

### Lösung zu Aufgabe 1:

- a) i) Der Systemausgang  $y(t) = s(t)$  **0.5 Pkt.** kann vollständig durch die Stellgröße  $u(t) = \dot{q}(t)$  **0.5 Pkt.** und die Systemzustände beschrieben werden.

Die Modellbildung der Rakete (mechanisches System / translatorische Bewegung) führt auf den Impulssatz / Bilanz der Kräfte und somit auf eine Differenzialgleichung 2. Ordnung, die die Beschleunigung der Rakete in **Abhängigkeit** der aktuellen Stellgröße, des Integrals (kumulierte) der Stellgröße über die Zeit  $x_1 = q(t)$  und der aktuellen Höhe  $x_2 = s(t)$  **beschreibt**. Für die **Beschreibung in Form eines Differenzialgleichungssystems 1. Ordnung** muss die Geschwindigkeit der Rakete  $x_2(t) = \dot{s}(t)$  als Hilfsgröße eingeführt werden. Sind nun die Anfangszustände  $\mathbf{x}(t_0)$  bekannt, kann mit dieser Wahl der Zustände der Ausgang vollständig für  $t > t_0$  beschrieben werden. **0.5 Pkt.**

- ii) Aus der Bilanz der Kräfte (Impulssatz) ergibt sich

$$\begin{aligned} m(t)\ddot{s}(t) &= F_{\text{Schub}}(t) - F_{\text{W}}(t) - F_{\text{grav}} \quad \mathbf{0.5 Pkt.} \\ &= \dot{m}(t)(v_T - \dot{s}(t) + \alpha\dot{m}(t)) - \beta\rho(s(t))(\dot{s}(t))^2 - m(t)g \\ &= v_T\dot{m}(t) - \dot{s}(t)\dot{m}(t) + \alpha\dot{m}(t)^2 - \beta\rho(s(t))(\dot{s}(t))^2 - m_s g - q(t)g \quad \mathbf{0.5 Pkt.} \\ \Rightarrow \ddot{s}(t) &= \frac{1}{m_s - q(t)} \left( v_T\dot{m}(t) - \dot{s}(t)\dot{m}(t) + \alpha\dot{m}(t)^2 - \beta\rho(s(t))(\dot{s}(t))^2 \right) - g \quad \mathbf{0.5 Pkt.}, \\ \dot{m}(t) &= -\dot{q}(t) = -u(t) \quad \mathbf{0.5 Pkt.}, \end{aligned}$$

Überführt in Zustandsdarstellung gilt damit

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u \\ x_3 \\ \frac{1}{m_s - x_1} \left( (x_3 - v_T)u(t) - \alpha u(t)^2 - \beta\rho(x_2)(x_3)^2 \right) - g \end{bmatrix} \\ y &= x_2 \quad \mathbf{0.5 Pkt.} \end{aligned}$$

- b) i) Für einen Arbeitspunkt muss gelten  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t), t) = \mathbf{0}$  **0.5 Pkt.**, daraus folgt

$$0 = (2x_{1,R}^2 + e^{-x_{2,R}})x_{3,R}^2 + x_{3,R}^6 - x_{3,R}^2 \quad (2)$$

$$0 = \cos(x_{2,R}) - \frac{x_{1,R}}{x_{3,R}} \quad (3)$$

$$0 = x_{2,R} \Rightarrow x_{2,R} = 0 \quad \mathbf{0.5 Pkt.} \quad (4)$$

Aus (4) folgt durch einsetzen

$$0 = (2x_{1,R}^2 + 1)x_{3,R}^2 + x_{3,R}^6 - x_{3,R}^2 = 2x_{1,R}^2x_{3,R}^2 + x_{3,R}^6, \quad (5)$$

$$0 = 1 - \frac{x_{1,R}}{x_{3,R}} \Rightarrow x_{3,R} = x_{1,R}. \quad \mathbf{0.5 Pkt.} \quad (6)$$

Wird nun (6) in (5) eingesetzt ergibt sich

$$0 = 2x_{1,R}^4 + x_{1,R}^6 = (2 + x_{1,R}^2)x_{1,R}^4 \quad \mathbf{0.5 Pkt.}.$$

