

Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Meurer, Lehrstuhl für Regelungstechnik

Aufgabe 1 (Mathematische Modellierung eines elektrisch aktuierten Seilzuges). Abbildung 1.1 zeigt den Ankerkreis einer fremderregten Gleichstrommaschine mit variabler Ankerspannung u_A . Der Erregerfluss der Maschine Φ_e wird als konstant angenommen. Für die an der Maschine induzierte Spannung und das induzierte Moment gilt:

$$u_M = k_1 \Phi_e \omega, \quad M_M = k_2 \Phi_e i_a.$$

Dabei stellen k_1 und k_2 maschinenspezifische Konstanten dar, i_a ist der Ankerstrom und $\omega = \dot{\varphi}$ stellt die Winkelgeschwindigkeit dar.

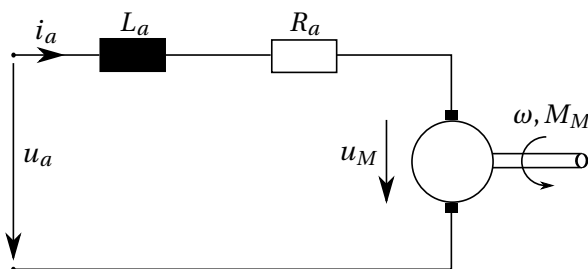


Abb. 1.1: Ersatzschaltbild des Gleichstrommotors.

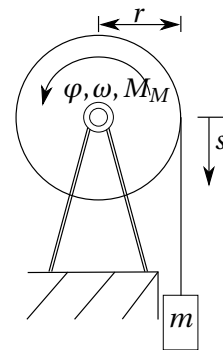


Abb. 1.2: Seilzug.

Die Gleichstrommaschine treibt den in Abbildung 1.2 dargestellten Seilzug an, der eine angehängte Masse m heben soll. Die Position der Masse $s(t) = s(0) - r(\varphi(t) - \varphi(0))$ des Hubvorgangs kann im Weiteren als Messgröße angesehen werden. Für das an der Winde herrschende Moment, mit Berücksichtigung des Trägheitsmoments Θ des gesamten Systems, gilt nach Drehimpulserhaltungssatz:

$$\Theta \frac{d\omega}{dt} = \sum_i M_i.$$

Neben der auf die Masse m wirkenden Gewichtskraft wirke der rotatorischen Bewegung das nichtlineare Reibmoment M_R entgegen, das vereinfacht durch

$$M_R = \mu_R \omega^3$$

beschrieben wird. Es wird angenommen, dass das Seil dehnungsfrei ist und seine Dynamik vernachlässigt werden kann.

Hinweis: Für den skalaren Fall gilt, dass das Drehmoment das Produkt aus Kraft und Hebelarm ist.

- (i) Wählen Sie geeignete Eingangs-, Zustands- und Ausgangsgrößen und stellen Sie das mathematische Modell des Gesamtsystems in der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \\ y &= h(\mathbf{x}, u) \end{aligned}$$

auf.

- (ii) Welche stationäre Eingangsgröße $u = u_R$ ergibt sich in der Ruhelage des Systems?

(iii) Linearisieren Sie das System um den Arbeitspunkt aus (ii) und stellen Sie es wie folgt dar:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = A\Delta \mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u$$

$$\Delta y = \mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x} + d\Delta u.$$

Aufgabe 2 (Mathematische Modellierung einer Verladebrücke). Gegeben ist die in Abbildung 1.3 gezeigte Verladebrücke, für die ein mathematisches Modell erstellt werden soll. Die Last m_L ist im Schwerpunkt der Laufkatze mit der Masse m_K an einem als masselos anzusehenden Seil der Länge r aufgehängt. Der Laufkatzantrieb erzeugt eine Antriebskraft F . Die Durchbiegung des Seils kann vernachlässigt werden, da nur kleine Seilwinkel φ betrachtet werden.

