Prof. Dr.–Ing. habil. Thomas Meurer, Lehrstuhl für Regelungstechnik

Aufgabe 1. Berechnen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{s+2}{s(s^2-3s+4)}$$

einen Regler durch Polvorgabe mit einem Freiheitsgrad so, dass die Polstellen des geschlossenen Regelkreises bei -1, $-2 \pm \mathrm{i}3$ und $-4 \pm \mathrm{i}5$ liegen.

Aufgabe 2. Gegeben ist ein lineares zeitinvariantes System der Form

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \,.\end{aligned}$$

Weisen Sie die vollständige Steuerbarkeit und vollständige Beobachtbarkeit des Systems mit Hilfe des PBH-Eigenvektortests nach. Bestätigen Sie das Ergebnis durch die Analyse der entsprechenden Hankelmatrix.

Aufgabe 3. Gegeben ist ein lineares zeitinvariantes System der Form

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

Testen Sie dieses System auf vollständige Steuerbarkeit bzw. vollständige Beobachtbarkeit. Verwenden Sie dazu den PBH-Rangtest. Welche Aussagen können Sie bezüglich der Ordnung der zugehörigen Übertragungsfunktion treffen? Berechnen Sie zur Kontrolle die zugehörige Übertragungsfunktion.

Aufgabe 4. Gegeben ist ein lineares zeitinvariantes System der Form

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & -16 & -10 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 10 & 1 & -12 & -10 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Kalmanschen Steuerbarkeitsmatrix, dass das System nicht vollständig steuerbar ist. Geben Sie eine Parametrierung des steuerbaren Unterraums U_c und des darauf orthogonal stehenden nicht steuerbaren Unterraums U_{nc} in der Form

$$\begin{aligned}U_c &= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 | \boldsymbol{x} = \mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2,\, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}\right\}, \quad \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^4 \\ U_{nc} &= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 | \boldsymbol{x} = \mu_3 \boldsymbol{v}_3 + \mu_4 \boldsymbol{v}_4,\, \mu_3, \mu_4 \in \mathbb{R}\right\}, \quad \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \in \mathbb{R}^4\end{aligned}$$

an.

Lösung 1 (Zu Aufgabe: 1). Berechnen Sie für die Streckenübertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{s+2}{s(s^2-3s+4)}$$

einen Regler durch Polvorgabe mit einem Freiheitsgrad so, dass die Polstellen des geschlossenen Regelkreises bei -1, $-2 \pm \mathrm{i}3$ und $-4 \pm \mathrm{i}5$ liegen.

Hierzu: Seien die Übertragungsfunktionen gegeben durch

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{z}(s)}{\hat{n}(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}, \qquad \hat{g}_r(s) = \frac{\hat{z}_r(s)}{\hat{n}_r(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} d_i s^i}{\sum_{i=0}^{m} c_i s^i}$$

$$\hat{t}_{ry}(s) = \frac{\hat{g}_r(s)\hat{g}(s)}{1+\hat{g}_r(s)\hat{g}(s)} = \frac{\hat{z}_r(s)\hat{z}(s)}{\hat{n}_r(s)\hat{n}(s)+\hat{z}_r(s)\hat{z}(s)}.$$

Die Diophantische Gleichung für die Polvorgabe lautet

$$\hat{n}_r(s)\hat{n}(s) + \hat{z}_r(s)\hat{z}(s) = \hat{f}(s) = \sum_{i=0}^{p} f_i s^i$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & b_0 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_n & a_n & b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & b_1 & a_1 \\ 0 & 0 & b_n & a_n & \cdots & b_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n & a_n \end{bmatrix}}_{R} \begin{bmatrix} d_0 \\ c_0 \\ d_1 \\ c_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{2n-2} \\ f_{2n-1} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{f}}$$

Da $n = \deg(\hat{n}(s)) = 3$ muss das Sollpolynom von Grad $\deg(\hat{f}(s)) = p = 2n-1 = 5$ sein und $m = n-1 = 2$ gelten. Mit

$$\hat{f}(s) = (s+1)(s+2-\mathrm{i}3)(s+2+\mathrm{i}3)(s+4-\mathrm{i}5)(s+4+\mathrm{i}5) = s^5+13s^4+98s^3+354s^2+801s+533$$

und

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 533 \\ 801 \\ 354 \\ 98 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{folgt} \quad \begin{bmatrix} d_0 \\ c_0 \\ d_1 \\ c_1 \\ d_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 266.5000 \\ 37.3214 \\ 192.6071 \\ 16.0000 \\ 104.6786 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$

und somit $\hat{g}_r(s) = \dfrac{104.6786s^2+192.6071s+266.5}{s^2+16s+37.3214}$. Das zugehörige Pol-Nullstellendiagramm ist in Abbildung 6.1 dargestellt.