Mathematisch ergeben sich somit folgende Lösungen:

$$x_{1,R\{1,2,3,4\}} = 0, \quad (2 + x_{1,R}^2) = 0 \Rightarrow x_{1,R\{3,4\}} = \pm j\sqrt{2} \quad \mathbf{0.5 Pkt.}$$

Laut Aufgabenstellung gilt  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$  somit können nur  $x_{1,R\{1,2\}}$  gültige Lösungen sein. **0.5 Pkt.**

- ii) Linearisierung um einen allgemeinen Arbeitspunkt  $(\mathbf{x}_R, u_R)$ .

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\mathbf{x}} &= A \Delta \mathbf{x} + \mathbf{b} \Delta u, \\ \Delta y &= \mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x} + d \Delta u.\end{aligned}$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} 4x_{1,R}x_{3,R}^2 & -e^{-x_{2,R}}x_{3,R}^2 & 2(2x_{1,R}^2 + e^{-x_{2,R}})x_{3,R} \\ -\frac{1}{x_{3,R}} & -\sin(x_{2,R}) & \frac{x_{1,R}}{x_{3,R}^2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = [\sin(x_{2,R}) \quad 2x_{1,R}x_{2,R} \cos(x_{2,R}) \quad 0], \quad d = \frac{1}{2}.$$

## Lösung (Aufgabe 2).

Gegeben ist die Übertragungsfunktion der Regelstrecke

$$\hat{g}(s) = \frac{120}{\left(\frac{1}{2}s + 6\right)(s^2 + 2s + 2)}$$

- a) Die Polstellen der Übertragungsfunktion sind die Nullstellen des Nennerpolynoms  $\hat{n}(s)$ . Gemäß der multiplikativen Verknüpfung zweier Teilpolynome  $\hat{n}_1(s)$  und  $\hat{n}_2(s)$  können einfach die Nullstellen der Teilpolynome zur Beantwortung der Frage herangezogen werden:

$$\begin{aligned}\hat{n}_1(s) &= \frac{1}{2}s + 6 = 0 \rightarrow s_1 = -12 \quad \text{0.25 Pkt.} \\ \hat{n}_2(s) &= s^2 + 2s + 2 = 0 \quad \text{p.q.} \rightarrow s_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm j \quad \text{0.25 Pkt.}\end{aligned}$$

Die Polstellen lauten damit  $s_1 = -12$ ,  $s_{2,3} = -1 \pm j$ .

Gemäß Satz 4.4 auf Seite 54 im RT1-Skript ist  $\hat{g}(s)$  *eingangs-ausgangs-stabil*, weil sämtliche Polstellen  $s_1 \dots s_3$  negativen Realteil haben. Angenommen,  $\hat{g}(s)$  beschreibt das Übertragungsverhalten des linearen Systems  $(A, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$ . Und angenommen,  $\hat{g}(s)$  und  $(A, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T)$  sind von gleicher Ordnung, d.h. die Anzahl der Zustände des linearen Systems  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  stimmt mit der höchsten Potenz des Nennerpolynoms von  $\hat{g}(s)$  überein<sup>1</sup>, dann ist ein *eingangs-ausgangs-stabiles* System auch *asymptotisch stabil* **0.5 Pkt.**

- b) Als PT<sub>2</sub>-Glied der Übertragungsfunktion wird  $\hat{g}_{PT2} = \frac{1}{(s^2 + 2s + 2)}$  bzw. dessen normierte Form identifiziert. Die Knickfrequenz kann aus der normierten Form unmittelbar abgelesen werden:

$$\frac{1}{\left(\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + 1\right)} \rightarrow \omega_k = \sqrt{2}. \quad \text{0.25 Pkt.}$$

