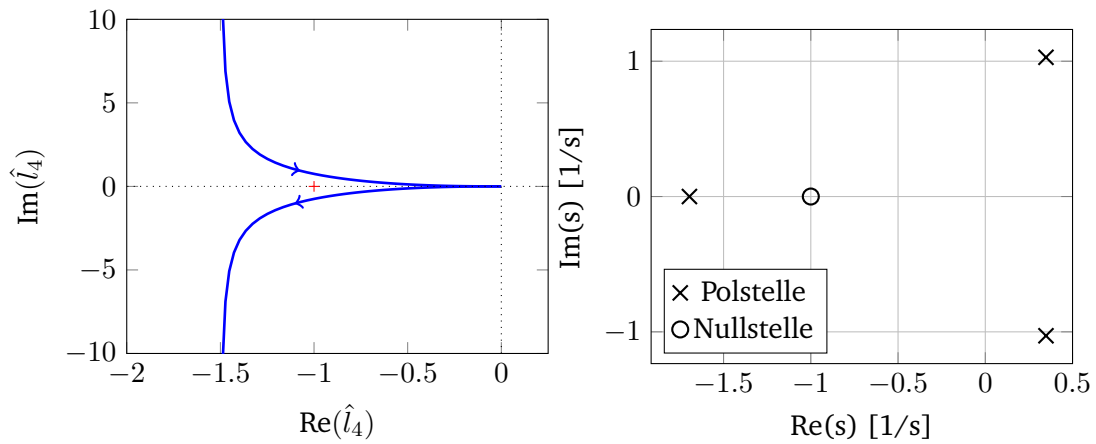
$$\hat{l}_4(s) = \frac{(1+s)^2}{s(s^2-1)(1+0.5s)} = \hat{l}_3(i\omega) \frac{1-i\omega}{1+\omega^2} \quad (4.13)$$

gilt.

Dementsprechend ist der Umlaufsinn der Ortskurve derselbe wie bei  $\hat{l}_3$ , jedoch flacher für große  $\omega$ . Die Phasenänderung wird durch die Multiplikation mit dem PT1-Glied beeinflusst, da der Punkt  $(-1, 0)$  nicht mehr umschlossen wird (siehe Abbildung 4.9a) und beträgt

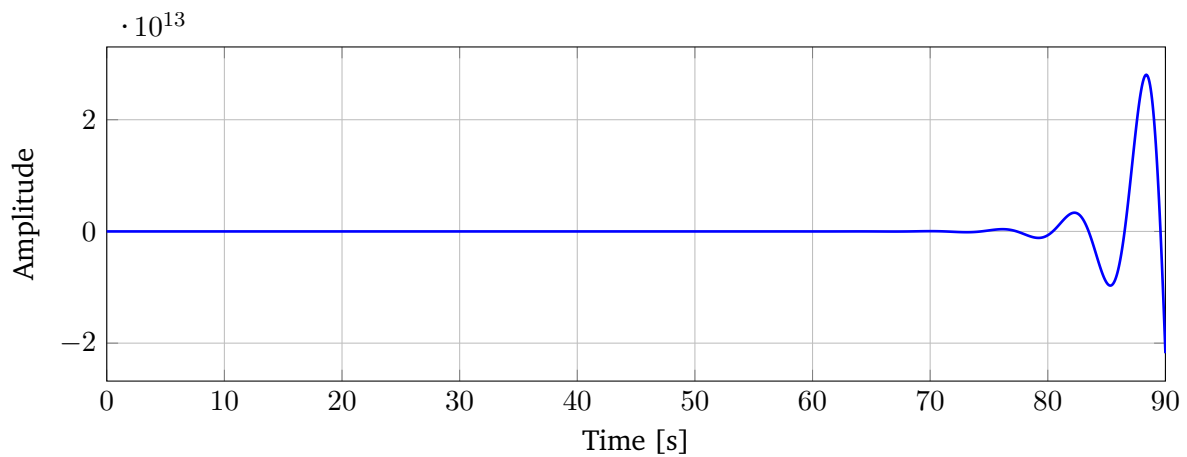
$$\Delta \arg(\hat{l}_3(i\omega) + 1) = -\pi. \quad (4.14)$$