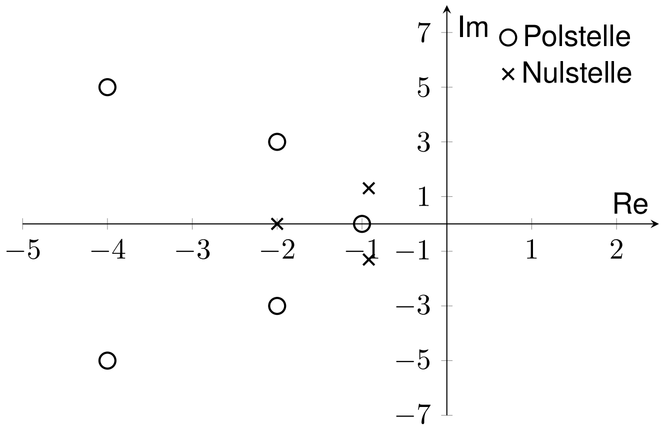

Abb. 6.1: Pol-Nullstellendiagramm für Aufgabe 1.

Lösung 2 (Zu Aufgabe: 2). Gegeben ist ein lineares zeitinvariantes System der Form

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}}_{A} \boldsymbol{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}} u \\ y &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{c}^T} \boldsymbol{x} \,.\end{aligned} \tag{6.1}$$

Weisen Sie die vollständige Steuerbarkeit und vollständige Beobachtbarkeit des Systems mit Hilfe des PBH-Eigenvektortests nach. Bestätigen Sie das Ergebnis durch die Analyse der entsprechenden Hankelmatrix.

Hierzu: Bestimmung der Links- und Rechtseigenvektoren (beachten Sie Aufgabe 6.54 im Skript):

$$\begin{aligned}(\lambda_{l1}, \boldsymbol{v}_{l1}^T) &= \left(-2, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right), \\ (\lambda_{l2}, \boldsymbol{v}_{l2}^T) &= \left(-4, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right), \\ (\lambda_{l3}, \boldsymbol{v}_{l3}^T) &= \left(2, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ (\lambda_{r1}, \boldsymbol{v}_{r1}) &= \left(2, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right), \\ (\lambda_{r2}, \boldsymbol{v}_{r2}) &= \left(-2, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \\ (\lambda_{r3}, \boldsymbol{v}_{r3}) &= \left(-4, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

PBH-Eigenvektortest für Steuerbarkeit (geometrische Vielfachheiten sind 1):

$$\boldsymbol{v}_{l1}^T \boldsymbol{b} = 1 \neq 0, \quad \boldsymbol{v}_{l2}^T \boldsymbol{b} = 1 \neq 0, \quad \boldsymbol{v}_{l3}^T \boldsymbol{b} = 1 \neq 0$$

was die Steuerbarkeit des gegeben Systems zeigt.

PBH-Eigenvektortest für Beobachtbarkeit:

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{v}_{r1} = 1 \neq 0, \quad \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{v}_{r1} = 2 \neq 0, \quad \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{v}_{r1} = -2 \neq 0$$

was die Beobachtbarkeit des gegeben Systems zeigt.

Die vollständige Steuer- und Beobachtbarkeit wird mittels der Hankelmatrix verifiziert:

$$\mathcal{H}[1, n-1] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}^T A \boldsymbol{b} & \cdots & \boldsymbol{c}^T A^{n-1} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^T A \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}^T A^2 \boldsymbol{b} & \cdots & \boldsymbol{c}^T A^n \boldsymbol{b} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{c}^T A^{n-1} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}^T A^n \boldsymbol{b} & \cdots & \boldsymbol{c}^T A^{2n-2} \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = O(A, \boldsymbol{c}^T) S(A, \boldsymbol{b})$$

Für diesen Fall gilt:

$$\mathcal{H}[1,2] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & -8 & 64 \\ -8 & 64 & -224 \end{bmatrix},$$

$$\det(\mathcal{H}[1,2]) = -2304 \neq 0.$$

Die Hankelmatrix bestätigt somit die vollständige Steuer- und Beobachtbarkeit des Systems.

Lösung 3 (Zu Aufgabe: 3). Gegeben ist ein lineares zeitinvariantes System der Form

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \boldsymbol{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}} u \\ y &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{c}^T} \boldsymbol{x}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Testen Sie dieses System auf vollständige Steuerbarkeit bzw. vollständige Beobachtbarkeit. Verwenden Sie dazu den PBH-Rangtest. Welche Aussagen können Sie bezüglich der Ordnung der zugehörigen Übertragungsfunktion treffen? Berechnen Sie zur Kontrolle die zugehörige Übertragungsfunktion.

