

Lösung zur Klausur Regelungstechnik 1 (WS14/15):

Lösung zu Aufgabe 1:

a) $\mathbf{x} = [r_S \ v_S = \dot{r}_S \ r_P \ v_P = \dot{r}_P]^T$, $u = F_a$

b) $v_{W,S} = v_S + v_{st}$, $v_{W,P} = v_P + v_{st}$

c) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{r}_S \\ \dot{r}_S \\ \dot{r}_P \\ \dot{r}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{m_S} \left(u - \frac{1}{2} \alpha_{W,S} (x_2 + v_{st})^2 - k(x_1 - x_3 - r_0) - c(x_2 - x_4) \right) \\ x_4 \\ \frac{1}{m_P} \left(-\frac{1}{2} \alpha_{W,P} (x_4 + v_{st})^2 + k(x_1 - x_3 - r_0) + c(x_2 - x_4) \right) \end{bmatrix}$
 $y = [x_3]$

d) $x_{2,R} = x_{4,R} = 0$, $u = +\frac{1}{2} \alpha_{W,S} (x_{2,R} + v_{st}(x_{1,R}))^2 + \frac{1}{2} \alpha_{W,P} (x_{4,R} + v_{st}(x_{3,R}))^2$

e) $A = [A_1 \ A_2]$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k - \alpha_{W,S} v_0 \cos(x_{1,R}) (v_0 (\sin(x_{1,R}) + 1) + x_{2,R})}{m_S} & \frac{-c - \alpha_{W,S} (v_0 (\sin(x_{1,R}) + 1) + x_{2,R})}{m_S} \\ 0 & 0 \\ \frac{k}{m_P} & \frac{c}{m_P} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k}{m_S} & \frac{c}{m_S} \\ 0 & 1 \\ \frac{-k - \alpha_{W,P} v_0 \cos(x_{3,R}) (v_0 (\sin(x_{3,R}) + 1) + x_{4,R})}{m_P} & \frac{-c - \alpha_{W,P} (v_0 (\sin(x_{3,R}) + 1) + x_{4,R})}{m_P} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_S} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}^T = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

Lösung zu Aufgabe 2:

a) $\hat{g}(s) = \frac{\sqrt{3}(1 + \frac{s}{\sqrt{3}})}{(1+s)(1+2 \cdot 0.05s + s^2)}$. Die Polstellen liegen in

$$s = -1, s = -0.05 \pm i\sqrt{0.9975}$$

und somit in der rechten Halbebene. Das System ist folglich asymptotisch stabil.

b) Die Knickfrequenz liegt bei $\omega = 1$. Hieraus ergibt sich eine Amplitudenerhöhung von $a = |(i^2 + 0.1i + 1)^{-1}| = |(0.1j)^{-1}| = \sqrt{0.1^2}^{-1} = \frac{1/0.1}{1} = 20\text{dB}$.

c) Siehe Bodediagramm in Abbildung 1. Die Knickfrequenzen sind $s = \sqrt{3} \approx 1.7$ (PT1 im Zähler), $s = 1$ (PT1 und PT2 im Nenner). Das PT1 im Zähler ergibt eine Steigung im Amplitudengang von +20 dB pro Dekade, und einen Phasenanstieg von 90°. Das PT1 im Nenner ergibt eine Steigung im Amplitudengang von -20 dB pro Dekade, und einen Phasenabfall von -90°. Das PT2 im Nenner ergibt eine Steigung im Amplitudengang von -40 dB pro Dekade, und einen Phasenabfall von -180°, sowie eine Amplitudenerhöhung von $a = 20$ dB in der Knickfrequenz (siehe Aufgabenteil b). Die konstante erfüllt näherungsweise $\sqrt{3} \approx 5$ dB.

d) (i) $\omega_c = \sqrt{3}$, $\Phi = 70$, d.h. Sollphase in ω_c ist $\arg = -110$. Desweiteren ist ein I-Anteil notwendig für die bleibende Regelabweichung.