Hieraus folgt direkt die Instabilität des geschlossenen Regelkreises. Im Bodediagramm wird dies durch die Absenkung der Phase in  $\omega = 1 = 10^0$  um  $-\pi/2$  durch das PT1-Glied deutlich (vgl. Abbildung 4.9d), wodurch die Phase  $-\pi$  nicht mehr überschreitet. In Abbildung 4.9 wird das Verhalten durch die Sprungantwort (Abbildung 4.9c) und das Pol-Nullstellendiagramm (Abbildung 4.9b) veranschaulicht.

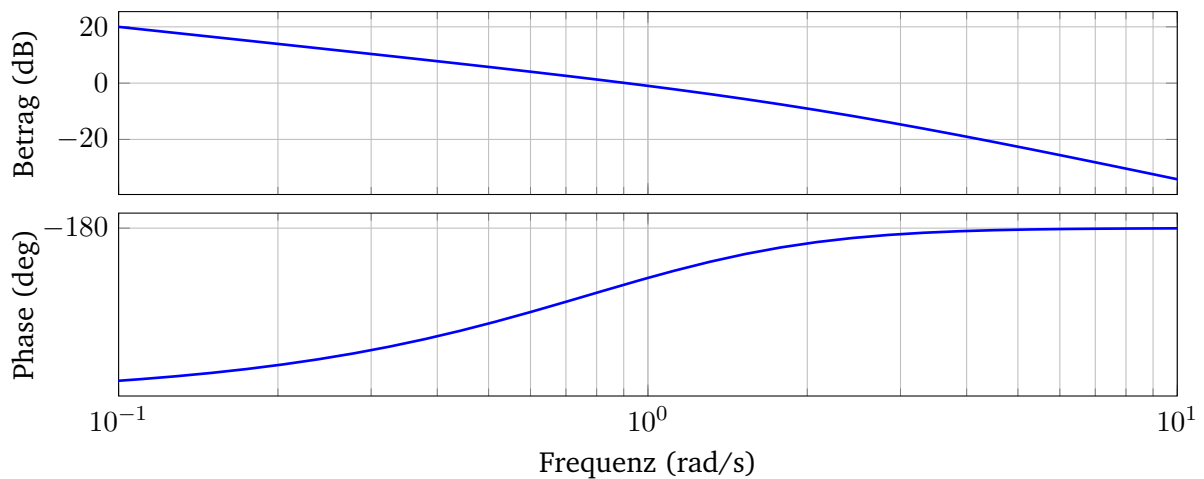


(a) Nyquistkurve der Übertragungsfunktion.

(b) Pol- und Nullstellendiagramm des geschl. Regelkreises.



(c) Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises.



(d) Bodediagramm der Übertragungsfunktion.

**Abb. 4.9:** Lösung zu Aufgabe 2 mit der Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises  $\hat{l}_4$ .

**Lösung 3.** Es gilt

$$\hat{g}(s) = \frac{40 \left(1 + \frac{s}{20}\right)}{s(1+s) \left(1 + \frac{s}{4}\right)}. \quad (4.15)$$

Zur Konstruktion des Bodediagramms wird zunächst der Einfluss des Verstärkungsfaktors berechnet

$$40 \approx 32 \text{ dB}. \quad (4.16)$$

Der Beitrag der entsprechenden Teilübertragungsfunktionen, sowie die Resultierende sind in Abbildung 4.11 dargestellt.

