Prof. Dr.–Ing. habil. Thomas Meurer, Lehrstuhl für Regelungstechnik

Aufgabe 1 (Bestimmung der Übertragungsfunktion aus Zustandsdarstellung). Gegeben sind die beiden linearen zeitkontinuierlichen Systeme

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u_1$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_1$$

und

$$\dot{\boldsymbol{x}}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u_2$$

$$y_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_2 + 3u_2.$$

Berechnen Sie die zugehörigen Übertragungsfunktionen $\hat{g}_1(s) = \hat{y}_1(s)/\hat{u}_1(s)$ und $\hat{g}_2(s) = \hat{y}_2(s)/\hat{u}_2(s)$. Analysieren Sie die Eingangs-Ausgangs-Stabilität sowie die Sprungfähigkeit der beiden Übertragungsfunktionen. Vergleichen Sie die Eingangs-Ausgangs-Stabilität mit der asymptotischen Stabilität der obigen Systeme für $u_1 = 0$ bzw. $u_2 = 0$.

Aufgabe 2 (Impulsantwort einer Übertragungsfunktion). Gegeben sei ein lineares, zeitinvariantes System beschrieben durch die Übertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{s^2 + 3\,s + 2}{s^2(s+3)}.$$

Berechnen Sie die Impulsantwort $g(t)$ des Systems mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Aufgabe 3 (Zweite Standardform / Beobachtungsnormalform). Berechnen Sie die Realisierung der Übertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{2s^4 + 3s^2 + 4s}{(2-s)(6+2s)(s^2+3s+4)}$$

in zweiter Standardform.

Aufgabe 4 (Eingeschwungene Lösung). Gegeben ist die Übertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{(2s-5)\,(s-3)}{(s^2+2\,s+2)(s+3)}.$$

Berechnen Sie die eingeschwungene Lösung für die Eingangsgröße

$$u(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{(t+3)} + 2.$$

Aufgabe 5 (Blockschaltbildalgebra). Für den in Abbildung 3.3 dargestellten Regelkreis sind Stör- und Führungsübertragungsfunktion anzugeben. Dabei sind $\hat{g}_1(s) = k_1,\ \hat{g}_2(s) = k_2,\ \hat{g}_3(s) = \frac{1}{1+s},\ \hat{g}_4(s) = \frac{1}{5\,s}$.

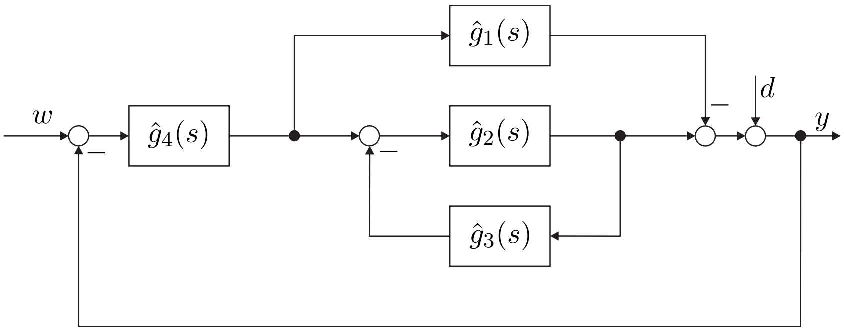

Abb. 3.1: Blockschaltbild des Regelkreises.

Aufgabe 6 (Blockschaltbildalgebra). Gegeben ist der Regelkreis nach Abbildung 3.2. Bestim-

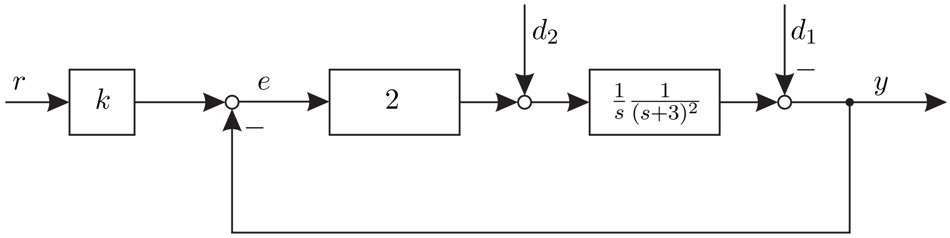

Abb. 3.2: Standardregelkreis mit Störungen d_1 und d_2.

men Sie zunächst k so, dass der Regelfehler e für $d_1(t) = d_2(t) = 0$ und $r(t) = \sigma(t)$ verschwindet. Berechnen Sie dann die bleibende Regelabweichung bei $r = 0$ für die Fälle

1 $d_1(t) = 0$, $d_2(t) = \sigma(t)$,

2 $d_1(t) = \sigma(t)$, $d_2(t) = 0$,

3 $d_1(t) = t$, $d_2(t) = 0$.

