Prof. Dr.–Ing. habil. Thomas Meurer, Lehrstuhl für Regelungstechnik

Aufgabe 1 (Linearität, Zeitinvarianz). Überprüfen Sie die folgenden dynamischen Systeme auf Linearität bzw. Zeitinvarianz.

(i) $\tan\left(\frac{1}{5}\pi\right)\ddot{y} + 8y = \frac{3}{10}u$

(ii) $\sqrt{2}y^{(3)} - 5\ddot{y} + \frac{1}{(1+t)}y = \int_0^t 2u(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{6}\dot{u}$

(iii) $3\ddot{y} - \frac{1}{10}\dot{y}y = 7tu$

Aufgabe 2 (Jordansche Normalform). Gegeben sind die beiden autonomen Systeme

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_1} \boldsymbol{x} \tag{2.1}$$

und

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_2} \boldsymbol{x}\,. \tag{2.2}$$

Berechnen Sie die regulären Zustandstransformationen $\boldsymbol{x} = V_1\boldsymbol{z}$ und $\boldsymbol{x} = V_2\boldsymbol{z}$, die die Systeme (2.1) und (2.2) in die Jordansche Normalform transformieren. Geben Sie außerdem die Matrizen A_1 und A_2 in Jordanscher Normalform an.

Aufgabe 3 (Reelle Jordansche Normalform). Gegeben ist das Modell eines linearen Feder-Masse-Dämpfer-Systems

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{2.3}$$

mit der Federsteifigkeit k, der Dämpfungskonstante d, der Masse m und $u = F$ als Kraft auf die Masse. Für die Parameter gelte $d^2 < 4km$.

Berechnen Sie die reguläre Zustandstransformation $\boldsymbol{x} = V\boldsymbol{z}$, die das System (2.3) in die *reelle* Jordansche Normalform transformiert und geben Sie das entsprechende transformierte System an.

Aufgabe 4 (Transitionsmatrix). Berechnen Sie die Transitionsmatrizen Φ der Systeme (2.1), (2.2) und (2.3). Berechnen Sie die Lösung $\boldsymbol{x}(t)$ des Systems

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A_1\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{2.4}$$

mit A_1 aus (2.1) für die Eingangsgröße $u(t) = 1 + t$ und den Anfangswert $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Geben Sie die Lösung $\boldsymbol{x}(t)$ des Systems (2.3) für den Fall $u = 0$, $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ an.

Aufgabe 5 (Transitionsmatrix modifizierte Seilwinde). Betrachtet wird das lineare System der in Aufgabe 1.1 behandelten Seilwinde. Abweichend zur Aufgabe 1.1, wird hier die Hubgeschwindigkeit $v(t) = r\omega(t) = rx_3(t)$ als Ausgangsgröße $y(t)$ betrachtet, was eine Veränderung des Ausgangsvektors $\boldsymbol{c}^T$ nach sich zieht. Für die Seilwinde werden folgende Parameter angenommen:
$R_a = 2\,\Omega,\ L_a = 0.2\,\mathrm{H},\ \Phi_e = 1\,\mathrm{Vs},\ g = 9.81\,\mathrm{ms}^{-1},\ k_1 = 0.5,\ k_2 = 0.5,\ \Theta = 0.02\,\mathrm{kgm}^2,$
$\mu_R = 1/6\,\mathrm{kgms},\ r = 0.4\,\mathrm{m},\ m = 1\,\mathrm{kg}$
Das System wird bei einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $x_{3,R} = \omega(t) = 1\,\mathrm{rads}^{-1}$ betrieben, daraus ergibt sich folgender Arbeitspunkt $\boldsymbol{x}_R = \begin{bmatrix} 8.848\,\mathrm{A} & 0 & 1\,\mathrm{rads}^{-1} \end{bmatrix}^T,\ u_R = 18.196\,\mathrm{V}$.

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\boldsymbol{x}} &= A\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} + \Delta u, & t &> 0, & \Delta\boldsymbol{x}_0 &= \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_R \\ \Delta y &= \boldsymbol{c}^T\Delta\boldsymbol{x} + d\Delta u, & t &\geq 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 & -\frac{k_1\Phi_e}{L_a} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2\Phi_e}{\Theta} & 0 & -\frac{\mu_R}{\Theta}3x_{3,R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & -2.5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 25 & 0 & -25 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad d = 0.$$

Berechnen Sie die Transitionsmatrix Φ des Systems (2.5) mit Hilfe der Laplace–Transformation. Berechnen Sie den Verlauf des Ausgangs $y(t)$ für die Anfangsbedingung $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ und die Stellgröße $u(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$.

