Lösung (Aufgabe 1).

a) i) Eingang des Systems ist $u(t) = a(t)$, da über die Einstellung des Ventils die Ausströmgeschwindigkeit direkt vorgegeben werden kann, die das Gesamtsystem antreibt $^{0.25\text{ Pkt.}}$. Ausgang des Systems ist $y(t) = u_\mathrm{A}(t)$, da laut Aufgabe die Ankerspannung gemessen wird. $^{0.25\text{ Pkt.}}$

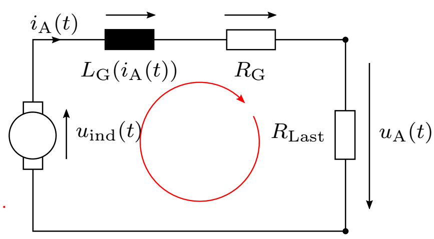
ii) Aus der Bilanz der Volumenflüsse ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
Q_\mathrm{B}(t) &= \frac{dV_\mathrm{B}}{dt} = A_\mathrm{B}\dot{s}(t) = a(t)A_\mathrm{V}\sqrt{2gs(t)} \ ^{0.5\text{ Pkt.}}\\
\Rightarrow \quad \dot{s}(t) &= a(t)\frac{A_\mathrm{V}}{A_\mathrm{B}}\sqrt{2gs(t)} \ ^{0.5\text{ Pkt.}}
\end{aligned}
$$

Für das mechanische System gilt nach Drehimpulssatz:

$$
\begin{aligned}
J\ddot{\varphi}_\mathrm{T}(t) &= M_\mathrm{T}(t) - M_\mathrm{G}(t) \ ^{0.5\text{ Pkt.}} = \beta\big(\sqrt{2gs(t)} - r_\mathrm{T}\dot{\varphi}_\mathrm{T}(t)\big)^2 - k_\mathrm{G}i_\mathrm{A}(t)\\
\Rightarrow \quad \ddot{\varphi}_\mathrm{T}(t) &= \frac{\beta}{J}\big(\sqrt{2gs(t)} - r_\mathrm{T}\dot{\varphi}_\mathrm{T}(t)\big)^2 - \frac{k_\mathrm{G}}{J}i_\mathrm{A}(t) \ ^{0.5\text{ Pkt.}}
\end{aligned}
$$

Aus der Maschengleichung folgt:



$$
0 = u_\mathrm{ind}(t) + + + u_\mathrm{A}(t) \ ^{0.5\text{ Pkt.}}
$$

Aus den Bauteilgleichungen folgt:

$$
\begin{aligned}
&= R_\mathrm{G}i_\mathrm{A}(t), \ ^{0.25\text{ Pkt.}} \quad u_\mathrm{A}(t) = R_\mathrm{Last}i_\mathrm{A}(t) \ ^{0.25\text{ Pkt.}},\\
&= \frac{d}{dt}\Big(L_\mathrm{G}\big(i_\mathrm{A}(t)\big)i_\mathrm{A}(t)\Big) = \left(\frac{\partial L_\mathrm{G}(i_\mathrm{A}(t))}{\partial i_\mathrm{A}(t)}i_\mathrm{A}(t) + L_\mathrm{G}(i_\mathrm{A}(t))\right)\frac{di_\mathrm{A}(t)}{dt} \ ^{0.5\text{ Pkt.}}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
0 &= \overbrace{k_\mathrm{G}\dot{\varphi}_\mathrm{T}}^{0.25\text{ Pkt.}} + \left(\frac{\partial L_\mathrm{G}(i_\mathrm{A}(t))}{\partial i_\mathrm{A}(t)}i_\mathrm{A}(t) + L_\mathrm{G}(i_\mathrm{A}(t))\right)\frac{di_\mathrm{A}(t)}{dt} + R_\mathrm{G}i_\mathrm{A}(t) + R_\mathrm{Last}i_\mathrm{A}(t)\\
\Rightarrow \quad \frac{di_\mathrm{A}(t)}{dt} &= \frac{-k_\mathrm{G}\dot{\varphi}_\mathrm{T}(t)}{\frac{\partial L_\mathrm{G}(i_\mathrm{A}(t))}{\partial i_\mathrm{A}(t)}i_\mathrm{A}(t) + L_\mathrm{G}(i_\mathrm{A}(t))} - \frac{(R_\mathrm{G} + R_\mathrm{Last})i_\mathrm{A}(t)}{\frac{\partial L_\mathrm{G}(i_\mathrm{A}(t))}{\partial i_\mathrm{A}(t)}i_\mathrm{A}(t) + L_\mathrm{G}(i_\mathrm{A}(t))} \ ^{0.5\text{ Pkt.}}
\end{aligned}
$$