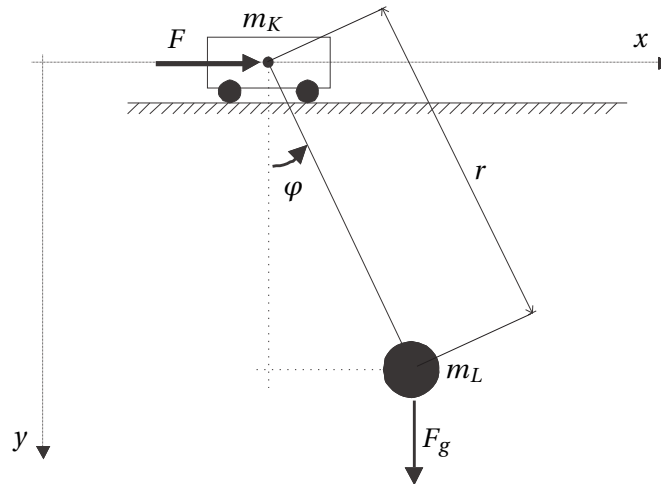


Abb. 1.3: Verladebrücke.

- (i) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen der Verladebrücke mit Hilfe der Newtonschen Gesetze.
- (ii) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichungen um die stabile Gleichgewichtslage für kleine Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}$, und geben Sie das linearisierte System in Zustandsdarstellung

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = A\Delta \mathbf{x} + \mathbf{b}\Delta u$$

$$\Delta y = C\Delta \mathbf{x}$$

an. Wählen Sie dabei den Zustandsvektor $\mathbf{x} = [x \quad \dot{x} \quad \varphi \quad \dot{\varphi}]^T$.

Aufgabe 3 (Mathematische Modellierung einer Operationsverstärkerschaltung). Gegeben ist das elektrische System nach Abbildung 1.4. Die darin verwendete Induktivität ist eine Funktion des Stroms $L = L(i_L)$ und die Kapazität ist von der Spannung u_C abhängig, d.h. $C = C(u_C)$. Der Operationsverstärker kann bei der Modellierung als ideal angesehen werden. Weiterhin ist der Ausgang der Schaltung u_C unbelastet, d.h. es fließt kein Strom aus den Klemmen.

- (i) Berechnen Sie das mathematische Modell des elektrischen Netzwerkes nach Abbildung 1.4 in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u_1, u_s)$$

$$y = \mathbf{g}(\mathbf{x}, u_1, u_s),$$

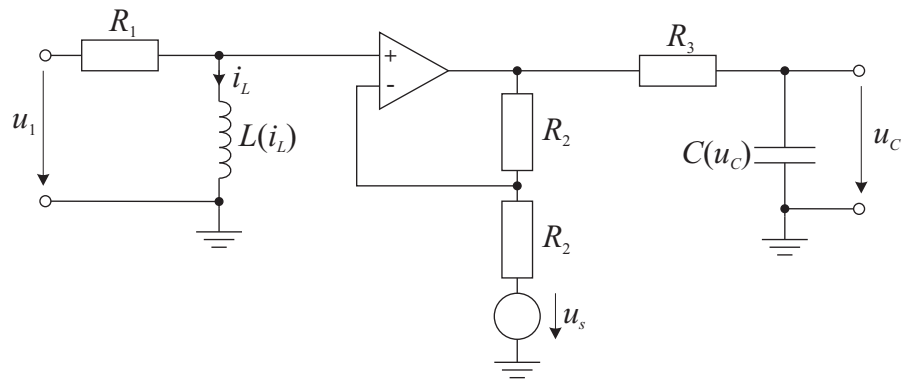


Abb. 1.4: Elektrisches System.

mit dem Eingang u_1 , der Störung u_s und dem Ausgang $y = u_C$. Wählen Sie dazu geeignete Zustandsgrößen und berücksichtigen Sie die Abhängigkeiten der Induktivität $L(i_L)$ bzw. Kapazität $C(u_C)$ in allgemeiner Form.

(ii) Im Folgenden gilt

$$L(i_L) = L_0 + L_1 i_L^2$$

$$C(u_C) = C_0 + C_1 \left(1 - e^{-\frac{u_C}{u_{C0}}}\right),$$

mit den konstanten, positiven Parametern L_0 , L_1 , C_0 , C_1 und u_{C0} . Berechnen Sie alle Ruhelagen des Systems für $u_s = 0$ und $u_1 = \text{konst.}$

Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Meurer, Lehrstuhl für Regelungstechnik

Lösungen zu Aufgabe 1:

- (i) Eingangsgröße: $u(t) = u_a(t)$
Ausgangsgröße: $y(t) = s(t)$

Die Regelstrecke besteht aus einem elektrischen Teilsystem (Gleichstrommaschine) und einem mechanischen Teilsystem (Seilwinde).