Lösungen zu Aufgabe 1:

(i) $\tan\left(\frac{1}{5}\pi\right)\ddot{y} + 8y = \frac{3}{10}u$
Mit den Zuständen $x_1 = y,\ x_2 = \dot{y}$ ergibt sich

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{8}{\tan\left(\frac{1}{5}\pi\right)} & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{10\tan\left(\frac{1}{5}\pi\right)} \end{bmatrix} u \quad \Rightarrow \quad \text{linear u. zeitinvariant.} \tag{2.6}$$

(Der Ausgangs ist nicht definiert, eine sinnvolle Wahl wäre $y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$.)

(ii) $\sqrt{2}y^{(3)} - 5\ddot{y} + \frac{1}{(1+t)}y = \int_0^t 2u(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{6}\dot{u}$
Mit den Zuständen $x_1 = y,\ x_2 = \dot{y},\ x_3 = \ddot{y},\ x_4 = \int\limits_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau,\ x_5 = u(t)$ und dem Eingang $v = \dot{u}$ ergibt sich:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{(1+t)\sqrt{2}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{6\sqrt{2}} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \tag{2.7}$$

$\Rightarrow$ $A = A(t)$ das System ist linear und zeitvariant.

(Der Ausgangs ist nicht definiert, eine sinnvolle Wahl wäre $y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$.)

(iii) $3\ddot{y} - \frac{1}{10}\dot{y}y = 7tu$
Mit den Zuständen $x_1 = y,\ x_2 = \dot{y}$ ergibt sich:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{30}x_1x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{7}{3}t \end{bmatrix} u \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A = A(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(t) \text{ das System ist} \\ \text{nichtlinear und zeitvariant.} \end{array} \tag{2.8}$$

(Der Ausgangs ist nicht definiert, eine sinnvolle Wahl wäre $y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$.)

◇

Lösungen zu Aufgabe 2:

System 1
Eigenwerte

$$\det(A_1 - \lambda E) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) \underbrace{=}_{\substack{\text{Entw.satz v.} \\ \text{Laplace}}} (2-\lambda)\det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= (2-\lambda)^2(1-\lambda)$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \text{mit algebraischer Vielfachheit} \quad n_1 = 2, \tag{2.9}$$
$$\lambda_2 = 1, \quad \text{mit algebraischer Vielfachheit} \quad n_2 = 1. \tag{2.10}$$

Die geometrische Vielfachheit ergibt sich zu:

$$g_1 = n - \text{rang}(A - \lambda_1 E) = 2 \tag{2.11}$$

$$g_2 = 1, \quad \text{da gilt:} \quad n_k \geq g_k \geq 1. \tag{2.12}$$

Da die algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen kann die Matrix diagonalisiert werden (es existieren drei linear unabhängige Eigenvektoren).

Für die Eigenvektoren gilt

$$(A_1 - \lambda_1 E)\boldsymbol{v}_{11/12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11/12,1} \\ v_{11/12,2} \\ v_{11/12,3} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

woraus folgt, dass

$$v_{11/12,3} = 0, \; v_{11/12,1}, v_{11/12,2} \in \mathbb{R}, \quad \hookrightarrow \quad \text{Wahl: } v_{11,1} = 1, v_{11,2} = 0, v_{12,1} = 0, v_{12,2} = 1$$

sowie

$$(A_1 - \lambda_2 E)\boldsymbol{v}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21,1} \\ v_{21,2} \\ v_{21,3} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

und somit

$$v_{21,1} = 0, \; v_{21,1} = v_{21,2} \in \mathbb{R}, \quad \hookrightarrow \quad \text{Wahl:} \quad v_{21,1} = 1.$$

Man erhält somit die Eigenvektoren

$$\boldsymbol{v}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad \boldsymbol{v}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad \boldsymbol{v}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{2.13}$$

Die Transformationsmatrix ist somit gegeben durch

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; V_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Die zugehörige Jordannormalform lautet somit

$$\tilde{A}_1 = V_1^{-1} A_1 V_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