(ii) $\hat{g}_r(s) = \frac{V(1 + 0.1s + s^2)}{s(1 + Ts)}$

(iii) Phase in $\omega_c = \sqrt{3}$ von $\hat{l}(s) = \frac{V\sqrt{3}(1 + \frac{s}{\sqrt{3}})}{s(1+s)(1+Ts)}$

$$\arg(\hat{l}(i\sqrt{3})) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - \underbrace{\arctan(\sqrt{3})}_{\frac{\pi}{3}} - \arctan(\sqrt{3}T) = -110 \frac{2\pi}{360} \Rightarrow T = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan\left(\frac{\pi}{36}\right)$$

Für den Verstärkungsfaktor gilt

$$V = \left| \frac{\sqrt{3}(1+i)}{i\sqrt{3}(1+i\sqrt{3})(1+iT\sqrt{3})} \right|^{-1} = \left| \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3T^2+1}} \right|^{-1} = \sqrt{2(3T^2+1)}.$$

Zur *Veranschaulichung* ist das zugehörige Bode-Diagramm des offenen Regelkreises $\hat{l}(s) = \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)$ in Abbildung 2 dargestellt.

- e) Die Phase beim Eintritt in den Einheitskreis ist kleiner als -180° , womit gilt, dass $\arg(\hat{l}(\omega_c)) < -180^\circ$, und der geschlossene Regelkreis mit einem Freiheitsgrad somit nicht asymptotisch stabil ist.

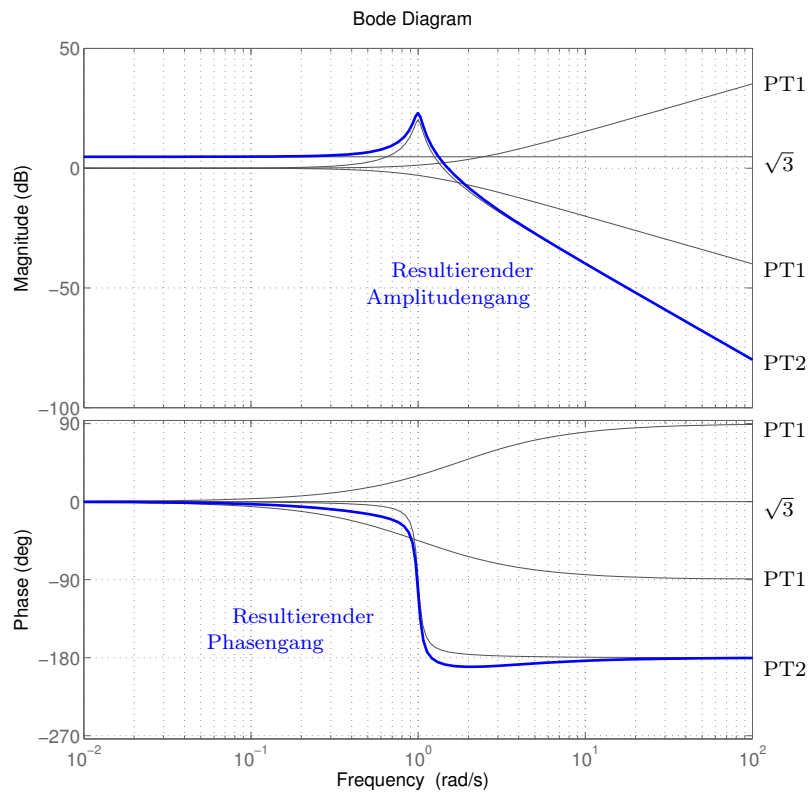


Abb. 1: Bode Diagramm zu Aufgabenteil c).