Damit gilt:

$$
\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} u\frac{A_\mathrm{V}}{A_\mathrm{B}}\sqrt{2gx_1}\\ x_3 \ ^{0.25\text{ Pkt.}}\\ \frac{\beta}{J}\big(\sqrt{2gx_1} - r_\mathrm{T}x_3\big)^2 - \frac{k_\mathrm{G}}{J}x_4\\ \frac{-k_\mathrm{G}x_3}{\frac{\partial L_\mathrm{G}(x_4)}{\partial x_4}x_4 + L_\mathrm{G}(x_4)} - \frac{(R_\mathrm{G}+R_\mathrm{Last})x_4}{\frac{\partial L_\mathrm{G}(x_4)}{\partial x_4}x_4 + L_\mathrm{G}(x_4)} \end{bmatrix} \ ^{0.25\text{ Pkt.}}, \quad y = R_\mathrm{Last}x_4 \ ^{0.25\text{ Pkt.}}
$$

b) i) Für die Ruhelage gilt $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), u(t), t) = \boldsymbol{0}$ $^{0.5\text{ Pkt.}}$, daraus folgt

$$
\begin{aligned}
0 &= x_{1,R}^2 + e^{-x_{2,R}}\tan() \overbrace{=}^{=0} x_{1,R}^2 \quad \Rightarrow \quad x_{1,R} = 0 \ ^{0.5\text{ Pkt.}}\\
0 &= \sqrt[4]{x_{1,R}} + \frac{\alpha}{x_{2,R}} + \beta \quad \Rightarrow \quad x_{2,R} = -\frac{\alpha}{\beta} \ ^{0.5\text{ Pkt.}}
\end{aligned}
$$

ii) Linearisierung um einen allgemeinen Arbeitspunkt $(\boldsymbol{x}_R, u_R)$.

$$
\begin{aligned}
\Delta\dot{\boldsymbol{x}} &= A\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\Delta u \ ,\\
\Delta y &= \boldsymbol{c}^T\Delta\boldsymbol{x} + d\Delta u \ .
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 2x_{1,R} \ \textcolor{red}{\scriptstyle 0.25\ \text{Pkt.}} & -\tan(\omega u_R)e^{-x_{2,R}} \ \textcolor{red}{\scriptstyle 0.25\ \text{Pkt.}} \\ \frac{1}{4x_{1,R}^{3/4}} \ \textcolor{red}{\scriptstyle 0.25\ \text{Pkt.}} & -\frac{\alpha}{x_{2,R}} \ \textcolor{red}{\scriptstyle 0.25\ \text{Pkt.}} \end{bmatrix} ,\\
\boldsymbol{b} &= \begin{bmatrix} \omega\sec(\omega)^2 e^{-x_{2,R}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega(1+\tan(\omega))e^{-x_{2,R}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega\frac{\cos(\omega)+\sin(\omega)}{\cos(\omega)}e^{-x_{2,R}} \\ 0 \end{bmatrix} \ \textcolor{red}{\scriptstyle 1\ \text{Pkt.}} ,\\
\boldsymbol{c}^T &= \begin{bmatrix} 2 \ \textcolor{red}{\scriptstyle 0.25\ \text{Pkt.}} & 5 \ \textcolor{red}{\scriptstyle 0.25\ \text{Pkt.}} \end{bmatrix} , \quad d = 2(+\alpha) \ \textcolor{red}{\scriptstyle 0.5\ \text{Pkt.}}
\end{aligned}
$$

Lösung (Aufgabe 2).

