Regelungstechnik I (WS 13/14) **Klausur (10.10.2014)**

Prof. Dr.–Ing. habil. Thomas Meurer

Lehrstuhl für Regelungstechnik

Name: ______________________ Matrikelnummer: ______________________

Bitte beachten Sie:

a) Diese Klausur enthält 4 Aufgaben auf den Seiten 2-13.

b) Dauer der Klausur: 120 Minuten.

c) Erlaubte Hilfsmittel: Bereitgestellte Formelsammlung und 1 Seite A4 einseitig handschriftlich beschrieben. Elektronische Hilfsmittel, das Vorlesungsskript oder andere Literatur werden nicht zugelassen.
Handys dürfen in die Klausur nicht mitgenommen werden.

d) Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf alle Blätter, die Sie abgeben.

e) Legen Sie bitte Ihren Studierenden- und Ihren Personalausweis bereit.

f) Geben Sie dieses Deckblatt und die Klausuraufgaben mit Ihrer Klausur ab.

	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
Aufgabe 1	10	
Aufgabe 2	10	
Aufgabe 3	10	
Aufgabe 4	10	
$\sum$	40	

Note: ______________ ______________________________
Prof. Dr.–Ing. habil. Thomas Meurer

Aufgabe 1. Betrachtet wird das in Abbildung 1 dargestellte Ersatzschaltbild einer LC-Bandsperre 2. Ordnung. Die Schaltung besteht aus zwei Induktivitäten L_1 und L_2, zwei Kondensatoren C_1 und C_2 sowie einem Ausgangswiderstand R.

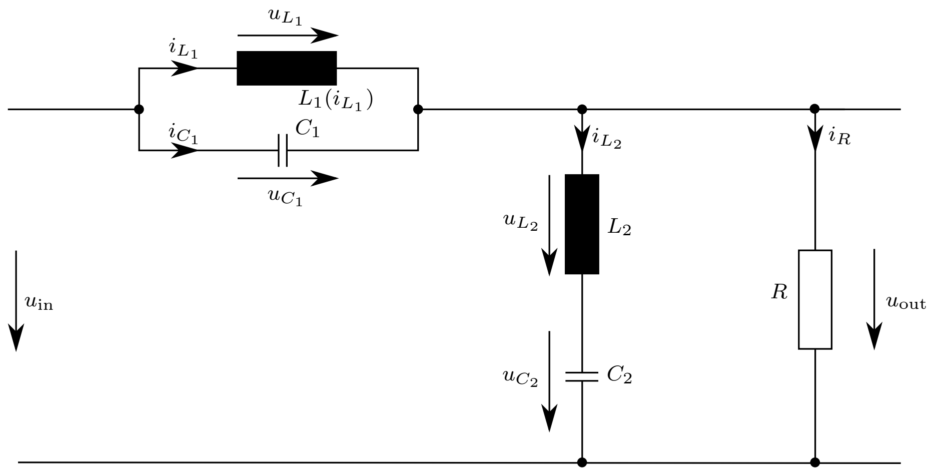

Abb. 1: Ersatzschaltbild der Bandsperre.

Für die nichtlineare Induktivität L_1 gilt vereinfachend

$$L_1(i_{L_1}) = L_0 \left(\frac{i_{L_1}}{i_0} \right)^2 ,$$

wobei L_0 und i_0 Konstanten darstellen. Die Spannung u_{in} dient dem System als Eingang und die Spannung u_{out} stellt den Systemausgang dar.

a) Geben Sie die Zustände $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ des Systems an. | 0.5 P

b) Bestimmen Sie das mathematische Modell des Systems in der Form | 5.5 P

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u) , \\ y &= h(\boldsymbol{x}, u) . \end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie die Ruhelage des Systems bei einer konstanten Anregung $u = \overline{u}$. | 1 P

d) Linearisieren Sie das System um einen allgemeinen Arbeitspunkt $(\boldsymbol{x}_R, \overline{u})$ und stellen Sie es wie folgt dar: | 3 P