Für das elektrische System gilt nach dem Ersatzschaltbild (Abbildung 1.1) mittels der Maschengleichung

$$u_a(t) = \frac{d[L_a i_a(t)]}{dt} + R_a i_a(t) + u_M(t) \quad (1.1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{di_a(t)}{dt} = -\frac{R_a}{L_a} i_a(t) - \frac{k_1 \Phi_e}{L_a} \omega + \frac{1}{L_a} u_a(t)}. \quad (1.2)$$

Für das mechanische Teilsystem gilt zunächst, dass

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dt} = \omega}. \quad (1.3)$$

Der zugehörige Drehimpuls ist gegeben durch

$$I_r = \Theta \frac{d\varphi}{dt} = \Theta \omega. \quad (1.4)$$

Die Bewegungsgleichung kann somit direkt aus dem Drehimpulserhaltungssatz hergeleitet werden:

$$\Theta \frac{d\omega(t)}{dt} = \sum_i M_i = M_M - M_g - M_R. \quad (1.5)$$

$$\Theta \frac{d\omega(t)}{dt} = k_2 \Phi_e i_a(t) - mgr - \mu_R \omega(t)^3 \quad (1.6)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{k_2 \Phi_e}{\Theta} i_a(t) - \frac{mgr}{\Theta} - \frac{\mu_R}{\Theta} \omega(t)^3}. \quad (1.7)$$

Für die Seillänge erhält man (Länge zu $t = 0$ zuzüglich dem Bogen des Sektors auf der Scheibe, welcher der vergangenen Drehung entspricht)

$$s(t) = s(0) - r[\varphi(t) - \varphi(0)], \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{ds}{dt} = -r \frac{d\varphi}{dt} = -r\omega}.$$

Aus den obigen Gleichungen kann man eine Wahl für die Zustandsgrößen treffen, z.B.

$$\mathbf{x}(t) = [i_a(t) \quad \varphi(t) \quad \omega(t) \quad s(t)]^T. \quad (1.8)$$

Da als Ausgang $y = s$ gilt, kann somit gemäß Def. 1.1 im Skript der Verlauf der Ausgangsgröße vollständig aus dem Eingang und den Zuständen bestimmt werden.

Zusammenfassend erhält man die Systembeschreibung mittels der Zustandsdarstellung¹

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} x_1 - \frac{k_1 \Phi_e}{L_a} x_3 + \frac{1}{L_a} u \\ x_3 \\ \frac{k_2 \Phi_e}{\Theta} x_1 - \frac{mgr}{\Theta} - \frac{\mu_R}{\Theta} x_3^3 \\ -r x_3 \end{bmatrix}, \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (1.9)$$

$$y = h(\mathbf{x}, u) = x_4, \quad t \geq 0. \quad (1.10)$$

(ii) In der Ruhelage gilt, dass keine Zustandsänderung erfolgt, d.h. $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R) = \mathbf{0}$. Somit gilt

$$0 = -\frac{R_a}{L_a} x_{1,R} - \frac{k_1 \Phi_e}{L_a} x_{3,R} + \frac{1}{L_a} u_R, \quad (1.11)$$

$$0 = x_{3,R}, \quad (1.12)$$

$$0 = \frac{k_2 \Phi_e}{\Theta} x_{1,R} - \frac{mgr}{\Theta} - \frac{\mu_R}{\Theta} x_{3,R}^3 \quad (1.13)$$

$$0 = -r x_{3,R} \quad (1.14)$$

mit der eindeutigen Lösung²

$$x_{3,R} = 0, \quad x_{1,R} = \frac{mgr}{k_2 \Phi_e}, \quad x_{2,R} = \bar{x}_2 \in \mathbb{R}, \quad x_{4,R} = \bar{x}_4 \in \mathbb{R}, \quad u_R = \frac{mgr R_a}{k_2 \Phi_e}.$$