a) Es gilt, dass

$$\hat{g}_1(s) \overset{0.5\text{ Pkt.}}{=} [1\ 0]\begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 0 & s+\sqrt{3} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \end{bmatrix} = [1\ 0]\frac{1}{(s+1)(s+\sqrt{3})}\begin{bmatrix} s+\sqrt{3} & 2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \hat{g}_1(s) \overset{0.5\text{ Pkt.}}{=} \frac{\sqrt{3}}{(1+s)\left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)}$$

Unter Berücksichtigung von $\hat{g}(s) = \hat{g}_1(s)\hat{g}_2(s)$ folgt

$$\hat{g}(s) \overset{0.5\text{ Pkt.}}{=} \frac{V_1 V_2}{\left(1+\frac{s}{\omega_1}\right)\left(1+\frac{s}{\omega_2}\right)\left(1+2\xi\frac{s}{\omega_3}+\left(\frac{s}{\omega_3}\right)^2\right)} \tag{1}$$

mit

$$V_1 = \sqrt{3}, \quad V_2 = 4, \quad \omega_1 = 1, \quad \omega_2 = \sqrt{3}, \quad \omega_3 = 0.5, \quad \xi = 0.05.$$

b) Die Resonanzerhöhung beträgt

$$a_r \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} 20\log\left(\frac{1}{2\xi}\right) = 20\log\left(\frac{1}{0.1}\right) = 20\log(10) \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} 20.$$

c) Gemäß der Darstellung von $\hat{g}(s)$ in (1) sind die Knickfrequenzen ω_i gegeben.

Die Teilübertragungsfunktionen zeigen folgendes Verhalten im Bodediagramm:

0.5 Pkt. Die konstante Verstärkung beträgt $V_1 = \sqrt{3} \triangleq 4.77$ dB.

0.5 Pkt. In $\omega_1 = 1$ fällt die Amplitudensteigung von 0 auf -20 dB/dec ab, die Phase senkt sich um 45° und strebt asymptotisch gegen $-90°$.

0.5 Pkt. In ω_2 fällt die Amplitudensteigung von 0 auf -20 dB/dec ab, die Phase senkt sich um 45° an und strebt asymptotisch gegen $-90°$.

0.5 Pkt. Die konstante Verstärkung von $\hat{g}_2(s)$ beträgt $V_2 = 4 \triangleq 12$ dB.

0.5 Pkt. In ω_3 sinkt die Amplitudensteigung von 0 auf 40 dB/dec ab, die Phase senkt sich um 90° und strebt asymptotisch gegen $-180°$.

Zusammengefügt ergibt dies das Verhalten wie in Abbildung 1 dargestellt 0.5 Pkt..

d) Die Antworten zu den Unterfragen können wie folgt beantwortet werden:

(i) Der Realisierungsterm dient dazu den Nennergrad zu erhöhen um die Eigenschaft $\deg(\hat{n}_r(s)) \geq \deg(\hat{z}_r(s))$ abzusichern, wobei $\hat{g}_r(s) = \frac{z_r(s)}{\hat{n}_r(s)}$ gilt. 0.25 Pkt. Unter der Vorraussetzung, dass die Zeitkonstante T_r des Realisierungsterms groß genug ist, genauer $T_r^{-1} \gg \omega_{c1} = \sqrt{3}$, 0.25 Pkt. kann dieser Term beim Entwurf zunächst vernachlässigt werden. Hierzu kann beispielsweise

$$T_r = 10^{-4}\text{s}$$

gewählt werden.