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\boldsymbol{x}} &= A\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\Delta u , \\ \Delta y &= \boldsymbol{c}^T\Delta\boldsymbol{x} + d\Delta u . \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1:

a) Es befinden sich 4 Energiespeicher in der Schaltung, entsprechend wird ein System 4. Ordnung betrachtet. Die Zustände des Systems sind die Spannungen der Kondensatoren und die Ströme der Induktivitäten, der Vektor ergibt sich wie folgt

$$\boldsymbol{x} = \left[i_{L_1}\ u_{C_1}\ i_{L_2}\ u_{C_2}\right]^T \ .$$

b) Aus dem ESB ergibt sich:

$$\begin{array}{lll} i)\ u = u_{C_1} + u_{L_2} + u_{C_2}, & ii)\ y = u_{L_2} + u_{C_2}, & iii)\ u_{L_1} = u_{C_1}, \\ iv)\ i_{L_2} + i_R = i_{L_1} + i_{C_1}, & v)\ i_{L_2} = i_{C_2}, & vi)\ y = i_R R, \\ vii)\ i_C = \frac{d}{dt} C u_C, & viii)\ u_L = \frac{d}{dt} L i_L. & \end{array}$$

Zur Minimierung des Schreibaufwands gilt $u = u_{\text{in}}$ und $y = u_{\text{out}}$.

Modellbildung:

$$i)\ u = u_{C_1} + u_{L_2} + u_{C_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{i}_{L_2} = \frac{1}{L_2}\left(u - u_{C_1} - u_{C_2}\right)}$$

$$iii)\ u_{L_1} = u_{C_1} = \frac{d}{dt}\left(L_1(i_{L_1}) i_{L_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(L_0 \left(\frac{i_{L_1}}{i_0}\right)^2 i_{L_1}\right) = \frac{3}{i_0^2} L_0 i_{L_1}^2 \dot{i}_{L_1}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{i}_{L_1} = \frac{u_{C_1} i_0^2}{3 L_0 i_{L_1}^2}}$$

$$iv)\ i_{L_2} + i_R = i_{L_1} + i_{C_1}$$

$$\Rightarrow \quad i_{C_1} = C_1 \dot{u}_{C_1} = i_{L_2} - i_{L_1} + i_R = i_{L_2} - i_{L_1} + \frac{y}{R} \underbrace{=}_{ii)} i_{L_2} - i_{L_1} + \frac{u_{L_2} + u_{C_2}}{R}$$

$$= i_{L_2} - i_{L_1} + \frac{u - u_{C_1}}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{u}_{C_1} = \frac{1}{C_1}\left(i_{L_2} - i_{L_1} + \frac{u - u_{C_1}}{R}\right)}$$

$$v)\ i_{L_2} = i_{C_2} = C_2 \dot{u}_{C_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{u}_{C_2} = \frac{1}{C_2} i_{L_2}}$$

$$vi)\ \boxed{i_R = \frac{y}{R} \underbrace{=}_{i)} \frac{u - u_{C_1}}{R}}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{L_1} \\ \dot{u}_{C_1} \\ \dot{i}_{L_2} \\ \dot{u}_{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u_{C_1} i_0^2}{3 L_0 i_{L_1}^2} \\ \frac{1}{C_1}\left(i_{L_2} - i_{L_1} + \frac{u - u_{C_1}}{R}\right) \\ \frac{1}{L_2}\left(u - u_{C_1} - u_{C_2}\right) \\ \frac{1}{C_2} i_{L_2} \end{bmatrix}, \quad y = u - u_{C_1}$$

c) Ruhelage:

$$
\begin{aligned}
&a)\ 0 = \frac{u_{C_{1R}} i_0^2}{3L_0 i_{L_{1R}}^2} \quad \Rightarrow \quad u_{C_1R} = 0 \\
&d)\ 0 = \frac{1}{C_2} i_{L_{2R}} \quad \Rightarrow \quad i_{L_{2R}} = 0 \\
&b)\ 0 = \frac{1}{C_1}\left(i_{L_{2R}} - i_{L_{1R}} + \frac{\overline{u} - u_{C_{1R}}}{R} \right) \quad \Rightarrow \quad i_{L_{1R}} = \frac{\overline{u}}{R} \\
&c)\ 0 = \frac{1}{L_2}\left(\overline{u} - u_{C_{1R}} - u_{C_{2R}}\right) \quad \Rightarrow \quad u_{C_{2R}} = \overline{u}
\end{aligned}
$$

zu a) Im eingeschwungen Zustand ergibt sich nach der Schaltungstheorie das L_1 kurzgelschossen ist und C_1 einen Leerlauf darstellt. Da die Spannung über einem Kurzschluss identisch zu 0 ist gilt $u_{C_1R} = u_{L_1R} = 0$.