Die Amplitudenerhöhung in ergibt sich durch die Betragsbildung an der Stelle  $s = j\omega_k = j\sqrt{2}$  mit anschließender logarithmischer Umrechnung:

$$\begin{aligned}a &= \left| -1 + 2j\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right|^{-1} \\ &= \left| 2j\frac{1}{\sqrt{2}} \right|^{-1} \\ &= (\sqrt{2})^{-1} \quad \text{0.25 Pkt.} \\ a &= 20 \log(\sqrt{2}^{-1}) = -\frac{1}{2} 20 \log(2) = -\frac{1}{2} 6 \text{dB} = 3 \text{dB} \quad \text{0.5 Pkt.}\end{aligned}$$

- c) Siehe Abbildung 4. Stationäre Verstärkung  $V = 10 = 20 \text{dB}$ ; Knickfrequenz PT<sub>1</sub>-Glied  $\omega_{k1} = 12$  Knickfrequenz PT<sub>2</sub>-Glied  $\omega_{k2} = \sqrt{2} \approx 1.4$  **(1,5 je richtigen Amplituden- bzw Phasengang) 3 Pkt.**
- d) Siehe ebenfalls Abbildung 4. Es gilt

$$\begin{aligned}\omega_c &\approx 4, 3 \text{rad/s} \\ \Phi &= \arg(\hat{l}(j\omega)) + \pi \approx -172^\circ + 180^\circ = 8^\circ.\end{aligned}$$

Auf Grund der Approximation des Bode-Diagramms durch Asymptoten, ist die korrekte Markierung ausschlaggebend, nicht die numerischen Werte. **(0,25 bei generell richtigem Abtrag von -180) 0.5 Pkt.**

<sup>1</sup> Die höchste Potenz eines Polynoms wird auch als *Grad* des Polynoms bezeichnet.

e) (i) Gemäß der Näherungsbeziehungen des FKL-Verfahrens gilt

$$\omega_c t_r \approx 1.5 \leftrightarrow \omega_c = 2, \quad \phi[^\circ] + \ddot{u}[\%] \approx 70 \leftrightarrow \phi = 50^\circ. \quad 0.5 \text{ Pkt.}$$

(ii) Es werden in der Vorlesung drei verschiedene Reglerstrukturen im Zusammenhang mit dem FKL-Verfahren thematisiert:

- PI-Regler
- Lead-Lag-Regler
- Kompensationsregler

Beim Lead-Lag-Reglerentwurf kann nicht gesichert werden, dass die bleibende Regelabweichung stationär verschwindet. Der Kompensationsregler bringt entgegen der Anforderungen aus der Aufgabe eine Nullstellenkürzung mit sich. Es verbleibt der PI-Regler.

**PI-Regler:** Die allgemeine Struktur des Reglers lautet

$$\hat{g}_r(s) = \frac{V_I(1 + T_I s)}{s} \quad 0.25 \text{ Pkt.}$$

Die beiden zu bestimmenden Konstanten werden gemäß der FKL-Anforderungen an a) die **Durchtrittsfrequenz** (Betrag des offenen Regelkreises  $\hat{l}(s)$  an der Stelle  $s = j\omega_c$  identisch zu 1) und b) die **Phasenreserve** (Phase des offenen Regelkreises an der Stelle  $s = j\omega_c$  identisch zu  $\phi$ ) bestimmt.

a) **1 Pkt.** Es gilt für den **Betrag** die folgende Forderung

$$\begin{aligned} |\hat{l}(j\omega_c)| &= |\hat{g}(j\omega_c)\hat{g}_r(j\omega_c)| \\ &= |\hat{g}(2j)||\hat{g}_r(2j)| \\ &= \frac{120}{|j+6| \cdot |-4+4j+2|} \cdot \frac{V_I|1+2T_I j|}{|2j|} \\ &= \frac{120}{\sqrt{1+6^2}\sqrt{2^2+4^2}} \cdot V_I \frac{\sqrt{1+2^2T_I^2}}{\sqrt{2^2}} \\ &= 60V_I \frac{\sqrt{1+4T_I^2}}{\sqrt{37 \cdot 20}} \stackrel{!}{=} 1 \quad \rightarrow \quad V_I = \frac{\sqrt{37 \cdot 20}}{60\sqrt{1+4T_I^2}} \end{aligned}$$