Lösung zu Aufgabe 3:

- a) $C = E_3, D = [0, 0, 0]^T$
- b) Die Gleichung $|\lambda E - [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}]| = 0$ beschreibt das charakteristische Polynom zur Bestimmung der Eigenwerte der Steuerbarkeitsmatrix $S(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}]$. Da alle Eigenwerte ungleich null

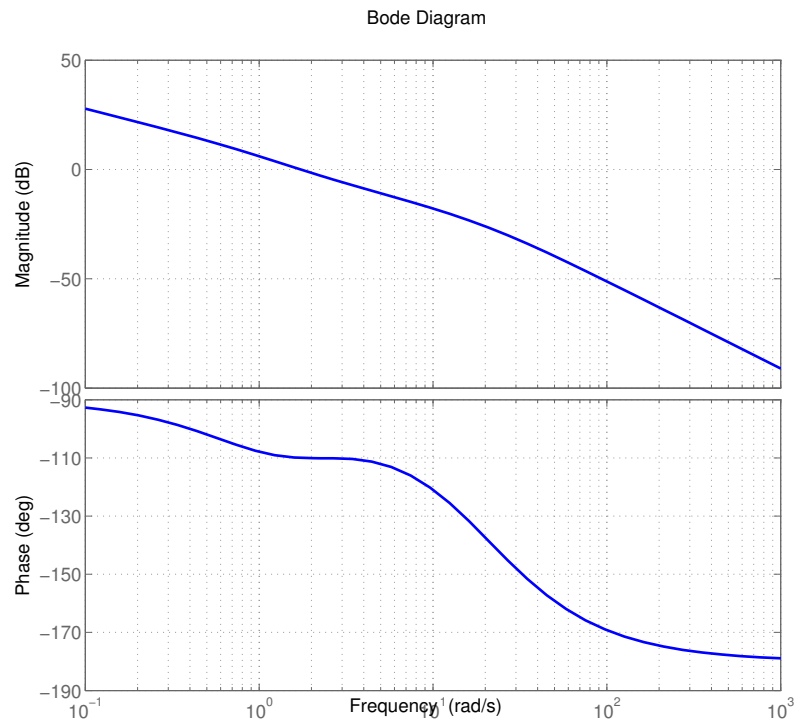


Abb. 2: Bode Diagramm des offenen Regelkreises $\hat{l}(s) = \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)$.

sind, ist S regulär/invertierbar. Siehe Satz 6.13: Σ in RNF überführbar $\leftrightarrow S(A, \mathbf{b})$ regulär bzw. Transformationsmatrix existiert.

c)

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

mit $a_i, i = 0, \dots, 2$ aus:

$$|\lambda E - A| = \sum_{i=0}^3 a_i \lambda^{i-1}, \quad a_3 = 1$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2 & -2 & 0 \\ \frac{53}{2} & \lambda + 6 & 0 \\ -8 & -13 & \lambda - 5 \end{vmatrix}.$$

Entwickelt nach der dritten Spalte:

$$= (\lambda - 5)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -2 \\ \frac{53}{2} & \lambda + 6 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 + 3\lambda^2 + 25\lambda - 325$$

$$\rightarrow a_2 = 3, a_1 = 25, a_0 = -325$$

$$\curvearrowright A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 325 & -25 & -3 \end{bmatrix}.$$

Die RNF eignet sich gut für das Auslegen eines Zustandsreglers, weil die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises $(A_c - \mathbf{b}_c \mathbf{k}_c^T)$ unmittelbar über die Koeffizienten des Rückführvektors \mathbf{k}_c^T gewählt werden können:

$$(A_c - \mathbf{b}_c \mathbf{k}_c^T) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 - k_{c1} & -a_1 - k_{c2} & -a_2 - k_{c3} \end{bmatrix}}_{\text{Koeff. des Wunschkpolynoms}}$$

- d) Siehe Satz 6.14: $\mathbf{w}^T = [0, \dots, 0, 1]S^{-1}(A, \mathbf{b})$ beschreibt die letzte Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix. Mit den Werten aus der Aufgabenstellung erhält man

$$\mathbf{w}^T = [w_1, w_2, w_3] = [-0.081, 0.029, 0.0252] \frac{1}{100}.$$

$p_i, i = 0, \dots, 3$ sind die Koeffizienten des Wunschkpolynoms und ergeben sich aus