d) Linearisierung:

$$
A = \begin{bmatrix} -2\frac{u_{C_{1R}} i_0^2}{2L_0 i_{L_{1R}}^3} & \frac{i_0^2}{3L_0 i_{L_{1R}}^2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_1 R} & \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_2} & 0 & -\frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{L_2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}
$$

Aufgabe 2. Gegeben ist die Übertragungsfunktion der Regelstrecke

$$\hat{g}(s) = \frac{0.5 - s}{s^2 + 2s + 2}.$$

Es soll ein Regler durch Polvorgabe ausgelegt werden, so dass die Pole des geschlossenen Regelkreises bei -1 und $-2 \pm \mathrm{i}$ liegen.

a) Bestimmen Sie die Koeffizienten des gewünschten Nennerpolynoms und geben Sie die Resultante an. | 1 P

b) Zeigen Sie, dass der Regler folgende Struktur aufweist: | 3,5 P

$$\hat{g}_r(s) = -\frac{2s + 18}{13s + 37}.$$

c) Sorgt der Regler für eine verschwindende, stationäre Regelabweichung für das Referenzsignal $r(t) = \sigma(t)$? Begründen Sie Ihre Antwort. | 0,5 P

Der Strecke $\hat{g}(s)$ wird nun die Übertragungsfunktion

$$\hat{h}(s) = \frac{s + 0.5}{s}$$

vorgeschaltet.

d) Auf dem Beiblatt ist das Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$ gegeben. Konstruieren Sie hieraus das Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion $\hat{l}(s) = \hat{g}(s)\hat{h}(s)$. | 3,5 P

Hinweis: Es gilt $20 \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) \approx -6$.

e) Ist der entsprechend Abb. 2 geschlossene Regelkreis stabil? Begründen Sie Ihre Antwort anhand des in d) konstruierten Bode-Diagramms. | 1,5 P

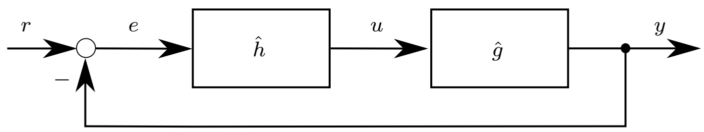

Abb. 2: Geschlossener Regelkreis.