Um die Abhängigkeit von  $T_I$  aus dieser Bestimmungsgleichung zu eliminieren, wird die Anforderung an die Phase betrachtet.

b) **1,25 Pkt.** Es gilt für die **Phase** die folgende Forderung

$$\arctan\left(\frac{\text{Im}(\hat{l}(j\omega_c))}{\text{Re}(\hat{l}(j\omega_c))}\right) = -180^\circ + \phi \stackrel{!}{=} -130^\circ \quad \text{bzw.} \quad \frac{\text{Im}(\hat{l}(i))}{\text{Re}(\hat{l}(i))} \stackrel{!}{=} \tan(-130^\circ)$$

hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\hat{l}(j\omega_c) &= \frac{120}{(j+6)(-2+4j)} \cdot \frac{V_I(1+2T_I j)}{2j} \\
&= \frac{120V_I(1+2T_I j)}{(-2+12j)(-2+4j)} \\
&= \frac{120V_I(1+2T_I j)}{-44-32j} \\
&= \frac{120V_I(1+2T_I j)}{-44-32j} \cdot \frac{-44+32j}{-44+32j} \\
&= \frac{120V_I}{\underbrace{44^2+32^2}_{V'}} (1+2T_I j)(-44+32j) \\
&= V'(-44-64T_I + (32-88T_I)j)
\end{aligned}$$

was folgenden Zusammenhang für  $T_I$  liefert:

$$\frac{\text{Im}(\hat{l}(j\omega_c))}{\text{Re}(\hat{l}(j\omega_c))} = \frac{32-88T_I}{-44-64T_I} \stackrel{!}{=} \tan(-130^\circ) \leftrightarrow T_I = \frac{-44 \tan(-130^\circ) - 32}{64 \tan(-130^\circ) - 88} \approx 7.2$$

Alternativ kann man zur Bestimmung von  $T_I$  auch die geforderte Phasenänderung durch den Regler berechnen:

- Ist-Phase der bekannten Terme:  $\arg(\hat{l}_1) = -90^\circ - 9.5^\circ - 116.5^\circ = -216^\circ$
- Soll-Phase gemäß Anforderungen  $\phi = 50^\circ \rightarrow -180^\circ + 50^\circ = -130^\circ$
- Geforderte Phasenhebung  $86^\circ$ .

Die geforderte Phasenhebung liefert schließlich die Bestimmungsgleichung für  $T_I$ :

$$\arg(1+T_I s) = \arg(1+T_I j2) = \arctan(2T_I) = 86 \frac{\pi}{180} \rightarrow T_I = \frac{1}{2} \tan\left(86 \frac{\pi}{180}\right) \approx 7.2$$

Nach Einsetzen in die Gleichung für die Reglerverstärkung  $V_I$  erhält man

$$V_I \approx \frac{\sqrt{37 \cdot 20}}{60\sqrt{1+4T_I^2}} = 0,03.$$

f) Die geforderte bleibende Regelabweichung erfordert einen Integratoranteil im Regler, somit scheidet der Lead-Lag-Regler aus. Der zuvor gewählte PI-Regler ist jedoch nicht mehr anwendbar, da die geforderte Phasenhebung an der Durchtrittsfrequenz größer denn  $90^\circ$  ist:

- Ist-Phase der bekannten Terme:  $\arg(\hat{l}_1) = -90^\circ - 9.5^\circ - 116.5^\circ = -216^\circ$
- Soll-Phase gemäß Anforderungen  $\phi = 70^\circ \rightarrow -180^\circ + 70^\circ = -110^\circ$
- Geforderte Phasenhebung  $106^\circ$ . **Bei guter Argumentation 0.5 Pkt.**

Es verbleibt als Regleransatz der Kompensationsregler, welcher den  $PT_2$ -Anteil kompensiert und damit die Ist-Phase ausreichend anhebt:

$$\hat{g}(s) = \frac{V_r(s^2+2s+2)}{s(1+T_r s)^2} \quad \text{0.5 Pkt.}$$

g) **0.5 Pkt.** Die Nyquist-Ortskurve kann wie das Bode-Diagramm dazu verwendet werden die Phasenreserve abzulesen. Diese ist im mathematisch positiven Sinne ausgehend von der negativen reellen Achse hin zum Schnittpunkt der Ortskurve mit dem Einheitskreis zu bestimmen. Da die Phasenre-

serve in jedem Fall positiv ist, gilt gemäß Satz 5.7 Eingangs-Ausgangs-Stabilität für den zugehörigen geschlossenen Regelkreis mit einem Freiheitsgrad.