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^3 (\lambda - \lambda_i^*) &= \sum_{i=0}^3 p_i \lambda^i \\ &= \lambda^3 + 12\lambda^2 + 48\lambda + 64 \\ &\rightarrow \mathbf{p}^T = [p_0, p_1, p_2, p_3] = [64, 48, 12, 1] \end{aligned}$$

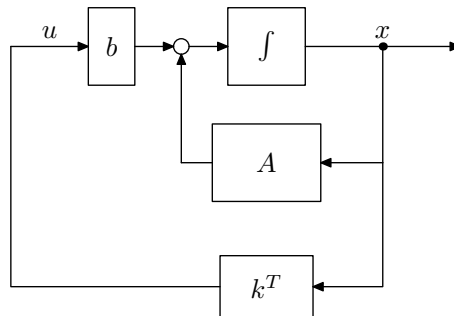


Abb. 3: Blockdiagramm der Strecke Σ mit Zustandsrückführung \mathbf{k}^T

e)

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} = -\underbrace{\mathbf{k}^T V}_{=: \mathbf{k}_c^T} \mathbf{z}.$$

Lösung zu Aufgabe 4:

a) Es gelten die folgenden Zusammenhänge:

(i) Die Übertragungsfunktionen ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \hat{t}_{r,y}(s) &= \frac{\hat{g}_r(s)(\hat{g}(s) + \Delta\hat{g}(s))}{1 + \hat{g}_y(s)\hat{g}_r(s)(\hat{g}(s) + \Delta\hat{g}(s))} \\ \hat{t}_{u,y}(s) &= \hat{g}(s) + \Delta\hat{g}(s) \\ \hat{t}_{r,u}(s) &= \frac{\hat{g}_r(s)}{1 + \hat{g}_y(s)\hat{g}_r(s)(\hat{g}(s) + \Delta\hat{g}(s))} \end{aligned}$$

- (ii) Es muss gelten $1 + \hat{g}_y(s)\hat{g}_r(s)(\hat{g}(s) + \Delta\hat{g}(s)) \neq 0$ für $\Re\{s\} \geq 0$ und es darf zu keiner Pol-/Nullstellenkürzung in der um $\Delta\hat{g}(s)$ erweiterten Übertragungsfunktion in der geschlossenen rechten Halbebene kommen.
- b) Es gilt $y(t) = |\hat{g}(i\omega)| \sin(\omega t + \arg(\hat{g}(i\omega)))$; der Term $t^2 \exp(-t)$ geht für $t \rightarrow \infty$ gegen 0 und spielt somit im eingeschwungenen Zustand keine Rolle. Es ergibt sich mit den angegebenen Daten $y(t) = \frac{1}{2\xi} \sin(t - \frac{7\pi}{4})$ und somit $y(t) \rightarrow \infty$ für $\xi \rightarrow 0$ (Anregung eines ungedämpften Systems in einer Resonanzfrequenz).
- c) Es ergeben sich die folgenden Zwischenergebnisse:

Eigenwerte $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$ (kann aus Matrix abgelesen werden)

Eigenvektoren $\mathbf{v}_1 = [1, 0, 0]^T$, $\mathbf{v}_2 = [3 - i, -10i, 10]^T$

Transformationsmatrix $V = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}$

Lösung für $\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{z}$ mit $V\mathbf{z}(0) = \mathbf{x}(0) = [2, 0, 0]^T$ führt auf $\mathbf{z}(0) = \mathbf{x}(0)$ und damit zu

$$z_1(t) = 2e^{-t}, \quad z_2(t) = z_3(t) = 0.$$

- d) Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = -\frac{1}{4}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Die Anwendung des PBH-Rangtests führt darauf, dass für beide Eigenwerte gilt

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda_j E - A \\ \mathbf{c}^T \end{bmatrix} = 2,$$

woraus die Beobachtbarkeit folgt.