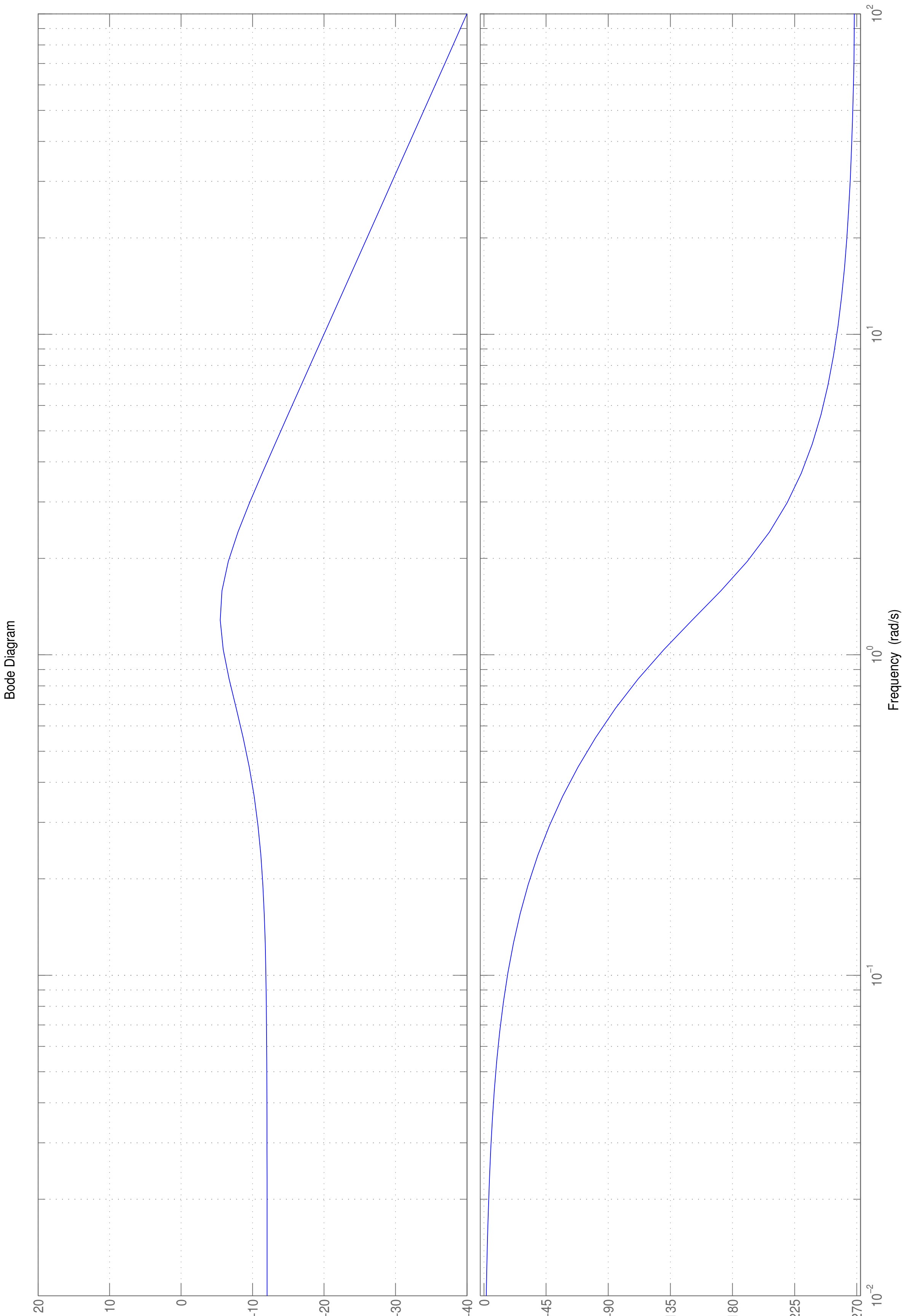

Abb. 3: Bode-Diagramm zu Aufgabe 2.d)

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Vergleiche Satz 5.11 aus Formelsammlung. Das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreis erhält man aus dem Produkt der Linearfaktoren des Polynoms mit den geforderten Polen $s_1^* = -1, s_2^* = -2+i, s_3^* = -2-i$:

$$\hat{z}(s)\hat{z}_r(s) + \hat{n}(s)\hat{n}_r(s) = \hat{f}(s) \stackrel{!}{=} \prod_{i=1}^{3}(s - s_i^*) = (s+1)(s+2+i)(s+2-i) = s^3 + 5s^2 + 9s + 5.$$

Die Resultante ergibt sich aus den Koeffizienten des Zähler- und Nennerpolynoms der Strecke $\hat{g}(s)$ zu

$$\hat{g}(s) = \frac{0.5 - s}{s^2 + 2s + 2} = \frac{\hat{z}(s)}{\hat{n}(s)} = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2} \leftrightarrow a_0 = 2, a_1 = 2, a_2 = a_n = 1, b_0 = 0.5, b_1 = -1,$$

$$R = \begin{bmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & b_0 & a_0 \\ b_2 & a_2 & b_1 & a_1 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0.5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Die gegebenen Reglerparameter $\mathbf{d} = [d_0, c_0, d_1, c_1]^T = [-18, 37, -2, 13]^T$ erfüllen die Gleichung

$$R\mathbf{d} = \mathbf{f} = [f_0, f_1, f_2, f_3]^T,$$

wenn gilt:

$$\alpha\mathbf{f} = \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, \qquad \hat{f}(s) = \sum_{i=1}^{3} p_i s^i, \qquad f_3 \neq 0, \qquad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