Alternativ kann darüber argumentiert werden, dass die Ortskurve den Punkt  $-1 + 0j$  links passiert und damit bei keiner Frequenz eine destabilisierende – Betrag der Übertragungsfunktion größer 1 – Mitkopplung erzielt.

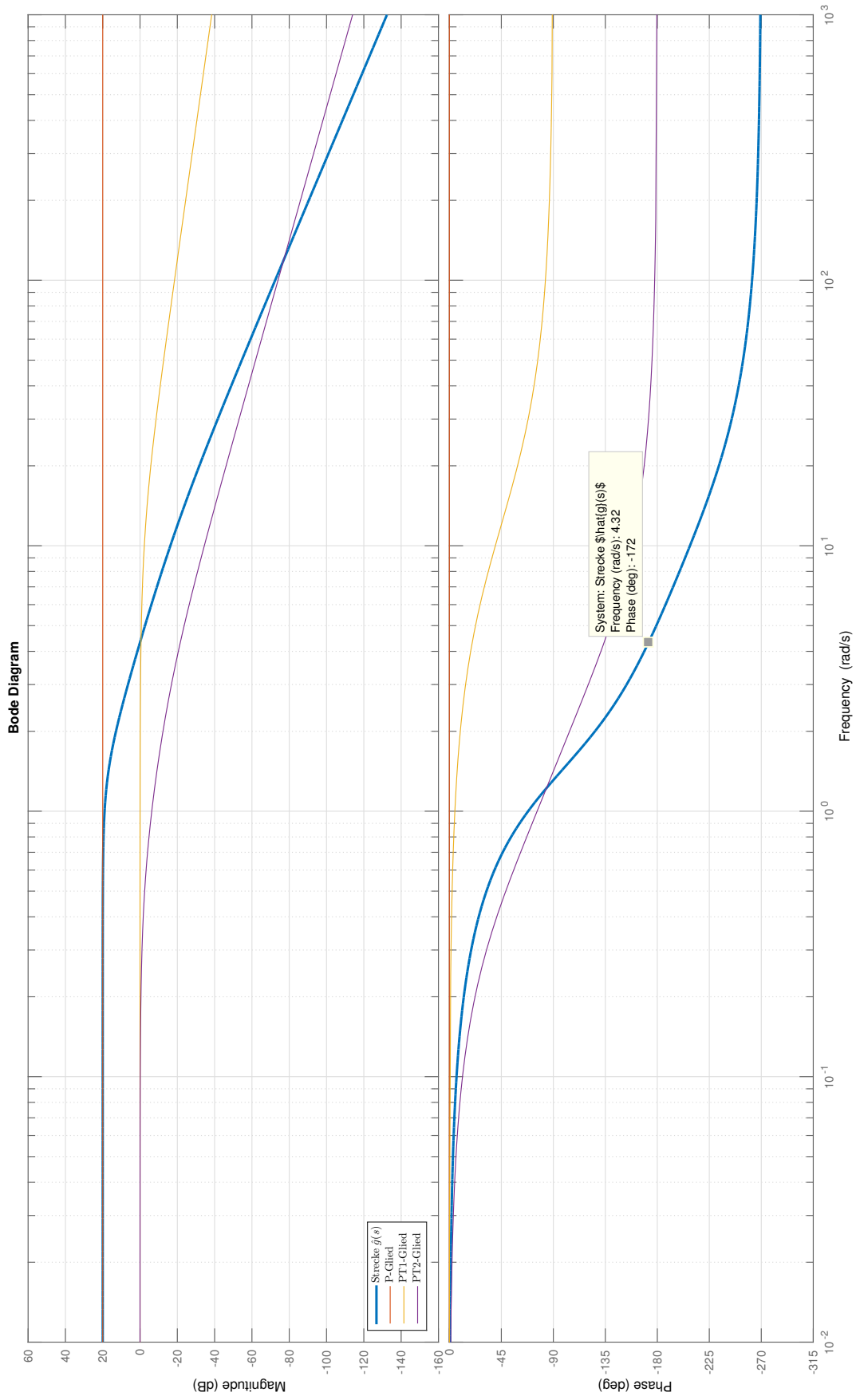


Abb. 4: Bodediagramm zur Lösung von Aufgabe 2.

**Lösung zu Aufgabe 3:**

- a) Die Eigenwerte des Systems ergeben sich zu  $\lambda_1 = 1 - \alpha$ ,  $\lambda_2 = 1 + \alpha$  und  $\lambda_3 = -1$ . **1 Pkt.** Die Blockstruktur bietet an den Eigenwert  $\lambda_3 = -1$  abzulesen um nur das obere Teilsystem berechnen zu müssen. Für asymptotische Stabilität muss gelten  $\lambda_i < 0$  für alle  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Es gibt also keinen Wert  $\alpha$  für den das System asymptotisch stabil ist. **0.5 Pkt.**
- b) Die Steuerbarkeitsmatrix **1 Pkt.** lautet

$$S(A, \mathbf{b}) = [\mathbf{b} \quad A\mathbf{b} \quad A^2\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mit Rang = 2. **0.5 Pkt.** Das System ist daher nicht vollständig steuerbar. Das bereits stabile Teilsystem mit Eigenwert  $\lambda_3 = -1$  ist nicht steuerbar. **0.5 Pkt.**

- c) Für den Zustandsreglerentwurf ist lediglich die Betrachtung des instabilen Teilsystems notwendig. Die Steuerbarkeitsmatrix des Teilsystems ist der obere Block des Gesamtsystems

$$S(A, \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mit Rang = 2. **0.5 Pkt.** Der Geschlossene Regelkreis ergibt sich zu

