| C \| A \| U | Christian-Albrechts-Universität zu Kiel | Technische Fakultät |
|---|---|---|

# Deckblatt zu einer Klausur am Institut für Elektrotechnik und Informationstechnik

| **Modulprüfung** | |
|---|---|
| Modulname | **Regelungstechnik** |
| Datum | **08.03.2019** |
| **Prüfpersonen** | |
| 1. Prüfperson | **Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Meurer** |
| ggf. 2. Prüfperson | |
| **Kandidat/in** | |
| Matrikelnummer | |
| Name, Vorname | |

**Erklärung der/des Kandidatin/Kandidaten vor Beginn der Prüfung**

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.

Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: ______________________________

**Korrektur**

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | | | | | | | | | | |

Summe der Punkte: ____________  Note: ____________

**Einsicht / Rückgabe**

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Note einverstanden bin. Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den ____________  Unterschrift: ______________________________

**Regelungstechnik (WS 18/19)** **Klausur (08.03.2019)**

**Prof. Dr.–Ing. habil. Thomas Meurer**
**Lehrstuhl für Regelungstechnik**

---

**Bitte beachten Sie:**

a) Diese Klausur enthält 4 Aufgaben auf den Seiten 3-10.

b) Dauer der Klausur: 120 Minuten.

c) Erlaubte Hilfsmittel: **Bereitgestellte Formelsammlung und 1 Seite A4 einseitig handschriftlich beschrieben**. Elektronische Hilfsmittel, das Vorlesungsskript oder andere Literatur sind **nicht** zugelassen.

d) Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf alle Blätter, die Sie abgeben.

e) Legen Sie bitte Ihren Studierenden- und Ihren Personalausweis bereit.

f) Geben Sie dieses Deckblatt und die Klausuraufgaben mit Ihrer Klausur ab.

**Aufgabe 1.** Betrachtet wird der Abb. 1 dargestellte *Rotary Flexible Joint* (RFJ), welcher durch eine Gleichstrommaschine (GSM) mit der Eingangsspannung $u$ angetrieben wird.

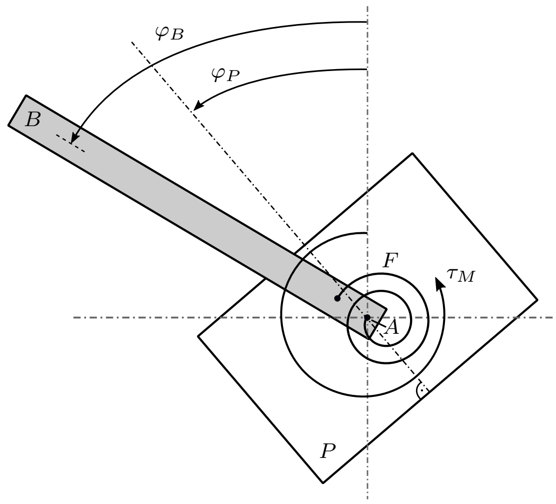



Abb. 1: Schematische Darstellung des *Rotary Flexible Joints*.

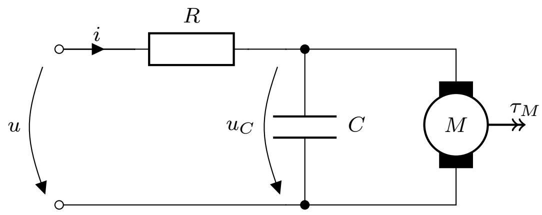



Abb. 2: Ersatzschaltbild der Gleichstrommaschine.

Der RFJ besteht aus einem beweglichen Balken $B$, der auf einer im Punkt $A$ drehbar gelagerten Plattform $P$ montiert ist. Die Massenträgheitsmomente von Plattform und Balken bezogen auf den Punkt $A$ sind durch $\Theta_B > 0$ und $\Theta_P > 0$ gegeben. Die Winkelauslenkungen werden durch $\varphi_B$ und $\varphi_P$ beschrieben. Die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten sind definiert mit $\omega_B$ und $\omega_P$. Der Balken und die Plattform sind durch eine Feder $F$ miteinander verbunden. Das rücktreibende Federmoment ist mit dem Hookeschen Gesetz

$$M_F = -k\,\Delta\varphi$$

gegeben. Dabei bezeichnet $k > 0$ die Federkonstante und $\Delta\varphi$ die Winkelauslenkung bezogen auf die entspannte Federposition bei $\varphi_B = \varphi_P$. Auf die Plattform und den Balken wirken die winkelgeschwindigkeitsproportionalen Reibdrehmomente