(ii) Mit $\hat{g}_{r1}(s) = \frac{V_{r1}(1+T_{d1}s)}{s(1+T_r s)}s$ gilt

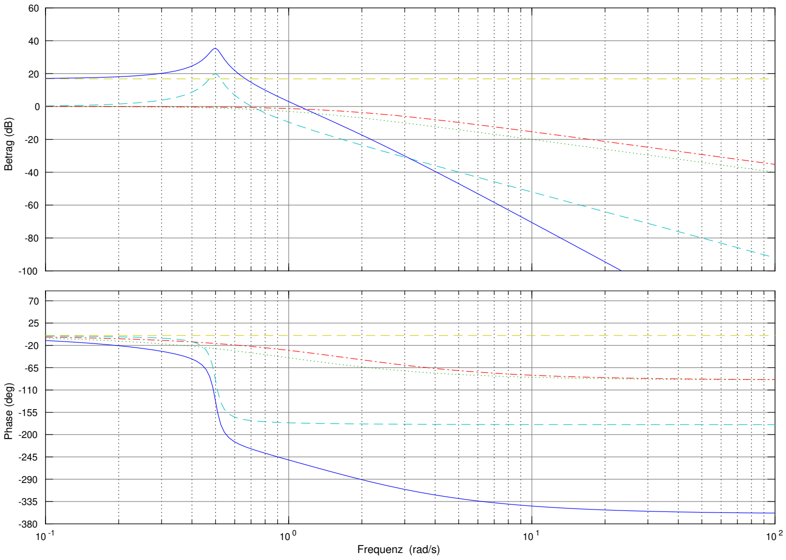


Abb. 1: Bodediagram der Übertragungsfunktion$\hat{g}(s)$ und ihrer Komponenten.

$$\hat{l}_1(s) \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} \hat{g}_{r1}(s)\hat{g}_1(s) = \frac{V_{r1}(1+T_{d1}s)V_1}{s(1+T_r s)\left(1+\frac{s}{\omega_1}\right)\left(1+\frac{s}{\omega_2}\right)}. \tag{2}$$

Nach dem Frequenzkennlinienverfahren übersetzen sich die Spezifikationen zu

$$\begin{aligned}
t_{r1} &= \frac{\sqrt{3}}{2} && \Rightarrow \quad \omega_{c1} = \frac{1.5}{t_{r1}} \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} \sqrt{3} \\
\ddot{u}_1 &= 0\% && \Rightarrow \quad \phi_1 = 70^\circ - \ddot{u}_1 = 70^\circ \quad \leftrightarrow \quad \arg(\hat{l}_1(j\omega_{c1})) \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} -110^\circ \equiv -\frac{11\pi}{18} \\
e_{\infty,1}|_{r=\sigma} &= 0 && \Rightarrow \quad \rho_1 \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} 1.
\end{aligned}$$

Weiterführend wird zunächst die Zeikonstante T_{d1} bestimmt. Es gilt, dass

$$\arg\left(\hat{l}_1(j\omega_{c1})\right) \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega_{c1}}{\omega_1}\right) - \arctan\left(\frac{\omega_{c1}}{\omega_2}\right) + \arctan\left(T_{d1}\omega_{c1}\right).$$

Einsetzen von $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \sqrt{3}$ und $\omega_{c1} = \sqrt{3}$ und Nachschlagen in der Referenzwertetabelle der Formelsammlung ergibt sich

$$\begin{aligned}
\arg\left(\hat{l}_1(j\omega_{c1})\right) &= -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\sqrt{3}\right) - \arctan(1) + \arctan\left(\sqrt{3}T_{d1}\right) \\
&= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + \arctan\left(\sqrt{3}T_{d1}\right) \\
&= \underbrace{-\frac{13\pi}{12}}_{0.25\text{ Pkt.}} + \arctan\left(\sqrt{3}T_{d1}\right)
\end{aligned}$$

Somit folgt aus der Anforderung, dass $\arg\left(\hat{l}_1(j\omega_{c1})\right) \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} -\frac{11\pi}{18}$, dass

$$\arctan\left(T_{d1}\omega_{c1}\right) = \frac{17\pi}{36} \quad \Leftrightarrow \quad T_{d1} \overset{\text{0.25 Pkt.}}{=} \frac{\tan\left(\frac{17\pi}{36}\right)}{\sqrt{3}} \approx 6.599.$$