Lösung 1 (Bestimmung der Übertragungsfunktion aus Zustandsdarstellung). Übertragungsfunktion:

$$\hat{g}_1(s) = \frac{2(s-1)}{s^2+s-2} = \frac{2\cancel{(s-1)}}{\cancel{(s-1)}(s+2)} \tag{3.1}$$

$$\hat{g}_2(s) = \frac{3s^2+22s+54}{(s+1)(s+3)} = \frac{3(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}{(s+1)(s+3)}, \quad \text{mit} \quad \lambda_{1,2} = -\frac{11}{3} \pm j\frac{\sqrt{41}}{3} \tag{3.2}$$

Aus den Übertragungsfunktionen folgt, dass $\hat{g}_1(s)$ nicht sprungfähig und $\hat{g}_2(s)$ sprungfähig ist.

System 1 ist E/A-stabil da $\hat{g}_1(s)$ nur eine Polstelle bei $s_1 = -2$ aufweist.
System 2 ist E/A-stabil da die Polstellen von $\hat{g}_2(s)$ bei $s_1 = -1,\ s_2 = -3$ liegen.

System 1 ist nicht asymptotisch stabil, da die Eigenwerte bei $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$ liegen.
System 2 ist asymptotisch stabil, da die Eigenwerte bei $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -3$ liegen.

Lösung 2 (Impulsantwort einer Übertragungsfunktion).

$$\hat{g}(s) = \frac{s^2+3s+2}{s^2(s+3)} = \frac{2}{9}\frac{1}{s+3} + \frac{7}{9}\frac{1}{s} + \frac{2}{3}\frac{1}{s^2} \tag{3.3}$$

$$\hat{g}(s) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad g(t) = \Big(\frac{2}{9}\exp(-3t) + \frac{7}{9} + \frac{2}{3}t\Big), t > 0. \tag{3.4}$$

Lösung 3 (Zweite Standardform / Beobachtungsnormalform).

$$\hat{g}(s) = \frac{2s^4+3s^2+4s}{(2-s)(6+2s)(s^2+3s+4)} = \frac{-1s^4-1.5s^2-2s}{s^4+4s^3+s^2-14s-24} \tag{3.5}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 24 \\ 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} -24 \\ -16 \\ -0.5 \\ 4 \end{bmatrix} u \tag{3.6}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} - u \tag{3.7}$$

Lösung 4 (Eingeschwungene Lösung).

$$u(t) = \underbrace{\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)}_{u_1(t)} + \underbrace{2}_{u_2(t)} + \underbrace{\frac{1}{t+3}}_{=0 \text{ für } t\to\infty} \tag{3.8}$$

Dabei weisen die anregenden Signale folgende Frequenzen auf:

$$u_1:\ \omega_0 = 1\text{Hz},\quad u_2:\ \omega_1 = 0\,\text{Hz} \tag{3.9}$$

Mit Superpositionsprinzip folgt

$$\lim_{t\to\infty}(y(t)) = |\hat{g}(j\omega_0)|\cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{4} + \arg(\hat{g}(j\omega_0))) + 2|\hat{g}(j\omega_1)|\cos(\omega_1 t + \arg(\hat{g}(j\omega_1))). \tag{3.10}$$

Bestimmung von Betrag und Phase der Übertragungsfunktion:

$$|\hat{g}(j\omega)| = \frac{5}{2}\frac{|1-\frac{2}{5}j\omega|}{|1-\frac{1}{2}\omega^2 + j\omega|} \tag{3.11}$$

$$\arg(\hat{g}(j\omega)) = \arctan\left(-\frac{2}{5}\omega\right) + \arctan\left(-\frac{1}{3}\omega\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{1-\frac{\omega^2}{2}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{3}\omega\right) \tag{3.12}$$