wobei $\mathbf{p}$ der Vektor mit den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms $\hat{f}(s)$ aus Aufgabenteil a) ist. Einsetzen der Werte liefert:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0.5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -18 \\ 37 \\ -2 \\ 13 \end{bmatrix} = 13 \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 13\mathbf{p}.$$

c) Der Regler sorgt *nicht* für eine verschwindende Regelabweichung, weil sonst laut Grenzwertsatz für eine Sprungfunktion des Referenzsignals $r(t) = \sigma(t)$ der Regelfehler $\hat{e}(s)$ für $s \to 0$ gegen Null streben müsste:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} e(t) &= \lim_{s\to 0} s\,\hat{e}(s) = \lim_{s\to 0} s\,\hat{g}_{re}(s)\,\hat{r}(s) = \lim_{s\to 0} s\,\hat{g}_{re}(s)\,\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \hat{t}_{r,e}(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + \hat{g}(s)\hat{g}_r(s)} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{\hat{n}(s)\hat{n}_r(s)}{\hat{f}(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{(s^2+2s+2)(13s+37)}{s^3+5s^2+9s+5} = \frac{74}{5} \neq 0. \end{aligned}$$

d) Der Einfluss des Reglers $\hat{h}(s)$ auf Amplitude und Phase in Abhängigkeit der Kreisfrequenz ω auf die Strecke $\hat{g}(s)$ ist in Tabelle 1 gelistet. Infolge Integralanteil ist die Reglerverstärkung für Kreisfrequenzen gegen Null unendlich groß und fällt mit $20\frac{dB}{dec}$. Infolge des Monoms im Zähler ändert sich die Amplituden-Steigung bei $\omega = 0.5$ um $+20\frac{dB}{dec}$ und die Hälfte der Phasenänderung $\varDelta\phi = \frac{\pi}{2}$ für $\omega \to \infty$ ist erreicht. Wichtig ist, dass sich die Einflüsse von Zähler- und Nennerterm für große Frequenzen kompensieren. Die Überlagerung der Bode-Diagramme von $\hat{g}(s)$ und $\hat{h}(s)$ zur offenen Strecke $\hat{l}(s)$ ist in Abbildung 4 dargestellt.