Aus der Anforderung $|\hat{l}_1(j\omega_{c1})| = 1$ folgt unter Berücksichtigung von (2) und Vernachlässigung des Realisierungsterms

$$V_{r1} \overset{\text{0.25 Pkt.}}{=} \frac{|j\omega_{c1}|\left|1+\frac{j\omega_{c1}}{\omega_1}\right|\left|1+\frac{j\omega_{c1}}{\omega_2}\right|}{V_1|1+T_{d1}j\omega_{c1}|} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{4}\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{1+\frac{\tan(17/36\pi)^2}{3}}} \overset{\text{0.25 Pkt.}}{=} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{\tan(17/36\pi)^2}{3}}} \approx 0.2465$$

e) Entsprechend den Spezifikationen muss gelten:

$$t_{r2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_{c2} \overset{\text{0.25 Pkt.}}{=} \frac{1.5}{t_{r1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\ddot{u}_2 = 10\% \quad \Rightarrow \quad \phi_1 = 70^\circ - \ddot{u}_2 = 60^\circ \quad \leftrightarrow \quad \arg(\hat{l}_2(j\omega_{c2})) \overset{\text{0.25 Pkt.}}{=} -120^\circ \equiv -\frac{2\pi}{3}$$

$$e_{\infty,2}|_{r=\sigma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_2 \overset{\text{0.25 Pkt.}}{=} 1.$$

Ein Kompensationsregler $\hat{g}_{r2}(s)$ kann hierzu in der Form

$$\hat{g}_{r2}(s) \overset{\text{0.25 Pkt.}}{=} \frac{V_{r2}\left(1+2\xi\frac{s}{\omega_3}+\left(\frac{s}{\omega_3}\right)^2\right)}{s(1+T_2 s)} \tag{3}$$

angesetzt werden, sodass gilt

$$\hat{l}_2(s) = \hat{g}_{r2}(s)\hat{g}_2(s) = \frac{V_{r2}V_2}{s(1+T_2 s)}.$$

Somit gilt die Anforderung

$$\arg\left(\hat{l}_2(j\omega_{c2})\right) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{T_2}{\sqrt{3}}\right) \overset{\text{0.25 Pkt.}}{=} -\frac{2\pi}{3}$$

woraus mittels Nachschlagen in der Referenzwertetabelle der Formelsammlung folgt, dass

$$T_2 = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\sqrt{3} \overset{\text{0.25 Pkt.}}{=} 1.$$

Der Verstärkungsfaktor V_{r2} ergibt sich zu

$$V_{r2} \overset{\text{0.25 Pkt.}}{=} \frac{|j\omega_{c2}|\,|1+jT_2\omega_{c2}|}{V_2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{4}{3}}}{4} \overset{\text{0.25 Pkt.}}{=} \frac{1}{3\sqrt{4}}$$

Abbildung 2 zeigt den Vergleich der offenen und der geregelten Strecke für einen Einheitssprung $r_1(t) = \sigma(t)$.

(a)

(b)