System 2
Eigenwerte

$$\lambda_1 = 2, \quad \text{mit algebraischer Vielfachheit} \quad n_1 = 2, \tag{2.16}$$

$$\lambda_2 = 1, \quad \text{mit algebraischer Vielfachheit} \quad n_2 = 1. \tag{2.17}$$

Die geometrische Vielfachheit ergibt sich zu:

$$g_1 = n - \text{rang}(A - \lambda_1 E) = 1 \tag{2.18}$$

$$g_2 = 1, \quad \text{da gilt:} \quad n_k \geq g_k \geq 1. \tag{2.19}$$

Für die (generalisierten) Eigenvektoren gilt

$$(A_2 - \lambda_1 E)\boldsymbol{v}_{11}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11,1}^{(1)} \\ v_{11,2}^{(1)} \\ v_{11,3}^{(1)} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

und somit

$$v_{11,2}^{(1)} + 2v_{11,3}^{(1)} = 0, \; -v_{11,3}^{(1)} = 0$$
$$\Rightarrow \; v_{11,2}^{(1)} = v_{11,3}^{(1)} = 0, \; v_{11,1}^{(1)} \in \mathbb{R}, \quad \text{Wahl: } v_{11,1}^{(1)} = 1.$$

sowie

$$(A_2 - \lambda_2 E)\boldsymbol{v}_{11}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11,1}^{(2)} \\ v_{11,2}^{(2)} \\ v_{11,3}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{v}_{11}^{(1)}$$

und somit

$$v_{11,2}^{(2)} + 2v_{11,3}^{(2)} = 1, \; -v_{11,3}^{(2)} = 0$$
$$\Rightarrow \; v_{11,2}^{(2)} = 1, \; v_{11,3}^{(2)} = 0, \; v_{11,1}^{(2)} \in \mathbb{R}, \quad \text{Wahl: } v_{11,1}^{(2)} = 0$$

Des Weiteren gilt

$$(A_2 - \lambda_2 E)\boldsymbol{v}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21,1} \\ v_{21,2} \\ v_{21,3} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

und somit

$$v_{21,1} + v_{21,2} + 2v_{21,3} = 0, \; v_{21,2} - v_{21,3} = 0$$
$$\Rightarrow \; v_{21,1} = -3v_{21,3}, \; v_{21,2} = v_{21,3}, \; v_{21,3} \in \mathbb{R}, \quad \text{Wahl: } v_{21,3} = 1.$$

Man erhält somit die Eigenvektoren

$$\boldsymbol{v}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad \boldsymbol{v}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad \boldsymbol{v}_{21} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{2.20}$$

und die zugehörige Transformationsmatrix

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; V_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.21}$$

Die zugehörige Jordansche Normalform der Matrix ist gegeben durch

$$\tilde{A}_2 = V_2^{-1} A_2 V_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

◇

Lösungen zu Aufgabe 3:

Eigenwerte

$$\det(A-\lambda E) = \lambda\Big(\frac{d}{m}+\lambda\Big)+\frac{k}{m} = \lambda^2+\frac{d}{m}\lambda+\frac{k}{m} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4m^2}-\frac{k}{m}} = -\underbrace{\frac{d}{2m}}_{\alpha} \pm j\underbrace{\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{d^2}{4m^2}}}_{\beta} \tag{2.23}$$

Unter der in der Aufgabenstellung gegebenen Bedingung $d^2 < 4km$ ergeben sich konjugiert **komplexe Eigenwerte** $\lambda_1 = -\alpha + j\beta$ und $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -\alpha - j\beta$, was zu **konjugiert komplexe Eigenvektoren** führt. Um die nachfolgenden Rechnungen zu vereinfachen wird die Matrix A mittels der kompakteren Termne α und β wie folgt umgeschrieben

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha^2+\beta^2) & -2\alpha \end{bmatrix}. \tag{2.24}$$

Berechnung der Eigenvektoren:

$$(A-\lambda_1 E)\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \alpha - j\beta & 1 \\ -(\alpha^2+\beta^2) & -\alpha - j\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Erweitert man die 2. Zeile konjugiert komplex mit $\frac{(-\alpha+j\beta)}{\alpha^2+\beta^2}$ so erhält man