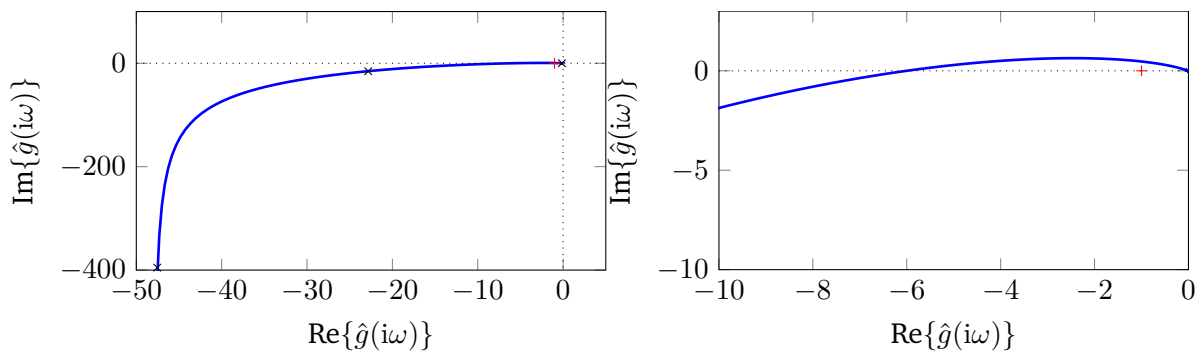
Für die Konstruktion des Nyquistdiagramms kann die Information über Amplitude und Phase mittels der Beziehung

$$\hat{g}(i\omega) = |\hat{g}(i\omega)| e^{i\arg(\hat{g}(i\omega))} = |\hat{g}(i\omega)| (\cos(\omega) + i \sin(\omega)). \quad (4.17)$$

verwendet werden. Durch Ablesen erhält man die in Tabelle 4.1 dargestellten Werte. Die dazugehörige Ortskurve ist in Abbildung 4.10 dargestellt.

$\omega$	$ \hat{g}(i\omega) _{\text{dB}}$	$ \hat{g}(i\omega) $	$\arg(\hat{g}(i\omega))$
$10^{-1}$	52	398.1	$-96.9^\circ$
$10^0$	28.8	27.54	$-146^\circ$
$10^1$	-15.6	0.17	$-216^\circ$
$10^2$	-61.8	$8.9 \cdot 10^{-4}$	$-188^\circ$
$10^3$	-102	$7.9 \cdot 10^{-6}$	$-181^\circ$