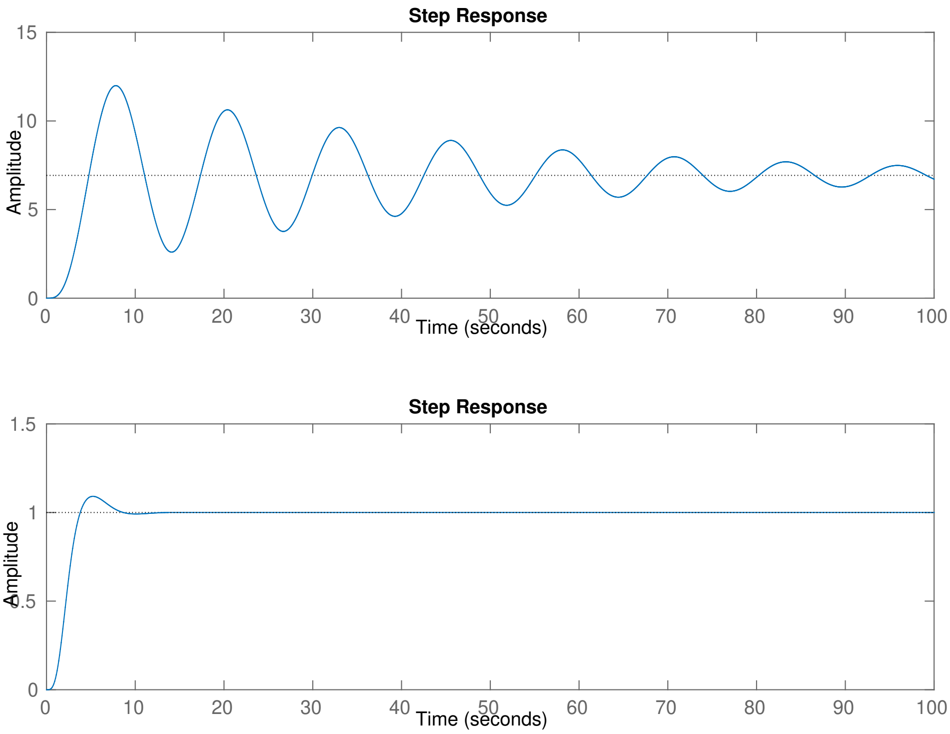


Abb. 2: Vergleich des ungeregelten (a) und des geregelten (b) Systems.

Lösung (Aufgabe 3).

a) Die Eigenwerte des Systems ergeben sich zu $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -1$ 0.25 Pkt.. Damit ist das System asymptotisch stabil, da $Re\{\lambda_{1,2}\} < 0$ 0.25 Pkt.. late

b) Mit den Eigenvektoren des Systems erhält man die reguläre Zustandstransformationsmatrix

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 1 Pkt.}.$$

Damit folgt

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ 1 Pkt.}.$$

c) Die Transitionsmatrix kann durch Rücktransformation von $\tilde{\Phi}(t) = \exp(\tilde{A}t)$

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \exp(-2t) & 0 \\ 0 & \exp(-t) \end{bmatrix} \text{ 0.5 Pkt.}$$

mit Hilfe von V berechnet werden. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= V\tilde{\Phi}V^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-2t) & 0 \\ 0 & \exp(-t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \exp(-2t) & \exp(-t) - \exp(-2t) \\ 0 & \exp(-t) \end{bmatrix} \text{ 1 Pkt.}.
\end{aligned}$$

d) Die Sprungantwort berechnet sich aus

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= \Phi(t)\boldsymbol{x}_0 + \int_0^\tau \Phi(t-\tau)\boldsymbol{b}u\,dt \\
&= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} - \frac{\exp(-2t)(2\exp(t)-1)}{2}\right) \\ (1-\exp(-t)) \end{bmatrix} u \text{ 0.5 Pkt.}
\end{aligned}$$

und der Gleichung für den Ausgang

$$\begin{aligned}
y(t) &= c^T\boldsymbol{x}(t) \\
&= \frac{u}{2} - \frac{1}{2}\exp(-2t)u \text{ 0.5 Pkt.}
\end{aligned}$$

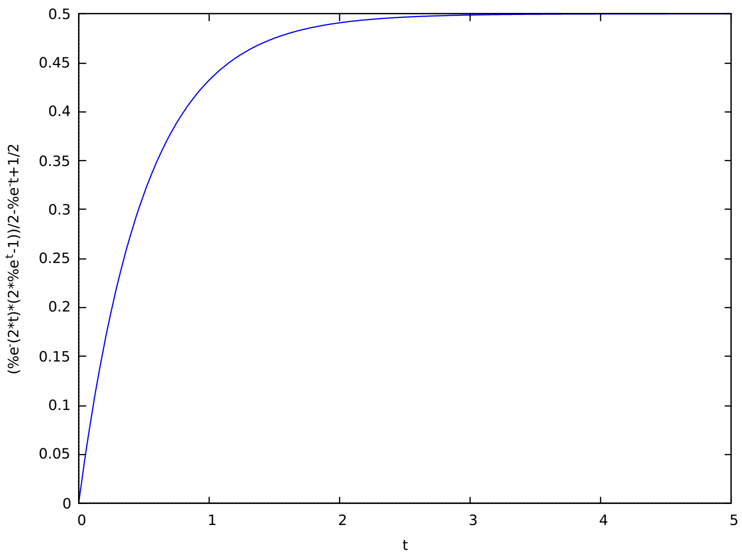
Die Steigung folgt aus

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y(t)}{\partial t}|_{t=0} &= \exp(-2t) \\
&= 1. \text{ 1.0 Pkt.}
\end{aligned}$$