(iii) Nach Einführung der Variablen $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_R$, $\Delta u = u - u_R$, $\Delta y = y - y_R$ ist die Linearisierung wie folgt gegeben:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_r, u_R) \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u}(\mathbf{x}_r, u_R) \Delta u \quad (1.15)$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 & -\frac{k_1 \Phi_e}{L_a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{k_2 \Phi_e}{\Theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 \end{bmatrix}}_{=A} \Delta \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=b} \Delta u, \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.16)$$

$$\Delta y = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_r, u_R) \Delta \mathbf{x} = \underbrace{[0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]}_{c^T} \Delta \mathbf{x}, \quad t \geq 0. \quad (1.17)$$

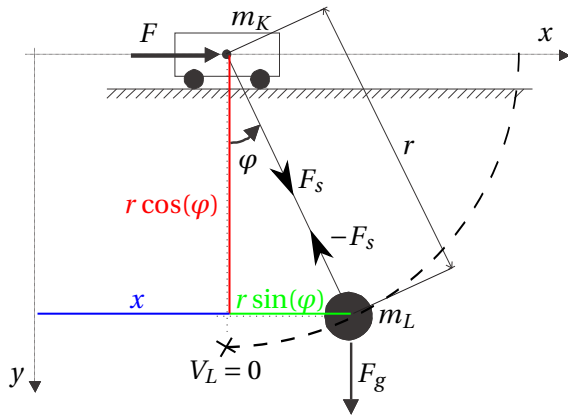
◇

¹Alternativ zu dieser Lösung kann man auch anstelle der Seillänge die relative Höhe h der Masse betrachten und deren initialen Wert als $h(0) = 0$ definieren (und somit negative Werte für $h(t)$ zulassen). Hierdurch kann man den Zustand s einsparen und als Ausgang direkt $y = r\varphi$ verwenden.

²Physikalisch gilt, dass $0 \leq \bar{x}_{4,R} = s_R \leq s_{max}$ mit der maximalen Länge s_{max} des Seiles. Dies wird in der Modellannahme jedoch an dieser Stelle vernachlässigt, da es zu einem komplexeren Modell führen würde.

Lösungen zu Aufgabe 2:

- (i) Die Verladebrücke besteht aus zwei mechanischen Teilsystemen, die durch ein Seil miteinander gekoppelt sind.



Newton:

Zerlegung der auf die Laufkatze und Last wirkende Kräfte in Kräftekomponenten, die in x- und y-Richtung wirken. Für die sogenannte Schnittkraft F_s , die das Teilsystem Laufkatze mit dem Teilsystem Last verbindet, folgt daraus

$$F_{s,x} = \sin(\varphi)F_s, \quad F_{s,y} = \cos(\varphi)F_s.$$

Zudem ist die Normalkraft F_N zu berücksichtigen, welche vom Untergrund auf die Laufkatze in y-Richtung ausgeübt wird.

Anschließend können die Kraftbilanzen für die beiden Teilsysteme aufgestellt werden. Laufkatze:

$$\sum \mathbf{F}_K = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m_K g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin(\varphi)F_s \\ \cos(\varphi)F_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_K a_{K,x} \\ m_K a_{K,y} \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

Die Beschleunigung des Schwerpunktes der Laufkatze ergibt sich zu

$$\mathbf{s}_K = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_K = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Last:

$$\sum \mathbf{F}_L = \begin{bmatrix} 0 \\ m_L g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sin(\varphi)F_s \\ \cos(\varphi)F_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_L a_{L,x} \\ m_L a_{L,y} \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

Die Beschleunigung des Schwerpunktes der Last ergibt sich zu:

$$\mathbf{s}_L = \begin{bmatrix} x + r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_L = \begin{bmatrix} \ddot{x} + r\ddot{\varphi} \cos(\varphi) - r\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) \\ -r\ddot{\varphi} \sin(\varphi) - r\dot{\varphi}^2 \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Zusammenfassend erhält man für die Laufkatze

$$m_K \ddot{x} = F + \sin(\varphi)F_s \quad (\text{x-Richtung}) \quad (1.22)$$

$$0 = F_N + m_K g + \cos(\varphi)F_s \quad (\text{y-Richtung}) \quad (1.23)$$

Für die Last gilt:

$$m_L (\ddot{x} + r\ddot{\varphi} \cos(\varphi) - r\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi)) = -\sin(\varphi)F_s \quad (\text{x-Richtung}) \quad (1.24)$$

$$m_L (-r\ddot{\varphi} \sin(\varphi) - r\dot{\varphi}^2 \cos(\varphi)) = m_L g - \cos(\varphi)F_s \quad (\text{y-Richtung}) \quad (1.25)$$