$$A_g = A - \mathbf{b}\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 - k_1 & 1 - k_2 & -k_3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Der Rest der Aufgabe lässt sich mit verschiedenen Methoden lösen.  $A_u$  bezeichnet hier das instabile Teilsystem der Dimension  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbf{b}_u$  den zugehörigen Vektor. Die Wahl des Polynoms muss also

$$p = (s + 2)(s + 3) = s^2 + 5s + 6$$

lauten, woraus sich die Koeffizienten  $p_0 = 6$  und  $p_1 = 5$  ergeben. **0.5 Pkt.**

**Methode 1**

Man erkennt bereits in der letzten Spalte von  $A_g$ , dass  $k_3 = 0$  gelten muss. **0.5 Pkt.** Danach betrachtet man den geschlossenen Regelkreis  $A_{ug}$  des Teilsystems  $A_u$

$$A_{ug} = A_u - \mathbf{b}\mathbf{k}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 - k_1 & 1 - k_2 \end{bmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom dieses Systems lässt sich direkt angeben

$$s^2 + (k_2 - 2)s + (-k_2 - k_1) \quad \mathbf{1 Pkt.}$$

und dann mit dem Wunschpolynom verglichen. Woraus die folgenden Gleichungen folgen

$$k_2 - 2 = 5,$$

$$-k_2 - k_1 = 6.$$

Lösen führt auf

$$\mathbf{k}^T = [-13 \ 7]. \quad \mathbf{1.5 Pkt.}$$

**Methode 2**

Es lässt sich z.B. mit der Ackermann-Formel der Rückführvektor  $\mathbf{k}^T$  berechnen.

$$\mathbf{w}^T = [0 \ 1] S^{-1}(A_u, \mathbf{b}_u) = [0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = [-1 \ 0] \quad \mathbf{1 Pkt.}$$



$$\begin{aligned}
\mathbf{k}^T &= \mathbf{w}^T (p_0 E + p_1 A_u + A_u^2) \quad 0.5 \text{ Pkt.} \\
&= [-1 \ 0] \left( p_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + p_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \right) \\
&= [-13 \ 7] \quad 1.5 \text{ Pkt.}
\end{aligned}$$