Aus diesen Informationen lässt sich die Sprungantwort zeichnen 1 Pkt..

e) Mit Hilfe der Ackermann-Formel wird wie folgt ein Zustandsregler entworfen. Überprüfen der Steuerbarkeitsmatrix auf vollständige Steuerbarkeit.

$$\begin{aligned}
S &= \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$



Damit ist $rang(S) = 2$ und damit vollständig steuerbar 0.5 Pkt.. Der weitere Verlauf erfolgt nach Skript. Berechnung der Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises

$$\begin{aligned} A_g &= A - \boldsymbol{b} \left[k_1 \; k_2.\right] \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -k_1 & -k_2 - 1 \end{bmatrix} \text{ 0.5 Pkt.}. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich die Koeffizient des charakteristischen Polynoms

$$s^2 + k_2 s + 3s + 2k_2 + k_1 + 2.$$

Nach Aufgabenstellung sollen die Eigenwerte bei $\lambda_{1,2} = -5$ liegen, welches durch das folgende Polynom erfüllt wird.

$$p(s) = (s + 5)(s + 5) = s^2 + 10s + 25.$$

Die Koeffizienten ergeben sich also zu $p_0 = 25$ und $p_1 = 10$ 1 Pkt.. Mit

$$\boldsymbol{w}^T = \left[0 \; 1\right] S^{-1}$$

und dem damit folgendem Rückführvektor

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}^T &= \boldsymbol{w}^T \left(25 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 10A + A^2 \right) \\ &= \left[9 \; 7\right] \text{ 1 Pkt.} \end{aligned}$$

erhält man alle nötigen Komponenten für das Stellgesetz.

Lösung (Aufgabe 4).

a) Bestimmung der Dynamikmatrix A.

(i) Für die gegebene Transitionsmatrix kann man 3 Jordanblöcke identifizieren. Daher ergibt sich die Dynamikmatrix zu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & -\pi & -3 \end{bmatrix}. \quad \text{1 Pkt.} \tag{4}$$

(ii) Aufgrund der 3 Jordanblöcke muss dim $\boldsymbol{u} = 3$ um vollständige Steuerbarkeit gewährleisten zu können. 1 Pkt.

b) Linearisiertes Modell ein einfachwirkenden hydraulischen Zylinders

(i) Identifikation von A, $\boldsymbol{b}$ und C^T.

- Dynamikmatrix:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} & \frac{Q}{m} \\ 0 & -\frac{Q\beta}{V_R} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{0.5 Pkt.} \tag{5}$$

- Eingangsvektor:

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\beta}{V_R} \end{bmatrix} \quad \text{0.25 Pkt.} \tag{6}$$

- Ausgangsmatrix:

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{0.25 Pkt.} \tag{7}$$

(ii) Bestimmung der Übertragungsfunktion $\hat{g}_1(s) = \Delta\hat{w}(s)/\Delta\hat{q}(s)$ an.

- Laplace-Transformation der gegebenen Differentialgleichungen: 0.5 Pkt.

$$\begin{aligned} s\Delta\hat{w}(s) &= \Delta\hat{v}(s)\,, \\ s\Delta\hat{v}(s) &= \frac{1}{m}(Q\Delta\hat{p}(s) - d\Delta\hat{v}(s) - k\Delta\hat{w}(s)), \\ s\Delta\hat{p}(s) &= \frac{\beta}{V_R}(\Delta\hat{q}(s) - Q\Delta\hat{v}(s)) \end{aligned} \tag{8}$$

- $\Delta\hat{q}(s)$ als Funktion von $\Delta\hat{w}(s)$ anschreiben. D.h. mit

$$\Delta\hat{q}(s) = s\left(\frac{V_R}{\beta}\Delta\hat{p}(s) + Q\Delta\hat{w}(s)\right) \tag{9}$$

und

$$\Delta\hat{p}(s) = \frac{s^2m + sd + k}{Q}\Delta\hat{w}(s) \tag{10}$$

folgt direkt

$$\Delta\hat{q}(s) = s\left(V_R\frac{s^2m + sd + k}{Q\beta} + Q\right)\Delta\hat{w}(s) \text{ 1 Pkt.} \tag{11}$$

- Somit kann $\hat{g}_1(s) = \Delta\hat{w}(s)/\Delta\hat{q}(s)$ ganz einfach als

$$\hat{g}_1(s) = \frac{\alpha}{s\left(s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{k}{m} + \alpha Q\right)} \text{ 0.5 Pkt.} \tag{12}$$

mit $\alpha = \frac{Q\beta}{V_R m}$ angegeben werden.