$$\tau_P = \mu_P\,\omega_P,$$
$$\tau_B = \mu_B\,\omega_B$$

mit den Reibkoeffizienten $\mu_P > 0$ und $\mu_B > 0$. Das Ersatzschaltbild der GSM mit dem Widerstand $R > 0$ und der Kapazität $C > 0$ ist in Abb. 2 gezeigt. Der Motor $M$ hat einen Innenwiderstand von $R_M > 0$ und ist fest mit der Plattform $P$ des RFJ verbaut. Das Motordrehmoment ist gegeben mit

$$\tau_M = \eta\,u_M,$$

wobei $u_M$ die am Motor anliegende Spannung bezeichnet.

a) Die Systemzustände lauten $\boldsymbol{x} = [u_C, \varphi_P, \omega_P, \varphi_B, \omega_B]^T$. Bestimmen Sie die Dynamikmatrix $A$, den Eingangsvektor $\boldsymbol{b}$, den Ausgangsvektor $\boldsymbol{c}^T$ und den Durchgriff $d$ des elektro-mechanischen Systems bestehend aus dem RFJ und der GSM und stellen Sie das System in der Form | 4 P

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad t > 0, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0,$$
$$y = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + du$$

mit dem Ausgang $y = \varphi_B$ dar.

b) Wie viele Arbeitspunkte hat das System aus Aufgabe a) für $\eta = 0$? Begründen Sie Ihre Antwort. | 1 P

**Hinweis** Sollten Sie in Aufgabeteil a) zu keinen vollständigen Ergebnis gekommen sein, dann nutzen Sie zur Lösung von Aufgabenteil b) die folgende Systemdynamik

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad t > 0, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0.$$

c) Gegeben ist das nichtlineare System

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2 \sin^2(x_3) + \alpha u x_1 x_2 \\ e^{x_2 - 1} - 1 + x_1 - \beta u \\ x_2^3 - e^{-u} \end{bmatrix}, \quad t > 0, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \\ y &= x_3 x_1^2 - \sqrt[3]{u^2}(u + x_2). \end{aligned} \tag{1}$$

(i) Bestimmen Sie die Ruhelage(n) des Systems (1) für $u = 0$. | 1.5 P

(ii) Linearisieren Sie das System (1) um einen allgemeinen Arbeitspunkt $(\boldsymbol{x}_\mathrm{R}, u_\mathrm{R})$ und stellen Sie es wie folgt dar: | 3.5 P

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\boldsymbol{x}} &= A \Delta\boldsymbol{x} + B \Delta u \\ \Delta y &= \boldsymbol{c}^T \Delta\boldsymbol{x} + d \Delta u \end{aligned}$$

**Aufgabe 2.**

Gegeben ist die Übertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{3}{4} \frac{s+12}{s^2+2s-\alpha}$$

mit dem Parameter $\alpha \in \mathbb{Z}$.

a) Bestimmen Sie $\alpha$ so, dass $\hat{g}(s)$ eine stationäre Verstärkung von $|V| = 1$ aufweist und eingangs-/ausgangsstabil ist. Begründen Sie Ihre Wahl. | 1.5 P

Verwenden Sie **im Weiteren** den von Ihnen errechneten Wert für $\alpha$. Sollten Sie nicht zu einem Ergebnis gekommen sein, dann verwenden Sie den Wert $\alpha = -16$.

b) Ist $\hat{g}(s)$ schwingungsfähig? Begründen Sie ihre Antwort. | 0.5 P

c) Nutzen Sie das Frequenzkennlinienverfahren um einen Regler mit der Übertragungsfunktion entsprechend dem Blockschaltbild in Abb. 3 für die Regelstrecke $\hat{g}(s)$ auszulegen.

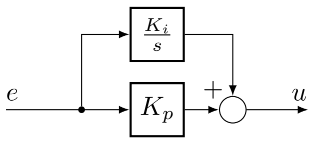



Abb. 3: Blockdiagramm der Reglerstruktur für Aufgabenteil c).

Gehen Sie dabei wie folgt vor.

(i) Stellen Sie die Übertragungsfunktion $\hat{g}_r(s)$ der geforderten Reglerstruktur aus Abb. 3 auf und überführen Sie diese in die Form | 1 P

$$\hat{g}_r(s) = \frac{V_I(1+T_I s)}{s}, \tag{2}$$

indem Sie $V_I$ und $T_I$ in Abhängigkeit von $K_i$ und $K_p$ angeben.