- d) (i) Ein PI-Regler ist angebracht, wenn im System konstante Störungen vorkommen. Diese können mit dem PI-Regler stationär unterdrückt werden. 0.5 Pkt.
- (ii) Siehe Übung Aufgabe 8.2. Das erweiterte System

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_I \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -\mathbf{c}^T & 0 \end{bmatrix}}_{A_I} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad 1 \text{ Pkt.}$$

folgt nach Hinzufügen des Zustands  $\dot{x}_I = e$ . Das Stellgesetz lautet

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} + V_I \int_0^T e d\tau + V_P e. \quad 0.5 \text{ Pkt.}$$

Für die Berechnung des Rückführvektors muss in der Ackermann-Formel das erweiterte System beachtet werden.

$$\mathbf{k}_I^T = \mathbf{w}^T (p_0 E + p_1 A_I + A_I^2) \quad 0.5 \text{ Pkt.}$$

**Lösung (Aufgabe 4).**

a) Bestimmung der Lösungstrajektorie .

- (i) Mit den Eigenwerten  $\lambda_1 = -2$  und  $\lambda_2 = -5$  können die dazugehörigen Eigenvektoren  $\mathbf{v}_i$  mit  $(\lambda_i E - A)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$  bestimmt werden.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{a}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{und damit } V = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

- (ii) Die transformierte Dynamikmatrix  $\tilde{A}$  ist eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von  $A$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Daraus folgt sofort die Transitionsmatrix  $\tilde{\Phi}(t)$  zu

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \exp(-2t) & 0 \\ 0 & \exp(-5t) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

*Hinweis:* Mit  $\tilde{A} = V^{-1}AV$  können Sie kontrollieren, ob Sie  $V$  richtig bestimmt haben.

- (iii) Die Lösungstrajektorie in  $\mathbf{z}(t)$  lässt sich direkt als

$$\mathbf{z}(t) = \tilde{\Phi}(t)\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} \exp(-2t) & 0 \\ 0 & \exp(-5t) \end{bmatrix} \mathbf{z}_0 \quad (10)$$

mit  $\mathbf{z}_0 = V^{-1}\mathbf{x}_0$  anschreiben

- (iv) In Originalkoordinaten  $\mathbf{x}(t)$  lässt sich die Lösungstrajektorie ganz einfach über

$$\mathbf{x}(t) = V\tilde{\Phi}(t)V^{-1}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \exp(-2t) & \frac{a}{3}(\exp(-2t) - \exp(-5t)) \\ 0 & \exp(-5t) \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 \quad \text{mit } V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

berechnen.

b) Fragen zu den Linearitätseigenschaften und Zeitinvarianz

- (i) • Für Nulleiganglinearität muss die Ausgangsgröße  $y(x_0, u, t)$  des Systems die Eigenschaft

$$y(\alpha_1 x_{0,1} + \alpha_2 x_{0,2}, 0, t) = \alpha_1 y(x_{0,1}, 0, t) + \alpha_2 y(x_{0,2}, 0, t) \quad (12)$$

erfüllen.

Die dynamische Zustandsgleichung  $\dot{x}(t) = 3x(t) + u(t)$  für sich ist linear, siehe Satz 2.3 im Skript. D.h. ist  $u(t) = 0$  kann der Zustand als  $x(t) = \Phi(t)x_0$  angegeben werden. Damit folgt der Ausgang zu  $y(x_0, 0, t) = y(t) = \Phi(t)x_0 - 6$ . Mit  $x_0 = \alpha_1 x_{0,1} + \alpha_2 x_{0,2}$  folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} y(\alpha_1 x_{0,1} + \alpha_2 x_{0,2}, 0, t) &= \Phi(t)(\alpha_1 x_{0,1} + \alpha_2 x_{0,2}) - 6 = \alpha_1 \Phi(t)x_{0,1} + \alpha_2 \Phi(t)x_{0,2} - 6 \\ &\neq \alpha_1 (\Phi(t)x_{0,1} - 6) + \alpha_2 (\Phi(t)x_{0,2} - 6) \\ y(\alpha_1 x_{0,1} + \alpha_2 x_{0,2}, 0, t) &\neq \alpha_1 y(x_{0,1}, 0, t) + \alpha_2 y(x_{0,2}, 0, t). \end{aligned}$$

Somit ist das System nicht nulleiganglinear.