Hierzu: PBH Rangtest für Steuerbarkeit bzw. Beobachtbarkeit:

$$\text{rang}\left(\begin{bmatrix} sE - A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}\right) = \text{rang}\left(\begin{bmatrix} s+3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & s+2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & s-1 & 1 \end{bmatrix}\right) = n \qquad \forall s \in \mathbb{C}$$

$$\text{rang}\left(\begin{bmatrix} sE - A \\ \boldsymbol{c}^T \end{bmatrix}\right) = \text{rang}\left(\begin{bmatrix} s+3 & 0 & 0 \\ 4 & s+2 & 3 \\ -4 & 0 & s-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = n \qquad \forall s \in \mathbb{C}$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 1$. Man erhält

$$\lambda_1 = -3: \quad \begin{cases} \text{rang}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2 & \Rightarrow \text{nicht steuerbar} \\ \text{rang}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 3 & \Rightarrow \text{beobachtbar} \end{cases}$$

$$\lambda_2 = -2: \quad \begin{cases} \text{rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}\right) = 3 & \Rightarrow \text{steuerbar} \\ \text{rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2 & \Rightarrow \text{nicht beobachtbar} \end{cases}$$

$$\lambda_3 = 1: \quad \begin{cases} \text{rang}\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 3 & \Rightarrow \text{steuerbar} \\ \text{rang}\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 3 & \Rightarrow \text{beobachtbar} \end{cases}$$

Somit ist sowohl steuer-, als auch beobachtbare Unterraum eindimensional und die Übertragungsfunktion muss demnach von Rang 1 sein:

$$\hat{g}(s) = \boldsymbol{c}^T (sE - A)^{-1} \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+3 & 0 & 0 \\ 4 & s+2 & 3 \\ -4 & 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s-1}.$$

Lösung 4 (Zu Aufgabe: 4). Gegeben ist ein lineares zeitinvariantes System der Form

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 1 & -16 & -10 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 10 & 1 & -12 & -10 \end{bmatrix}}_{A} \boldsymbol{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}} u. \tag{6.3}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Kalmanschen Steuerbarkeitsmatrix, dass das System nicht vollständig steuerbar ist. Geben Sie eine Parametrierung des steuerbaren Unterraums U_c und des darauf orthogonal stehenden nicht steuerbaren Unterraums U_{nc} in der Form

$$U_c = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 | \boldsymbol{x} = \mu_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{v}_2,\ \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \right\}, \quad \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^4 \tag{6.4}$$

$$U_{nc} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 | \boldsymbol{x} = \mu_3 \boldsymbol{v}_3 + \mu_4 \boldsymbol{v}_4,\ \mu_3, \mu_4 \in \mathbb{R} \right\}, \quad \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \in \mathbb{R}^4 \tag{6.5}$$

an.

Hierzu:

Kalmansche Steuerbarkeitsmatrix

$$S(A, \boldsymbol{b}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} & A^2\boldsymbol{b} & A^3\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 26 & -106 \\ 0 & 2 & -10 & 42 \\ 1 & -4 & 16 & -64 \\ 0 & -2 & 10 & -42 \end{bmatrix}$$

Sei $\boldsymbol{s}_i$ der i-te Spaltenvektor der Matrix S, dann gilt

$$\boldsymbol{s}_3 = -4\boldsymbol{s}_1 - 5\boldsymbol{s}_2, \quad \boldsymbol{s}_4 = 20\boldsymbol{s}_1 + 21\boldsymbol{s}_2. \tag{6.6}$$

Somit gilt rang$(S) = 2$ und das System ist nicht vollständig steuerbar. Der steuerbare Untervektorraum U_c ist das Bild der Kalmanschen Steuerbarkeitsmatrix und ist somit durch

$$U_c = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, \boldsymbol{x} = \mu_1 \boldsymbol{s}_1 + \mu_2 \boldsymbol{s}_2,\ \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben. Zur Bestimmung des nichtsteuerbaren Untervektorraums benötigt man daher auf $\boldsymbol{s}_1$ und $\boldsymbol{s}_2$ orthogonale Vektoren. Eine einfache Wahl ist durch

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

gegeben. Somit gilt $U_{nc} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, \boldsymbol{x} = \mu_3 \boldsymbol{v}_1 + \mu_4 \boldsymbol{v}_2,\ \mu_3, \mu_4 \in \mathbb{R} \right\}$.