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \alpha - j\beta & 1 \\ \alpha - j\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Die sich ergebenen Zeilenvektoren der Matrix auf der linken Seite sind linear abhängig, weshalb keine eindeutige Lösung des zugeordneten Gleichungssystem möglich ist. Alle Lösungen müssen jedoch die Gleichung

$$v_{1,2} = -(\alpha - j\beta)v_{1,1} \tag{2.25}$$

erfüllen. Wählt man beispielsweise $v_{1,1} = \alpha + j\beta$ so ergibt sich $v_{1,2} = -(\alpha^2+\beta^2) \in \mathbb{R}$ und man erhält

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \alpha + j\beta \\ -(\alpha^2+\beta^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -(\alpha^2+\beta^2) \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.26}$$

Nach Satz 3.2 im Skript gilt

$$\boldsymbol{v}_2 = \bar{\boldsymbol{v}}_1$$

Die Transformationsmatrix lautet somit

$$V \underbrace{=}_{s.Formels.} \begin{bmatrix} \Re\{\boldsymbol{v}_1\} & \Im\{\boldsymbol{v}_1\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -(\alpha^2+\beta^2) & 0 \end{bmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\alpha^2+\beta^2} \\ \frac{1}{\beta} & \frac{\alpha}{\beta(\alpha^2+\beta^2)} \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

und die transformierten Systemmatrizen

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= V^{-1}AV \underbrace{=}_{vgl.\ Formels.} \begin{bmatrix} \Re\{\lambda_1\} & \Im\{\lambda_1\} \\ -\Im\{\lambda_1\} & \Re\{\lambda_1\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix}, \\ \tilde{\boldsymbol{b}} &= V^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{k} \\ \frac{\alpha}{k\beta} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{c}}^T = \boldsymbol{c}^T V = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.28}$$

Zusammenfassend erhält man die transformierte Zustandsdarstellung

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \tilde{A}\boldsymbol{z} + \tilde{\boldsymbol{b}}u, \quad y = \tilde{\boldsymbol{c}}^T\boldsymbol{z}$$

◇

Lösungen zu Aufgabe 4:

System 1 aus Aufgabe 2.2: Gemäß (2.15) gilt

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Somit lautet die Transitionsmatrix in den transformierten Koordinaten $\boldsymbol{z}(t) = \tilde{\Phi}_1(t)\boldsymbol{z}_0$ mit (vgl. Formelsammlung)

$$\tilde{\Phi}_1(t) = \exp(\tilde{A}_1 t) = \begin{bmatrix} \exp(2t) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(2t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(t) \end{bmatrix}. \tag{2.29}$$

Da $\boldsymbol{x} = V_1\boldsymbol{z}$ mit V_1 aus (2.14) gilt für die Lösung in Originalkoordinaten, dass $\boldsymbol{x}(t) = \Phi_1(t)\boldsymbol{x}_0$ mit

$$\Phi_1(t) = V_1\tilde{\Phi}_1(t)V_1^{-1} = \begin{bmatrix} \exp(2t) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(2t) & \exp(t) - \exp(2t) \\ 0 & 0 & \exp(t) \end{bmatrix}. \tag{2.30}$$

Für die Lösung des Systems mit der gegebenen Anfangsbedingung, dem Eingangsvektor $\boldsymbol{b}$ und dem gegebenen Eingang u gilt somit

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi_1(t)\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t \Phi_1(t-\tau)\boldsymbol{b}u(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u(\tau) = 1 + \tau$$

und daher

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \exp(t) - \exp(2t) \\ \exp(t) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ \exp(t-\tau) - \exp(2(t-\tau)) \\ \exp(t-\tau) \end{bmatrix} (1+\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.31}$$

Die Lösung des Integrals kann mit Hilfe der partiellen Integration erfolgen:

$$\int_0^t \exp\big(a(t-\tau)\big)\tau \,\mathrm{d}\tau = \exp(at)\int_0^t \underbrace{\exp(-a\tau)}_{f'}\underbrace{\tau}_{g} \,\mathrm{d}\tau = \exp(at)\Big([fg]_0^t - \int_0^t fg'\mathrm{d}\tau\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp(at)\Big([-\frac{1}{a}\exp(-a\tau)\tau]_0^t + \int_0^t \frac{1}{a}\exp(-a\tau)\mathrm{d}\tau\Big)\\
&= -\frac{1}{a}\exp\big(a(t-t)\big)t + \exp(at)[-\frac{1}{a^2}\exp(-a\tau)]_0^t\\
&= -\frac{1}{a}t - \frac{1}{a^2}\Big(\exp\big(a(t-t)\big) - \exp(at)\Big)\\
&= \frac{1}{a^2}\big(\exp(at) - at - 1\big)
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^t \exp\big(a(t-\tau)\big)1\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{a}\big(\exp(at)-1\big)
$$