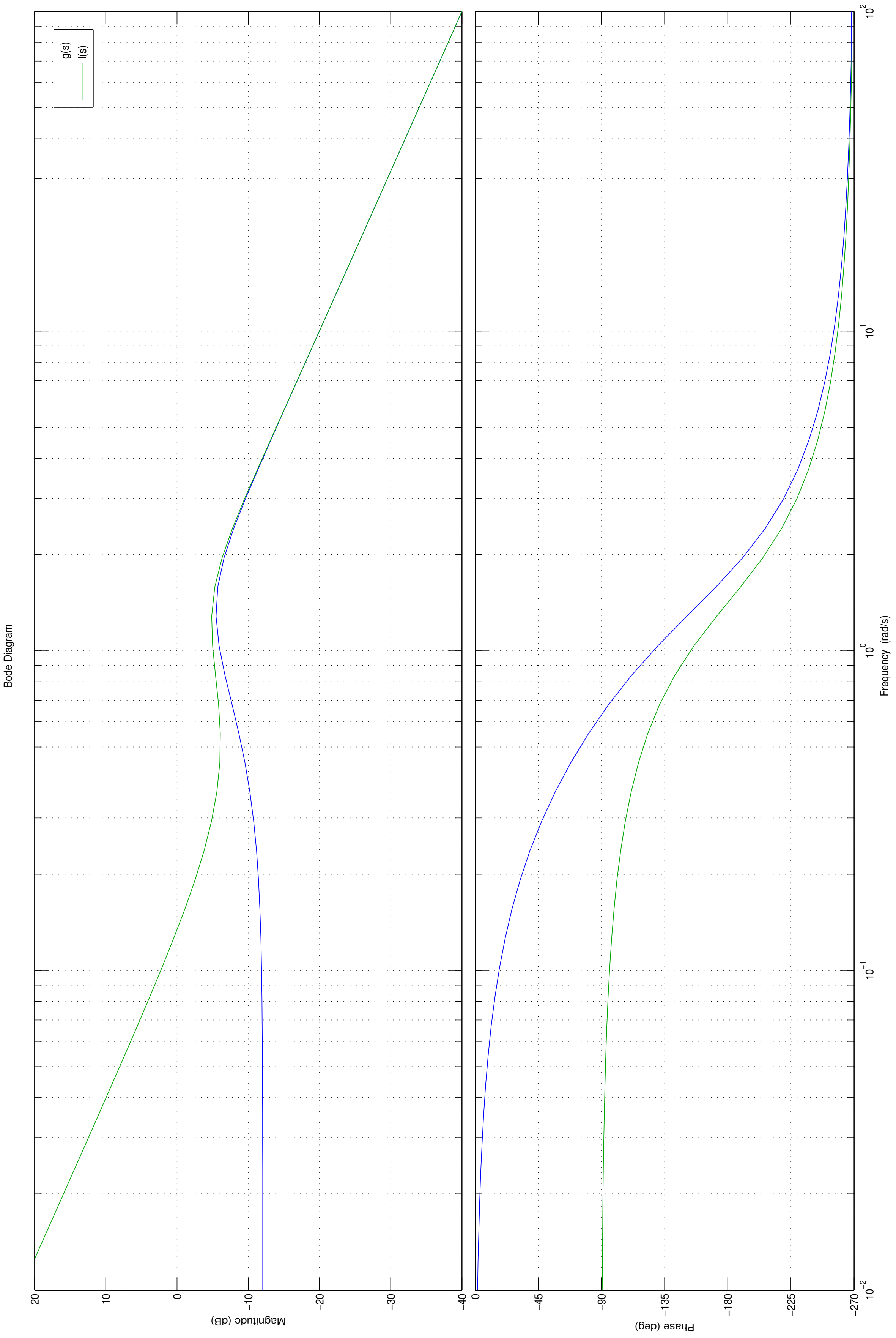

Abb. 4: Bode-Diagramme der Strecke $\hat{g}(s)$ (blau) und des offenen Regelkreis $\hat{l}(s)$ (grün).

Tabelle 1: Kenngrößen des Reglers $\hat{h}(s)$ im Frequenzgang.

Kreisfrequenz	Amplitudensteigung	Phase
$\omega \to 0$	$-20\,\frac{dB}{dec}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\omega = 0.5$	0	$-\frac{\pi}{4}$
$\omega \to \infty$	0	0

e) Vergleiche Satz 5.7 aus der Formelsammlung. Der offene Regelkreis $\hat{l}(s)$ lässt sich normiert darstellen als

$$\hat{l}(s) = \hat{h}(s)\hat{g}(s) = \frac{(s+0.5)(0.5-s)}{s(s^2+2s+2)} = \frac{1}{8}\,\frac{(0.5s+1)(1-0.5s)}{s(0.5s^2+s+1)} = \frac{V}{s^\rho}\,\frac{\hat{z}_{\hat{l}}(s)}{\hat{n}_{\hat{l}}(s)}\mathrm{e}^{-sT_t},$$

mit $\hat{z}_{\hat{l}}(0) = \hat{n}_{\hat{l}}(0) = 1, V_P = \frac{1}{8}, \rho = 1, T_t = 0$. Nach Auswertung der Tests (i) bis (v) erhält man folgendes Resultat:

(i) $V = \frac{1}{8} > 0$ und $T_t = 0$: ✓ (sofern man von dem Fehler in der Formelsammlung absieht, dass 0 eine positive Zahl ist).

(ii) $\deg(\hat{n}_{\hat{l}}(s)) + \rho = 2 + 1 > 2 = \deg(\hat{z}_{\hat{l}}(s))$: ✓.

(iii) $\hat{n}_{\hat{l}}(s)$ ist Hurwitz (s. Def. 5.2: Ein Polynom ist Hurwitz, wenn alle Realteile seiner Nullstellen kleiner Null sind): $s_1 = -1 + i, s_2 = -1 - i$ ✓.

(iv) $\hat{l}(i\omega)$ schneidet die 0dB-Linie genau einmal (abgelesen aus Bode-Diagramm): ✓.

(v) Oberhalb der 0dB-Linie gilt, dass die Phase im Intervall $\phi(\omega) \in (-540°, 180°)$ ist. Aus dem Bode-Digramm liest man ab: $\phi(\omega) \in [-97.7°, -90°) \subset (-540°, 180°)$ für $0 < \omega < \omega_c$: ✓.