**Tab. 4.1:** Betrag und Argument von  $\hat{g}(s)$ , abgelesen aus Abbildung 4.11.



**Abb. 4.10:** Nyquist-Ortskurve von  $\hat{g}(s)$  (Aufgabe 3).

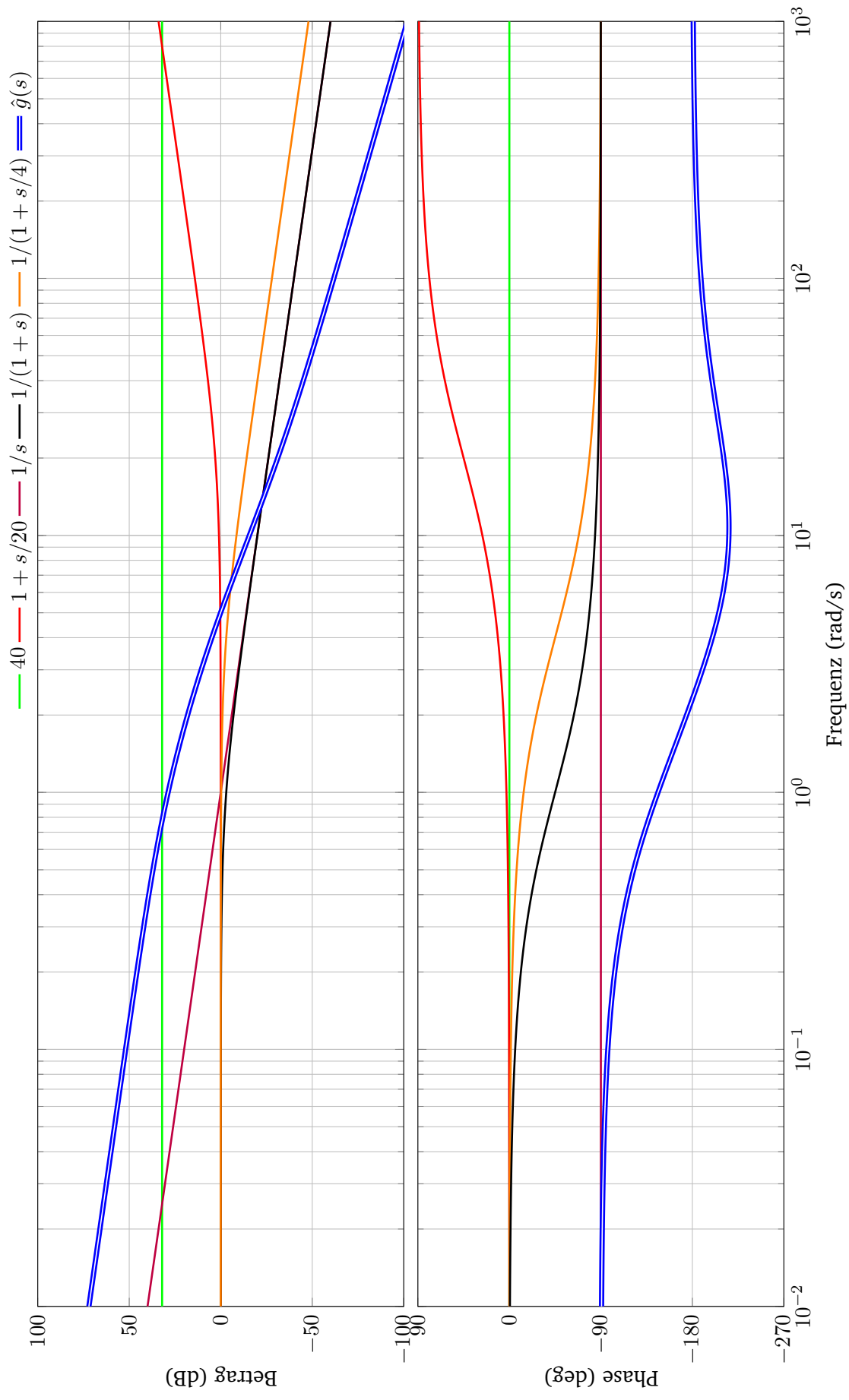


Abb. 4.11: Bodediagramm für Aufgabe 3.

**Lösung 4.** Man beachte, dass das Zählerpolynom als Produkt geschrieben werden kann und bestimme zunächst die Übertragungsfunktion in Normalform

$$\hat{g}(s) = \frac{10 + 9s - s^2}{(s^2 - 0.4s + 1)(s + 100)} = \frac{(1 + s)(1 - 0.1s)}{10(1 - 0.4s + s^2)(1 + 0.01s)}. \quad (4.18)$$

Für den Vorfaktor gilt

$$\frac{1}{10} = -20 \text{ dB}. \quad (4.19)$$

Der Beitrag der entsprechenden Teilübertragungsfunktionen, sowie die Resultierende sind in Abbildung 4.13 dargestellt.