(ii) Übersetzen Sie die Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis | 0.5 P

$$\begin{aligned} t_\mathrm{r} &= 0.375\,\mathrm{s}\,, \\ \ddot{u} &= 50\,\%\,, \\ e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

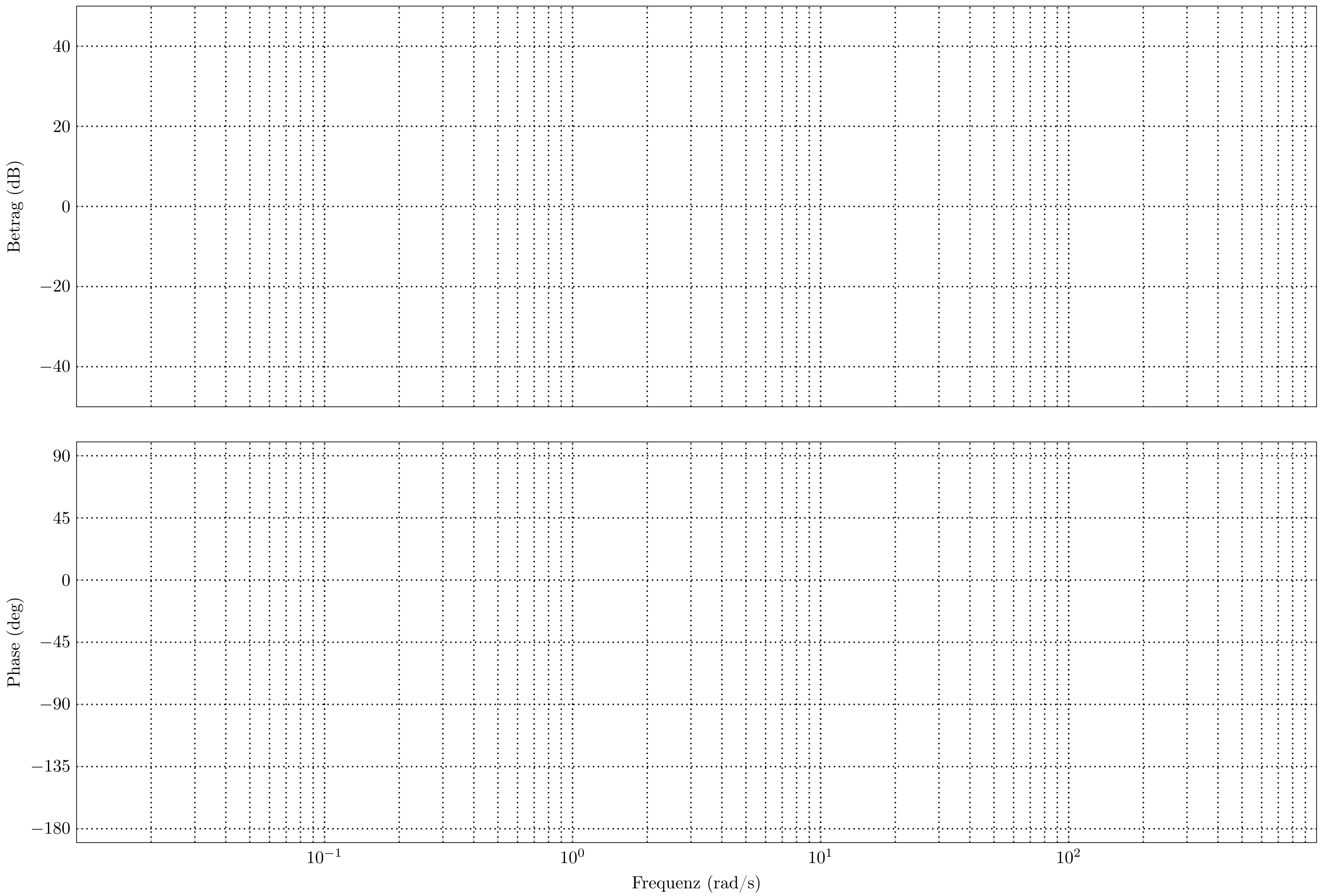
in die charakteristischen Größen für den Reglerentwurf mittels des Frequenzkennlinienverfahrens.