(iii) Die Übertragungsfunktion $\hat{g}_1(s)$ ist nicht eingangs-/ausgangsstabil, da sie einen Integralteil $(1/s)$ beinhaltet. 0.5 Pkt.

(iv) Der Rang der Steuerbarkeitsmatrix des Systems mit Eingang Δq ergibt sich zu

$$\operatorname{rank} C(A, \boldsymbol{b}) = \operatorname{rank}\left[\boldsymbol{b}\ A\boldsymbol{b}\ A^2\boldsymbol{b}\right] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & X \\ \frac{\beta}{V_R} & 0 & X \end{bmatrix} = 3 \text{ 0.5 Pkt.} \tag{13}$$

wobei die Einträge, die mit X gekennzeichnet sind, nichts mehr zum Rang beitragen und daher nicht berechnet werden müssen. Das System ist daher vollständig steuerbar, da die Dimension des Systems ebenso 3 ist. 0.5 Pkt.

(v) Die Beobachtbarkeitsmatrix hat vollen Rang$\,= 3$,

$$\operatorname{rank} O(A, \boldsymbol{c}^T) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^T \\ \boldsymbol{c}^T A \\ \boldsymbol{c}^T A^2 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ X & X & Q/m \end{bmatrix} = 3 \text{ 0.5 Pkt.} \tag{14}$$

Das System ist daher auch vollständig beobachtbar. Argumentation äquivalent zu (iv). 0.5 Pkt.

(vi) Die Übertragungsfunktion $\hat{g}_2(s)$ kann mit

$$\hat{g}_2(s) = s\hat{g}_1(s) = \frac{\alpha}{s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{k}{m} + \alpha Q} \text{ 0.25 Pkt.} \tag{15}$$

direkt angeschrieben werden. D.h. die Polstellen ergeben sich zu

$$s_{1,2} = -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4m} - \frac{k}{m} - \alpha Q}. \text{ 0.5 Pkt.} \tag{16}$$

Mit positiver Masse m folgt die Bedingung $d > 0$. Dies bedeutet die logische Konsequenz, dass (viskose) Reibung dieses System (eingangs-/ausgangs)stabilisiert. 0.25 Pkt.

(vii) Aufgrund der Pol-/Nullstellenkürzung bei der Übertragungsfunktion $\hat{g}_2(s)$ kann das System mit $y(t) = \Delta v(t)$ nicht gleichzeitig vollständige steuerbar und beobachtbar sein. Da das System aber mit $u(t) = \Delta q(t)$ vollständig steuerbar ist, kann es mit dem Ausgang $\Delta v(t)$ nicht vollständig beobachtbar sein. 0.5 Pkt.

(viii) Bei der Übertragungsfunktion $\hat{g}_2(s)$ erfolgt eine Pol-/Nullstellenkürzung, daher kann mit $\hat{g}_2(s)$ keine Aussage zu asymptotischer Stabilität gemacht werden, jedoch mit $\hat{g}_1(s)$. Das System ist nicht asymptotisch stabil, da die Ordnung von $\hat{g}_1(s)$ gleich der Systemordnung $n = 3$ ist (keine Pol-/Nullstellenkürung), und diese nicht eingangs-/ausgangsstabil ist. 0.5 Pkt.

(ix) Die Störgröße $f_{\mathrm{ext}}(t)$ ist eine Kraft, daher folgt die Abänderung nur in der zweiten Differentialgleichung zu $\Delta\dot{v} = (Q\Delta p - d\Delta v - k\Delta w \underline{-f_{\mathrm{ext}}})/m$. 0.5 Pkt.