Einsetzen liefert

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \exp(t)-\exp(2t) \\ \exp(t) \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} 0 \\ \big(\exp(t)-1+\exp(t)-t-1\big) - \Big(\tfrac{1}{2}\big(\exp(2t)-1\big)+\tfrac{1}{4}\big(\exp(2t)-2t-1\big)\Big) \\ 2\exp(t)-t-2 \end{bmatrix} \qquad (2.32)\\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ -\tfrac{7}{4}\exp(2t)+3\exp(t)-\tfrac{1}{2}t-\tfrac{5}{4} \\ 3\exp(t)-t-2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

System 2 aus Aufgabe 2.2: Die transformierte Dynamikmatrix lautet gemäß (2.22)

$$
\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

womit sich die Transitionsmatrix $\tilde{\Phi}_2(t)$ wie folgt ergibt (vgl. Formelsammlung)

$$
\tilde{\Phi}_2(t) = \exp(\tilde{A}_2 t) = \begin{bmatrix} \exp(2t) & t\exp(2t) & 0 \\ 0 & \exp(2t) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(t) \end{bmatrix}. \qquad (2.33)
$$

Entsprechend ergibt sich die Transitionsmatrix $\Phi_2(t)$ in Orginalkoordinaten mit der Transformationsmatrix V_2 aus (2.21) zu

$$
\Phi_2(t) = V_2\tilde{\Phi}_2(t)V_2^{-1} = \begin{bmatrix} \exp(2t) & t\exp(2t) & 3\exp(2t)-3\exp(t)-t\exp(2t) \\ 0 & \exp(2t) & \exp(t)-\exp(2t) \\ 0 & 0 & \exp(t) \end{bmatrix} \qquad (2.34)
$$

Mechanisches System aus Aufgabe 2.3: Mit der Nomenklatur aus der Lösung für Aufgabe 2.3 (siehe oben) gilt

$$
\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix} \underbrace{\Rightarrow}_{s.Formels.} \tilde{\Phi}(t) = \exp(\tilde{A}t) = \exp(-\alpha t)\begin{bmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{bmatrix},
$$

Somit ergibt sich die Transitionsmatrix $\Phi(t)$ in Originalkoordinaten mittels der Transformationsmatrix V aus (2.27) zu

$$\Phi(t) = V\tilde{\Phi}(t)V^{-1} = \frac{1}{\beta}\exp(-\alpha t)\begin{bmatrix} \alpha\sin(\beta t)+\beta\cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -(\alpha^2+\beta^2)\sin(\beta t) & -\alpha\sin(\beta t)+\beta\cos(\beta t)\end{bmatrix} \tag{2.35}$$

Mit $u(t)=0$, $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^T$ folgt somit

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{x}_0 = \frac{1}{\beta}\exp(-\alpha t)\begin{bmatrix} \alpha\sin(\beta t)+\beta\cos(\beta t) \\ -(\alpha^2+\beta^2)\sin(\beta t)\end{bmatrix} \tag{2.36}$$

oder mit den Originalkoeffizienten

$$\boldsymbol{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{d^2-4km}{4m^2}}}e^{-\frac{d}{2m}t}\begin{bmatrix} \frac{d}{2m}\sin\left(\sqrt{\frac{d^2-4km}{4m^2}}t\right)+\sqrt{\frac{d^2-4km}{4m^2}}\cos\left(\sqrt{\frac{d^2-4km}{4m^2}}t\right) \\ -\frac{k}{m}\sin\left(\sqrt{\frac{d^2-4km}{4m^2}}t\right)\end{bmatrix}$$

◇

Lösungen zu Aufgabe 5:

Es gilt

$$\Phi(t) = \exp(At) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \hat{\Phi}(s) = (sE-A)^{-1}$$