Aus dem Gleichungssystem erhält man gekoppelte Bewegungsgleichungen. Stellt man Gln. (1.24) nach $\sin(\varphi)F_s$ um und setzt dies in Gln. (1.22) ein, so erhält man die Bewegungsgleichung für die Verladebrücke.

$$\ddot{x} = \frac{F - m_L(r\ddot{\varphi}\cos(\varphi) - r\dot{\varphi}^2\sin(\varphi))}{m_K + m_L}, \quad (1.26)$$

Die 2. Bewegungsgleichung erhalten wir, wenn Gln. (1.25) mit $\sin(\varphi)$ erweitert wird und Gln. (1.24) eingesetzt wird

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g\sin(\varphi) + \cos(\varphi)\ddot{x}}{r}. \quad (1.27)$$

Die gekoppelten Bewegungsgleichungen müssen nun entkoppelt (d.h. die höchsten Ableitungen isoliert auf die linke Seite gebracht) werden. Hierzu wird (1.27) in (1.26) eingesetzt:

$$\ddot{x} = \frac{F + m_L(g\sin(\varphi)\cos(\varphi) + r\dot{\varphi}^2\sin(\varphi))}{m_K + m_L(1 - \cos^2(\varphi))}.$$

Dies wird nun in (1.27) eingesetzt

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{r}\sin(\varphi) - \frac{F + m_L(g\sin(\varphi)\cos(\varphi) + r\dot{\varphi}^2\sin(\varphi))}{m_K + m_L(1 - \cos^2(\varphi))} \frac{\cos(\varphi)}{r}.$$

Um das DGL-System in ein System 1. Ordnung zu überführen definieren wir die folgenden Zustände

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}, \quad x_3 = \varphi, \quad x_4 = \dot{x}_3 = \dot{\varphi}.$$

Somit lassen die Bewegungsgleichung schreiben als

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{F + m_L(g\sin(x_3)\cos(x_3) + r x_4^2 \sin(x_3))}{m_K + m_L(1 - \cos^2(x_3))} \\ x_4 \\ -\frac{g}{r}\sin(x_3) - \frac{F + m_L(g\sin(x_3)\cos(x_3) + r x_4^2 \sin(x_3))}{m_K + m_L(1 - \cos^2(x_3))} \frac{\cos(x_3)}{r} \end{bmatrix}.$$

(ii) Linearisierung um die stabile Ruhelage (mit $F = 0$)³

$$\begin{bmatrix} x_R \\ \dot{x}_R \\ \varphi_R \\ \dot{\varphi}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{mit } \bar{x} \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Wir führen folgende Substitution ein:

$$N(x_3) = m_K + m_L(1 - \cos^2(x_3)), \quad \frac{\partial N(x_3)}{\partial x_3} = 2m_L \cos(x_3) \sin(x_3)$$

³Mathematisch betrachtet ist für den Winkel jedes Vielfache πk mit $k \in \mathbb{Z}$ eine Ruhelage, jedoch ist für ungerade k die Modellannahme des starren Seiles nicht gerechtfertigt. Des Weiteren kann im normalen Betrieb ein Überspringen ausgeschlossen werden...

sodass $N(0) = m_K \frac{\partial N(0)}{\partial x_3} = 0$ und

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{F}{N} + \frac{m_L g \sin(x_3) \cos(x_3)}{N} + \frac{m_L r x_4^2 \sin(x_3)}{N} \\ x_4 \\ -\frac{g}{r} \sin(x_3) - \frac{F \cos(x_3)}{Nr} - \frac{m_L g \sin(x_3) \cos(x_3)}{N} \frac{\cos(x_3)}{r} - \frac{m_L r x_4^2 \sin(x_3) \cos(x_3)}{N} \frac{\cos(x_3)}{r} \end{bmatrix}.$$