- Da das System die Nulleiganglinearität nicht erfüllt, ist es auch nicht linear.

- (ii) Wird für ein zeitinvariantes System der Eingang zeitlich um  $\Delta T$  verschoben, d.h.,  $u(t) \rightarrow u(t - \Delta T)$  so antwortet die Ausgangsgröße mit  $y(t - \Delta T)$ . Das E/A-Verhalten des gegebenen Systems

kann als  $y(t) = u(t - \tau)$  geschrieben werden. Mit  $t \rightarrow t - \Delta T$  folgt

$$u((t - \Delta T) - \tau) = u(t - \Delta T - \tau) = u((t - \tau) - \Delta T) = y(t - \Delta T). \quad (13)$$

Damit ist die Zeitinvarianz des gegebenen Totzeitgliedes nachgewiesen.

c) Parallelschwingkreis als LTI-System mit der Modellgleichung  $i_e(t) = \frac{u(t)}{R} + \frac{1}{L} \int u(t) dt + C\dot{u}(t)$ .

(i) Durch Laplace-Transformation erhält man

$$\begin{aligned} i_R(t) &= \frac{u(t)}{R} & \circ \bullet \quad \hat{i}_R(s) &= \frac{\hat{u}(s)}{R} \\ i_e(t) &= \frac{u(t)}{R} + \frac{1}{L} \int u(t) dt + C\dot{u}(t) & \circ \bullet \quad \hat{i}_e(s) &= \frac{\hat{u}(s)}{R} + \frac{\hat{u}(s)}{sL} + Cs\hat{u}(s) \end{aligned}$$

und damit direkt die Übertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{i}_R(s)}{\hat{i}_e(s)} = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + Cs} = \frac{(L/R)s}{1 + (L/R)s + LCs^2}. \quad (14)$$

Führt man die Zustände  $x^T = [u \ i_L]^T$  und den Eingang  $v = i_e$  ein, ergeben sich die Systemmatrix und der Eingangsvektor der Zustandsdarstellung  $\dot{x} = Ax + bv$  zu

$$A = \begin{bmatrix} (-C/R) & -C \\ (1/L) & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Die Ausgangsgleichung ergibt sich zu

$$y = c^T x = [1/R \ 0] x. \quad (16)$$

(ii) Der Eingangsstrom  $i_e(t) = i_{e,\max}(1 - e^{-t/(RC)})$  für  $t > 0$  ergibt Laplace-transformiert

$$\hat{i}_e(s) = \frac{1}{s(s/(RC) + 1)}. \quad (17)$$

Daraus folgt  $u(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  als

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\hat{u}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s\hat{g}(s)\hat{i}_e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(L/R)s}{(1 + (L/R)s + LCs^2)(s/(RC) + 1)} = \frac{0}{1} = 0. \quad (18)$$

Aus elektrotechnischer Sicht ist dies offensichtlich, da bei der idealen Induktivität keinen Innenwiderstand berücksichtigt wird und somit dort keine Spannung für  $i_e(t \rightarrow \infty) = i_{e,\max} = \text{konst.}$  abfällt.

(iii) Die Ausgangsgleichung für ein Voltmeter lautet  $y = c^T x = u$ . Daraus lässt sich  $c^T = [1 \ 0]^T$  direkt angeben. Die Beobachtbarkeitsmatrix

$$O(A, c) = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -C/R & -C \end{bmatrix} \quad (19)$$

hat vollen Rang  $n = 2$  und folglich ist das System mit einem Voltmeter vollständig beobachtbar.