Somit kann die laplace-transformierte Transitionsmatrix $\hat{\Phi}(s)$ wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}(s) = (sE-A)^{-1} &= \frac{\operatorname{adj}(sE-A)}{\det(sE-A)} \\ &= \frac{1}{s\left(s^2+35s+\frac{625}{2}\right)}\begin{bmatrix} s^2+25s & 0 & -\frac{5}{2}s \\ 25 & s^2+35s+\frac{625}{2} & s+10 \\ 25s & 0 & s^2+10s\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.37}$$

$\Phi(t)$ erhält man durch komponentenweises Rücktransformieren von $\hat{\Phi}(s)$. Dabei kann man die Eigenschaft der Laplace-Transformation ausnutzen und zuerst $\frac{1}{\det(sE-A)}$ transformieren und anschließend $\operatorname{adj}(sE-A)$ als Differentialoperator auffassen. Dafür muss $\hat{d}(s)$ so umgeformt werden, dass die Transformation mit Hilfe der Korrespondenztabelle durchgeführt werden kann. Dies wird mit einer Partialbruchzerlegung erreicht.

$$\hat{d}(s) = \frac{1}{s\left(s^2+35s+\frac{625}{2}\right)} = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2 s + a_3}{s^2+35s+\frac{625}{2}} \tag{2.38}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = (a_1+a_2)s^2 + (35a_1+a_3)s + \frac{625}{2}a_1 \tag{2.39}$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = \frac{2}{625}, \quad a_2 = -\frac{2}{625}, \quad a_3 = -\frac{70}{625} \tag{2.40}$$

$$\hat{d}(s) = \frac{2}{625s} + \frac{-\frac{2}{625}s - \frac{70}{625}}{s^2+35s+\frac{625}{2}} = \frac{2}{625s} + \frac{-\frac{2}{625}s - \frac{70}{625}}{(s+\frac{35}{2})^2+(\frac{5}{2})^2} \tag{2.41}$$

$$= -\frac{2}{625}\Big(-\frac{1}{s} + \frac{s+35}{(s+\frac{35}{2})^2 + (\frac{5}{2})^2}\Big) \tag{2.42}$$

$$= -\frac{2}{625}\Big(-\frac{1}{s} + \frac{s+\frac{35}{2}}{(s+\frac{35}{2})^2 + (\frac{5}{2})^2} + \frac{7\frac{5}{2}}{(s+\frac{35}{2})^2 + (\frac{5}{2})^2}\Big) \tag{2.43}$$

$$\bullet\!-\!\circ$$

$$d(t) = -\frac{2}{625}\Big(-1 + \exp\big(-\frac{35}{2}t\big)\Big(\cos\big(\frac{5}{2}t\big) + 7\sin\big(\frac{5}{2}t\big)\Big)\Big) \tag{2.44}$$

$$\dot{d}(t) = \frac{2}{5}\exp\big(-\frac{35}{2}t\big)\sin\big(\frac{5}{2}t\big) \tag{2.45}$$

$$\ddot{d}(t) = \exp\big(-\frac{35}{2}t\big)\Big(\cos\big(\frac{5}{2}t\big) - 7\sin\big(\frac{5}{2}t\big)\Big) \tag{2.46}$$

Daraus folgt

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \ddot{d}(t) + 25\dot{d}(t) & 0 & -\frac{5}{2}\dot{d}(t) \\ 25d(t) & \ddot{d}(t) + 35\dot{d}(t) + \frac{625}{2}d(t) & \dot{d}(t) + 10d(t) \\ 25\dot{d}(t) & 0 & \ddot{d}(t) + 10\dot{d}(t) \end{bmatrix}. \tag{2.47}$$

Für $y(t)$ folgt damit für die gegebenen $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{b}$ und u, dass

$$\begin{aligned} y(t) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{c}^T\Phi(t)\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t \boldsymbol{c}^T\Phi(t-\tau)\boldsymbol{b}u(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t 0.4\cdot 5\cdot 25\dot{d}(t-\tau)(1-\exp(-\tau))\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t 20\sin\big(\frac{5(t-\tau)}{2}\big)\exp\big(-\frac{35(t-\tau)}{2}\big)(1-\exp(-\tau))\mathrm{d}t \\ &= \frac{\exp(-\frac{35t}{2})\Big(-2500\exp\big(\frac{33t}{2}\big) + 2228\exp\big(\frac{35t}{2}\big) + 272\cos\big(\frac{5t}{2}\big) + 904\sin\big(\frac{5t}{2}\big)\Big)}{13925}. \end{aligned}$$

$\diamond$