Man erhält folgende Werte bei der numerischen Auswertung:

$\omega$	$ \hat{g}(j\omega) _{\text{dB}}$	$\arg(\hat{g}(j\omega))$
$10^1$	-36.9	211 °
$10^3$	-43	140 °

**Tab. 4.2:** Numerische Auswertung der Übertragungsfunktion  $\hat{g}(s)$  aus Aufgabe 4.



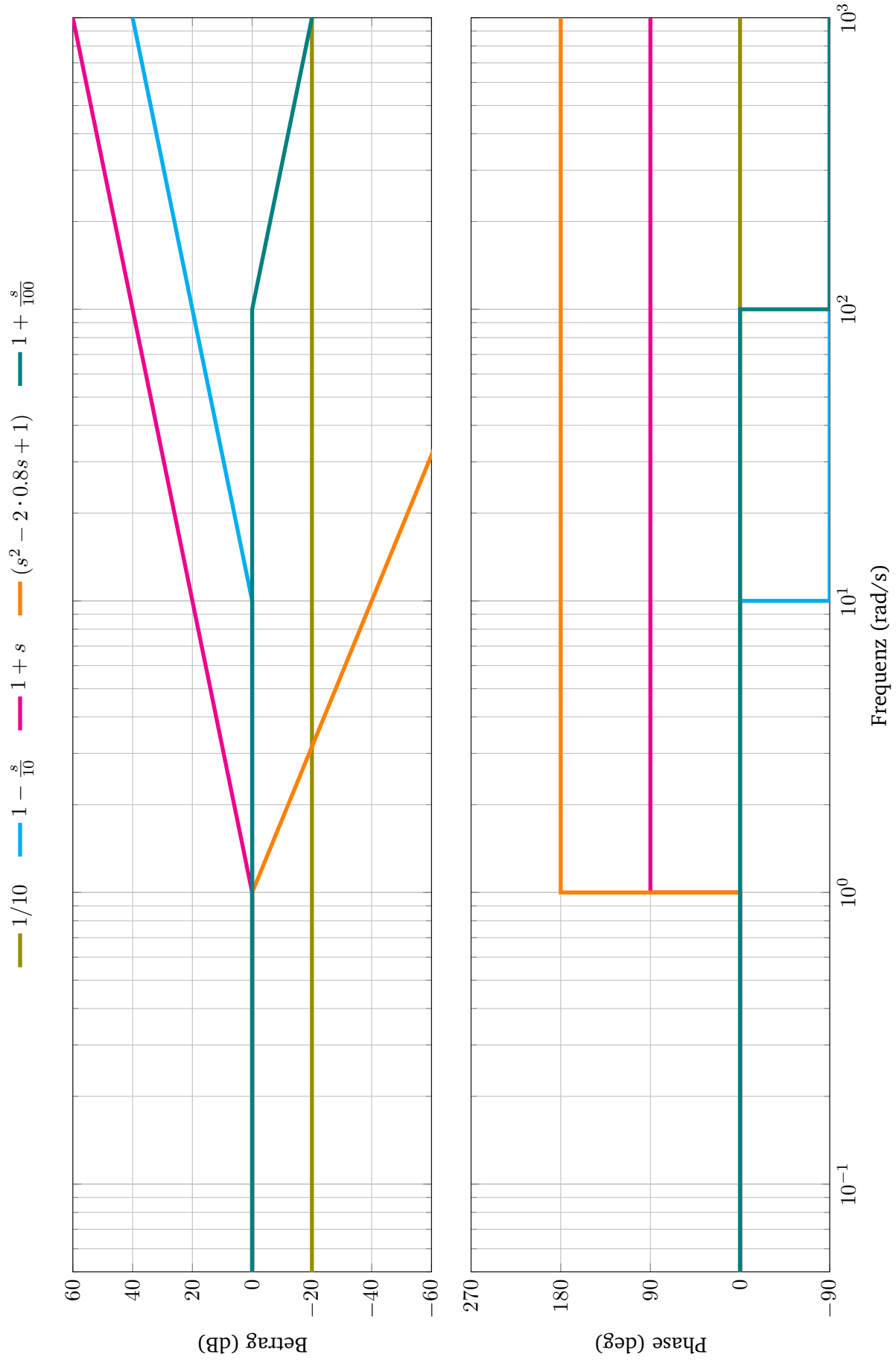


Abb. 4.12: Asymptoten für Aufgabe 4.