(iii) Berechnen Sie die Parameter $V_I$ und $T_I$ der Reglerübertragungsfunktion (2) so, dass die Anforderungen (3) an den geschlossenen Regelkreis erfüllt werden. Für $V_I$ ist das Aufstellen der Bestimmungsgleichung ausreichend. | 1.5 P

**Hinweis**: Es gelten die Beziehungen $\arctan(\frac{1}{3}) \approx 20°$ und $\arctan(\frac{8}{7}) \approx 50°$.

(iv) Zeichnen Sie das Bodediagramm des offenen Regelkreises $\hat{l}(s) = \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)$ auf dem beiliegenden Hilfsblatt für $V_I = 10$ und $T_I = 1$. Markieren Sie die Phasenreserve und treffen Sie eine begründete Aussage über die Stabilität des geschlossenen Regelkreises. | 4 P

(v) Begründen Sie, ob anstelle der Reglerübertragungsfunktion (2) auch ein PD-Regler genutzt werden kann um die Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis (3) zu erfüllen. | 1 P


Betrag (dB)
40
20
0
−20
−40
Phase (deg)
90
45
0
−45
−90
−135
−180
10−1
100
101
102
Frequenz (rad/s)

**Aufgabe 3.** Die folgenden Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar.

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \boldsymbol{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}} u \qquad t > 0,\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{4a}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{c}^T} \boldsymbol{x} + du \qquad t \geq 0 \tag{4b}$$

und treffen Sie eine Aussage über die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des Systems.

Gehen Sie hierfür wie folgt vor

(i) Überführen Sie das System mit der Ähnlichkeitstransformation $\boldsymbol{x}(t) = V\boldsymbol{z}(t)$ in eine äquivalente Darstellung. Hierbei ist $V$ so zu bestimmen, dass die transformierte Dynamikmatrix $A$ in reeller Jordanscher Normalform vorliegt. | 3 P

(ii) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$ für die in (i) bestimmte Systemdarstellung. | 1 P

**Hinweis:** Sollten Sie (i) nicht gelöst haben, dann bestimmen Sie $\hat{g}(s)$ direkt anhand der Systemgleichungen (4).

(iii) Begründen Sie anhand der Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$, ob das System vollständig steuerbar und vollständig beobachtbar ist. Nehmen Sie hierfür $d = 0$ an. | 0.5 P

(iv) Bestimmen Sie die Sprungantwort $\boldsymbol{x}(t)$ für $u(t) = \sigma(t)$ und $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$. | 1.5 P

b) Gegeben ist das lineare System | 1 P

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \boldsymbol{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}} u \qquad t > 0,\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{c}^T} \boldsymbol{x} \qquad t \geq 0$$

mit den Eigenwerten und den dazugehörigen Eigenvektoren $(\lambda_1, \boldsymbol{v}_1) = (1, [1\ 1]^T)$ und $(\lambda_2, \boldsymbol{v}_2) = (7, [-1\ 1]^T)$. Bestimmen Sie mit Hilfe des PBH-Rangtests für jeden Eigenwert, ob der durch den dazugehörigen Eigenvektor definierte Eigenraum steuer- und/oder beobachtbar ist.

c) Ein System mit den Zuständen $\boldsymbol{x}$ liegt in Regelungsnormalform vor und hat die Dynamikmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ p_0 & p_1 & p_2 \end{bmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie die Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises für die Zustandsrückführung | 0.5 P

$$u = -\boldsymbol{k}^T M \boldsymbol{x}$$

mit

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & m_1 \\ 0 & m_2 & 0 \\ m_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und allgemeinem $\boldsymbol{k}^T = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$.

Für die **weiteren Teilaufgaben** sind die Werte $p_0 = -6$, $p_1 = -1$, $p_2 = 4$, $m_3 = 5$, $m_2 = 1$ und $m_1 = 2$ zu verwenden.

(ii) Analysieren Sie die Stabilität des offenen Regelkreises. Nehmen Sie an, dass für den ersten Eigenwert $\lambda_1 = -1$ gilt. Begründen Sie ihre Antwort durch Rechnung. | 1.5 P

(iii) Bestimmen Sie die Reglerparameter $\boldsymbol{k}^T$ so, dass die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises bei $\lambda_1^* = -1$, $\lambda_2^* = -2$ und $\lambda_3^* = -3$ liegen. | 1 P

**Aufgabe 4.** Die folgenden Aufgabenteile sind unabhängig voneinander lösbar.

a) Ordnen Sie den Übertragungsfunktionen | 3 P

$$\hat{g}_1(s) = \frac{1}{1+s}, \quad \hat{g}_2(s) = \frac{1}{(1+4s)^2}, \quad \hat{g}_3(s) = -2\frac{s+2}{(1+s)^2}$$

jeweils die dazugehörige Sprungantwort (A)-(D) aus Abb. 4 zu.