Setzt man $u = F$, $u_R = 0$ folgt für die Einträge der Dynamikmatrix $A = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_R, u_R)$ welche durch Ableiten nach x_3 bestimmt werden, dass

$$a_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\mathbf{x}_R, u_R) = \frac{\overbrace{-2F m_L \cos(x_{3,R}) \sin(x_{3,R})}^{=0}}{N^2|_{\mathbf{x}_R, u_R}} + \frac{m_L g (\overbrace{\cos(x_{3,R})^2}^{=1} - \overbrace{\sin(x_{3,R})}^0) N|_{\mathbf{x}_R, u_R} - \overbrace{m_L g \sin(x_{3,R}) \cos(x_{3,R})}^{=0} \frac{\partial N}{\partial x_3}|_{\mathbf{x}_R, u_R}}{N^2|_{\mathbf{x}_R, u_R}} + \frac{\overbrace{-m_L r x_{4,R}^2 \cos(x_{3,R})}^{=0} N|_{\mathbf{x}_R, u_R} - \overbrace{m_L r x_{4,R}^2 \sin(x_{3,R})}^{=0} \frac{\partial N}{\partial x_3}|_{\mathbf{x}_R, u_R}}{N^2|_{\mathbf{x}_R, u_R}} = \frac{g m_L}{m_K}$$

und

$$a_{43} \frac{\partial f_4}{\partial x_3}(\mathbf{x}_R, u_R) = -\frac{g}{r} \frac{\overbrace{\cos(x_{3,R})}^{=1}}{\cos(x_{3,R})} - \frac{F \overbrace{\sin(x_{3,R})}^{=0} - F \overbrace{\cos(x_{3,R})}^{=0} \frac{\partial N}{\partial x_3}|_{\mathbf{x}_R, u_R}}{r^2 N^2|_{\mathbf{x}_R, u_R}} - \frac{m_L g (\overbrace{\cos(x_{3,R}) - 2 \cos(x_{3,R}) \sin(x_{3,R})^2}^{=1}) N r - \overbrace{m_L g \sin(x_{3,R}) \cos(\varphi)^2}^{=0} \frac{\partial N}{\partial x_3}|_{\mathbf{x}_R, u_R}}{r^2 N^2|_{\mathbf{x}_R, u_R}} - \frac{m_L r \overbrace{x_{4,R}^2}^{=0} (\cos(x_{3,R})^2 - \sin(x_{3,R})) N|_{\mathbf{x}_R, u_R} - \overbrace{m_L r x_{4,R}^2 \sin(x_{3,R}) \cos(x_{3,R})}^{=0} \frac{\partial N}{\partial x_3}|_{\mathbf{x}_R, u_R}}{N^2|_{\mathbf{x}_R, u_R}} = -\frac{g m_L}{r m_K}.$$

Mit den Ausgängen

$$y_1 = x, \quad y_2 = \varphi \tag{1.28}$$

ergibt sich zusammenfassend die folgende linearisierte Zustandsdarstellung:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g m_L}{m_K} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{g m_L}{r m_K} & 0 \end{bmatrix}}_A \Delta \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_K} \\ 0 \\ -\frac{1}{r m_K} \end{bmatrix}}_b \Delta u$$

$$\Delta \mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{c^T} \Delta \mathbf{x}.$$

Lösungen zu Aufgabe 3:

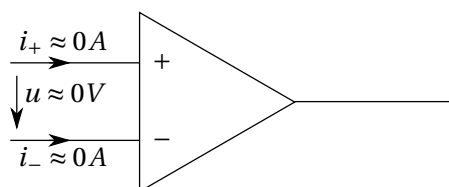
(i) Elektrisches System mit zwei Energiespeichern. Daher können die Zustände, sowie Eingänge und Ausgänge direkt angegeben werden:

Eingangsgröße: $u = u_1(t)$

Ausgangsgröße: $y = u_C(t)$

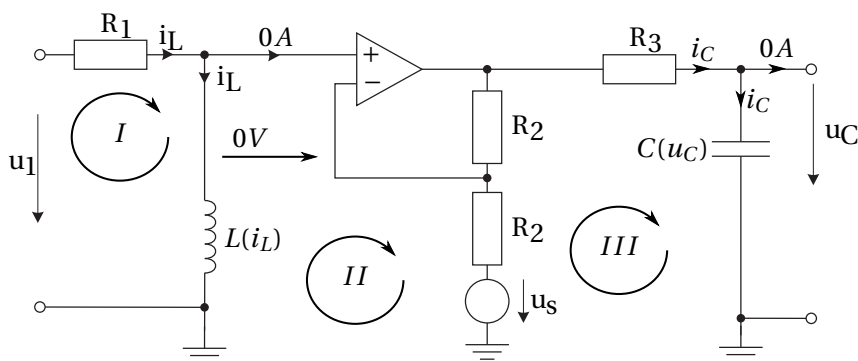
Zustände (folgen aus den Energiespeichern): $\mathbf{x} = [i_L(t) \quad u_C(t)]$