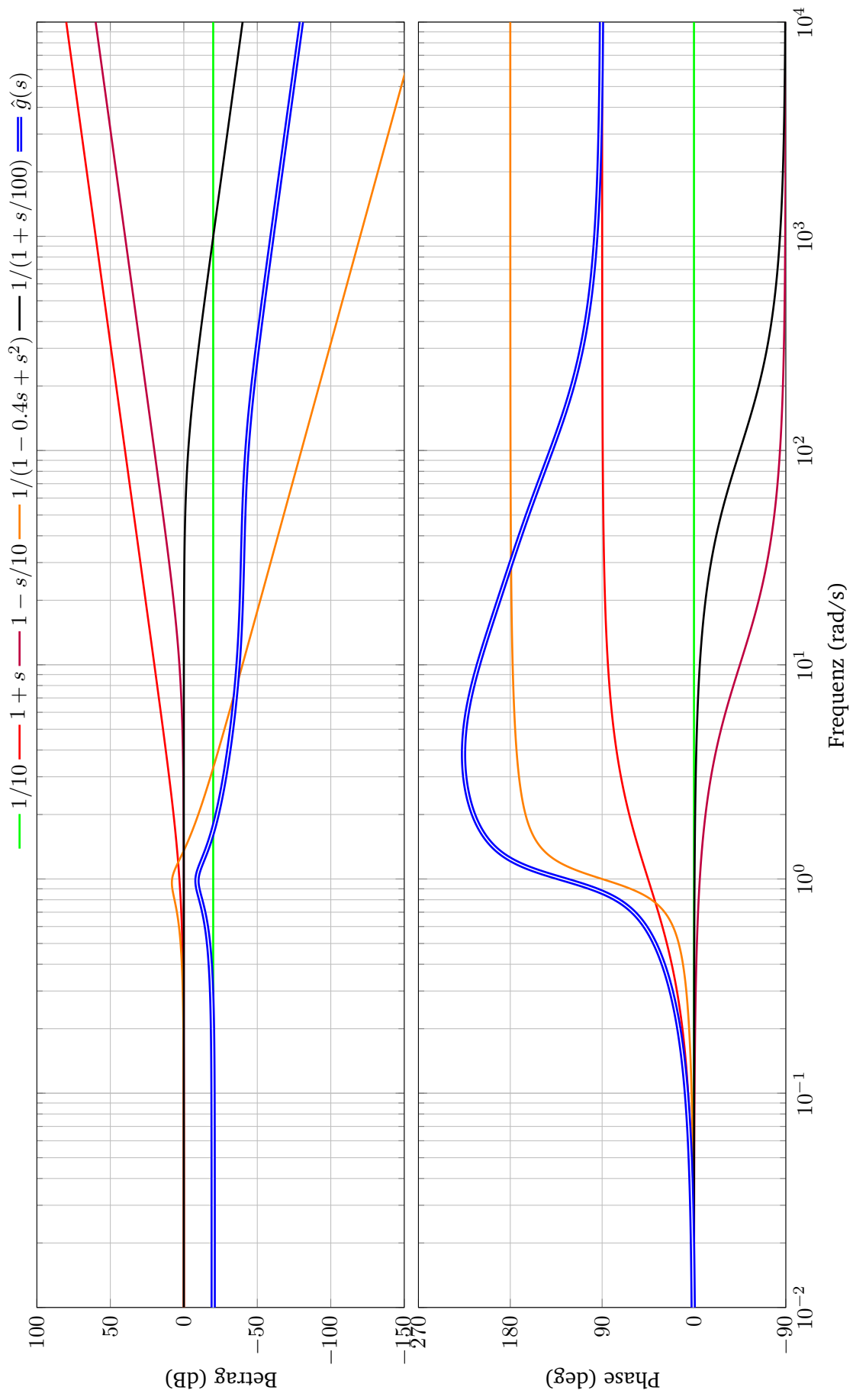


Abb. 4.13: Bodediagramm für Aufgabe 4.