Da die Bedingungen $(i) \div (v)$ erfüllt sind, gilt folgendes Kriterium:

$$\hat{t}_{r,y}(s) \text{ E/A-stabil } \leftrightarrow \phi_r = \arg(\hat{l}(i\omega_c)) + \pi > 0,$$

wobei ϕ_r die Phasenreserve bezeichnet. Im vorliegenden Fall gilt

$$\arg(\hat{l}(i\omega_c)) + \pi = -97.7°\frac{\pi}{180°} + \pi = 1.4364 > 0,$$

sodass der geschlossene Regelkreis $\hat{t}_{r,y}(s)$ E/A-stabil ist.

Aufgabe 3. Gegeben ist folgendes System in Zustandsdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \\ y &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{1}$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Geben Sie das charakteristische Polynom der Matrix A an und bestimmen Sie die Eigenwerte von A. Ist das System asymptotisch stabil? | 1 P

b) Berechnen Sie die zugehörige Steuerbarkeitsmatrix $S(A, \boldsymbol{b})$. Ist das System vollständig steuerbar? | 2 P

c) Geben Sie die Dynamikmatrix und den Eingangsvektor des Systems in Regelungsnormalform an. | 2 P

d) Entwerfen Sie eine Zustandsrückführung in den Zuständen der Regelungsnormalform, so dass die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises bei $\lambda_j = -3$, $j = 1, 2$ liegen. | 2 P

e) Für das System wurde ein Luenberger Beobachter | 2 P

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = A\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b}u - \boldsymbol{l}(\boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}} - y), \quad \hat{\boldsymbol{x}}(0) = \hat{\boldsymbol{x}}_0$$

mit Korrekturvektor

$$\boldsymbol{l} = \begin{bmatrix} 23 \\ -75 \end{bmatrix}$$

entworfen. Ist die zugehörige Beobachterfehlerdynamik asymptotisch stabil? Begründen Sie ihre Antwort.

f) Geben Sie die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises bestehend aus Strecke, Beobachter und Regler an. | 1 P

Lösung zu Aufgabe 3:

a) Charakteristisches Polynom $(\lambda - 4)(\lambda + 1) + 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 2$. Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9-8}{4}}, \; \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1.$$

Folglich ist das System nicht asymptotisch stabil.

b) $S(A, \boldsymbol{b}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathrm{Rang}(S(A, \boldsymbol{b})) = 2$. Das System is vollständig steuerbar.

c) Auf der Basis des charakteristischen Polynoms aus Aufgabenteil a) erhält man

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

d) $u = -\boldsymbol{k}^T \boldsymbol{z} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{z}} = (A - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T)\boldsymbol{z}$, mit

$$(A - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 - k_1 & 3 - k_2 \end{bmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist somit $\lambda^2 - (3 - k_2)\lambda + (2 + k_1)$. Durch Gleichsetzen mit dem Sollpolynom $(\lambda + 3)^2 = \lambda^2 + 6\lambda + 9$ erhält man

$$k_1 = 7 \quad k_2 = 9.$$

e) Die zugehörige Beobachterfehlerdynamik lautet

$$\dot{\boldsymbol{e}} = (A - \boldsymbol{l}\boldsymbol{c}^T)\boldsymbol{e}, \quad \boldsymbol{e} = \hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}, \quad (A - \boldsymbol{l}\boldsymbol{c}^T) = \begin{bmatrix} 4 - l_1 & -1 \\ 6 - l_2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Das zugehörige charakteristische Polynom lautet somit $\lambda^2 + 20\lambda + 100$ mit Lösungen $\lambda_{1,2} = -10$. Damit ist die Beobachterfehlerdynamik asymptotisch stabil.

f) Gemäß dem Separationsprinzip sind die Eigenwerte des geschlossenen Kreises die Vereinigung der Eigenwerte aus den Aufgabenteilen d) und e).