Der Operationsverstärker wird als ideal angenommen somit gelten folgende Annahmen:



- der Eingangswiderstand ist $\infty \Omega$
- der Strom an den Eingängen des Operationsverstärker ist $0 A$
- der Ausgangswiderstand ist 0Ω

Berücksichtigt man diese Annahmen dann kann die Schaltung wie folgt dargestellt werden:



Daraus können folgende Maschengleichungen aufgestellt werden:

$$u_1 = R_1 i_L + u_L \tag{1.29}$$

$$u_L = R_2 i_2 + u_s \tag{1.30}$$

$$2R_2 i_2 + u_s = R_3 i_c + u_c \tag{1.31}$$

Weitherhin gelten die Bauteilgleichungen:

$$u_L = \frac{d}{dt} (L(i_L(t)) i_L(t)) = \frac{\partial L(i_L)}{\partial i_L} \frac{di}{dt} (t) i_L(t) + L(i_L(t)) \frac{di}{dt} (t) \tag{1.32}$$

$$i_C = \frac{d}{dt} (C(u_C(t)) u_C(t)) = \frac{\partial C(u_C)}{\partial u_C} \frac{du}{dt} (t) u_C(t) + C(u_C(t)) \frac{du}{dt} (t) \tag{1.33}$$

Die erste Zustandsgln erhält man indem Gln. (1.32) in Gln. (1.29) eingesetzt wird

$$u_1 = R_1 i_L + \frac{\partial L(i_L)}{\partial i_L} \frac{di}{dt} = R_1 i_L + \left(\frac{\partial L(i_L)}{\partial i_L} i_L + L(i_L) \right) \frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt} = \frac{u_1 - R_1 i_L}{\frac{\partial L(i_L)}{\partial i_L} i_L + L(i_L)}}$$

Die zweite Zustandsgleichung ergibt sich aus Gln (1.29), (1.30) und (1.33):

$$(1.30): u_L = R_2 i_2 + u_s \Rightarrow i_2 = \frac{u_L - u_s}{R_2}$$

$$(1.30) \rightarrow (1.31): \cancel{2R_2} \frac{u_L - u_s}{\cancel{R_2}} + u_s = R_3 i_c + u_c \Rightarrow R_3 i_c = 2u_L - u_s - u_c$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{(1.29) \text{ Masche 1}} R_3 i_c = 2(u_1 - R_1 i_L) - u_s - u_c$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{(1.33) \text{ Bauteil 2}} R_3 \left(\frac{\partial C(u_C)}{\partial u_C} u_C + C(u_C) \right) \dot{u}_C = 2(u_1 - R_1 i_L) - u_s - u_c$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{u}_C = \frac{2(u_1 - R_1 i_L) - u_s - u_c}{R_3 \left(\frac{\partial C(u_C)}{\partial u_C} u_C + C(u_C) \right)}}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich die Zustandsdarstellung zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{u - R_1 x_1}{\frac{\partial L(x_1)}{\partial x_1} x_1 + L(x_1)} \\ \frac{2u - 2R_1 x_1 - u_s - x_2}{R_3 \left(\frac{\partial C(x_2)}{\partial x_2} x_2 + C(x_2) \right)} \end{bmatrix}, \quad t > 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$y = h(\mathbf{x}, u) = x_2, \quad t \geq 0.$$

(ii) Berechnung der Ruhelage des Systems für $u_s = 0$ und $u = u_R = konst.$

Bestimmung der Ruhelage $\mathbf{f}(\mathbf{x}_R, u_R) = 0$ führt nach Einsetzen der angegebenen Zusammenhänge der stromabhängigen Induktivität und der spannungsabhängigen Kapazität auf die Bedingungen

$$0 = u_R - R_1 x_{1,R}$$

$$0 = 2u_R - 2R_1 x_{1,R} - x_{2,R}.$$

Daraus folgt direkt

$$x_{1,R} = \frac{u_R}{R_1}, \quad x_{2,R} = 0. \quad (1.34)$$

◇