Hieraus folgt die Lösung:

$$\lim_{t\to\infty}(y(t)) = 2.4\cos(t - \frac{\pi}{4} - 2.13) + 5. \tag{3.13}$$

Lösung 5 (Blockschaltbildalgebra).

$$\text{Führungsübertragungsfunktion:}\quad \hat{t}_{w,y}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{w}(s)};\quad \hat{d}(s) = 0 \tag{3.14}$$

$$\text{Störgrößenübertragungsfunktion:}\quad \hat{t}_{d,y}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{d}(s)};\quad \hat{w}(s) = 0 \tag{3.15}$$

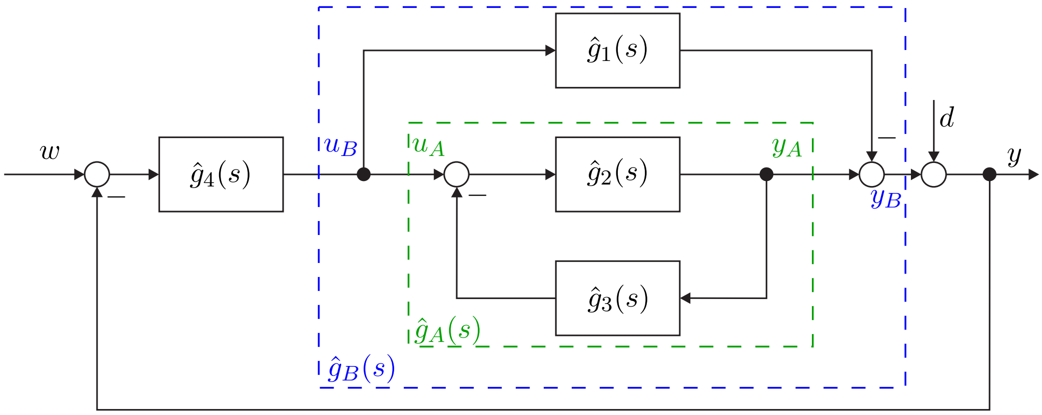

Abb. 3.3: Blockschaltbild des Regelkreises mit Definition der inneren Kreise.

Übertragngsfunktionen der inneren Kreise:

$$\hat{g}_A(s) = \frac{\hat{g}_2(s)}{1+\hat{g}_2(s)\hat{g}_3(s)} \tag{3.16}$$

$$\hat{g}_B(s) = \hat{g}_A(s) - \hat{g}_1(s) \tag{3.17}$$

Führungsübertragungsfunktion:

$$\hat{t}_{w,y}(s) = \frac{\hat{g}_4(s)\hat{g}_B(s)}{1+\hat{g}_4(s)\hat{g}_B(s)} = \frac{(k_2-k_1)s + k_2 - k_1 - k_1k_2}{5s^2 + (5+6k_2-k_1)s - k_1k_2 + k_2 - k_1} \tag{3.18}$$

Störgrößenübertragungsfunktion:

$$\hat{t}_{d,y}(s) = \frac{1}{1+\hat{g}_4(s)\hat{g}_B(s)} = \frac{5s^2 + 5(1+k_2)s}{5s^2 + (5+6k_2-k_1)s + k_2 - k_1 - k_1k_2} \tag{3.19}$$

Lösung 6 (Blockschaltbildalgebra). Bestimmung des stationären Regelfehlers $\lim\limits_{t\to\infty} e(t)$:

$$\hat{e}(s) = \hat{r}(s)k - \hat{y}(s) = \frac{s(s+3)^2\hat{r}(s)k - \hat{d}_2(s) + s(s+3)^2\hat{d}_1(s)}{s(s+3)^2+2} \tag{3.20}$$

Laut Aufgabe gilt: $d_1(t) = d_2(t) = 0$ und $r(t) = \sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \hat{r}(s) = \frac{1}{s}$

Bestimmung von k mittels Endwertsatz:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} \frac{s(s+3)^2k}{s(s+3)^2+2} = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{R} \tag{3.21}$$

Stationärer Regelfehler:

1. $\lim\limits_{t\to\infty} e(t) = -\frac{1}{2}$
2. $\lim\limits_{t\to\infty} e(t) = 0$
3. $\lim\limits_{t\to\infty} e(t) = \frac{9}{2}$