Aufgabe 4. Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

a) Zeigen Sie, dass die Eigenschaft der Steuerbarkeit invariant ist gegenüber einer regulären Zustandstransformation $\boldsymbol{x}(t) = V\boldsymbol{z}(t)$. | 2 P

b) Unter welcher Voraussetzung an die dynamischen Systemeigenschaften existiert der eingeschwungene Zustand? Gegeben sind die beiden Übertragungsfunktionen | 3 P

$$\hat{g}_1(s) = -\frac{\sqrt{3}}{s+2}, \quad \hat{g}_2(s) = \frac{1}{s-1}.$$

Bestimmen Sie jeweils, falls existent, die Lösung im eingeschwungenen Zustand zur Eingangsfunktion

$$u(t) = \sin(\omega_0 t) + te^{-t}, \quad \omega_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

c) Für ein autonomes lineares System mit $\dim \boldsymbol{x} = 2$ wurden für verschiedene Anfangsbedingungen $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ die folgenden Ausgangssignale ermittelt

$$y(t) = \begin{cases} e^{-t}\sin(2t), & \text{für } \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^T \\ 2e^{-t}\cos(2t), & \text{für } \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}^T. \end{cases}$$

Ermitteln Sie hieraus

(i) den Ausgangsvektor $\boldsymbol{c}^T$ und | 3 P

(ii) die Dynamikmatrix A. | 2 P

Hinweis: Die Aufgabe ist sowohl im Frequenz- als auch im Zeitbereich lösbar. Beachten Sie zudem, dass das Ausgangssignal unter einer regulären Zustandstransformation unverändert bleibt, d.h. machen Sie davon Gebrauch, dass das System in einer geeigneten Normalform vorliegt.

Lösung zu Aufgabe 4:

a) Vergleiche Aufgabe 6.1 aus Vorlesungsskript. Mit

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \quad t > 0, & \boldsymbol{x}(0) &= \boldsymbol{x}_0 \\
\boldsymbol{y} &= C\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{u}, \quad t \geq 0
\end{aligned}$$

und der regulären Zustandstransformation $\boldsymbol{x}(t) = V\boldsymbol{z}(t)$ ergibt sich das transformierte System zu

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{z}} &= V^{-1}AV\boldsymbol{z} + V^{-1}B\boldsymbol{u}, \quad t > 0, & \boldsymbol{z}(0) &= V^{-1}\boldsymbol{x}_0 \\
\boldsymbol{y} &= CV\boldsymbol{z} + D\boldsymbol{u}, \quad t \geq 0
\end{aligned}$$

Die Aussage folgt durch die Auswertung der Kalmanschen Steuerbarkeitsmatrix mit den Matrizen des transformierten Systems und der Eigenschaft, dass V regulär ist.

b) Es gelten die folgenden Ausführungen.

- Voraussetzung ist die Eingangs-Ausgangs-Stabilität der Übertragungsgfunktion
- $\hat{g}_2(s)$ ist nicht eingangs-ausgangs-stabil, weshalb hierzu keine eingeschwungene Lösung existiert. $\hat{g}_1(s)$ ist eingangs-ausgangs-stabil und die eingeschwungene Lösung für die angegebene Eingangsfunktion ist

  $$y_1(t) = |\hat{g}_1(\mathrm{i}\omega_0)| \sin\big(\omega_0 t + \arg(\hat{g}_1(\mathrm{i}\omega_0))\big).$$

  Mit $|\hat{g}_1(\mathrm{i}\omega_0)| = 3/2$ und $\arg(\hat{g}_1(\mathrm{i}\omega_0)) = -7\pi/6$ folgt $y_1(t) = 3/2 \sin(\omega_0 t - 7\pi/6)$.

c) Es wird die Lösung im Zeitbereicht dargestellt. Gemäß dem Hinweis kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass A in Jordanscher Normalform vorliegt, d.h.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \Phi(t) = \mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{-t} \begin{bmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix}$$

Mit $y(t) = \boldsymbol{c}^T \Phi(t)\boldsymbol{x}_0$ und $\boldsymbol{c}^T = [c_1, c_2]$ folgen durch Einbezug der angegebenen Lösungen für spezifische Anfangsbedingungen $\boldsymbol{x}_0$ zwei Gleichgunen für die beiden Unbekannten c_1 und c_2. Diese ergeben sich daraus zu

$$c_1 = 0, \ c_2 = -2.$$