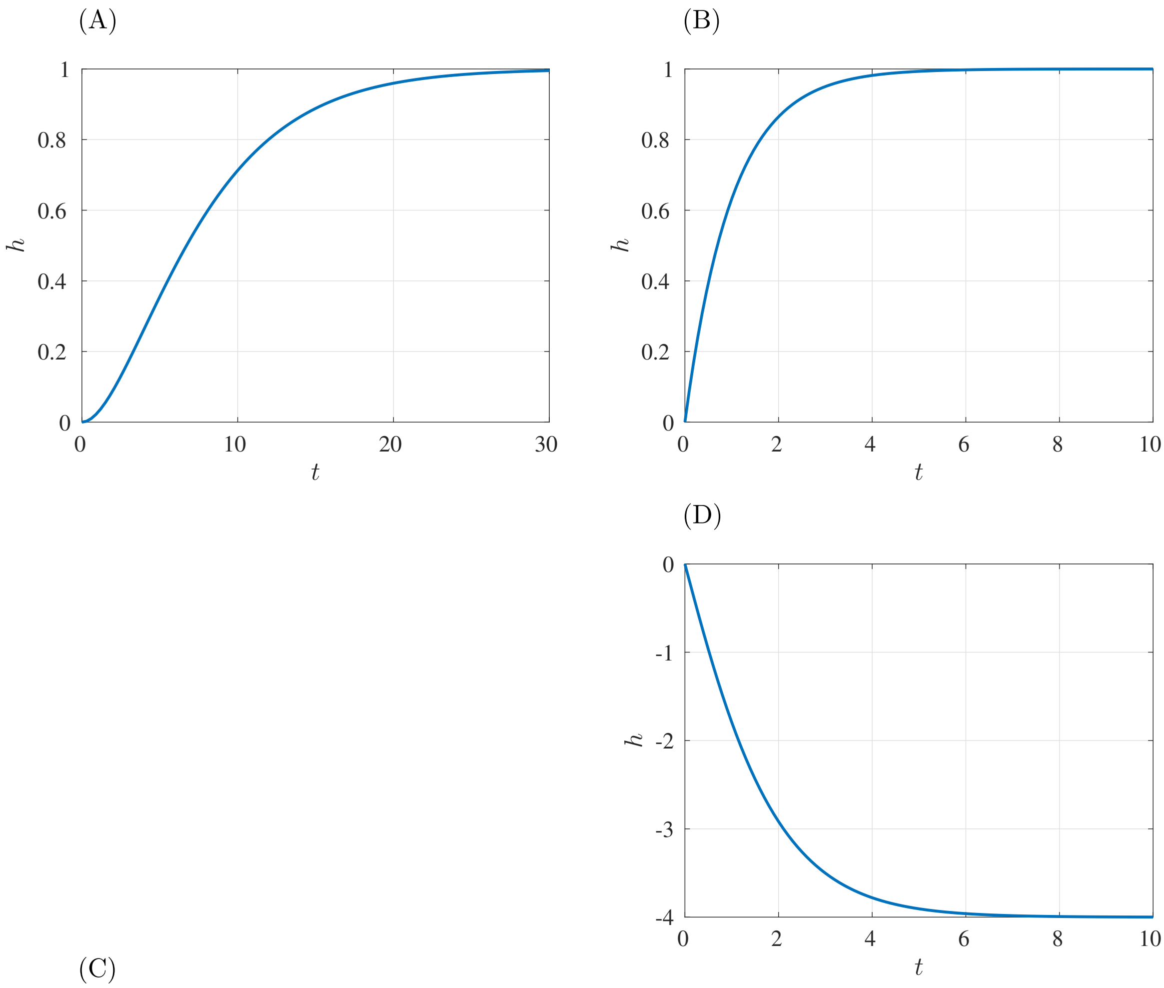



Abb. 4: Sprungantworten zu Aufgabenteil a).

b) Sie sollen für das System in Zustandsdarstellung | 1 P

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}, \quad t > 0, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{c}_1^T &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

einen Zustandsbeobachter entwerfen. Es stehen zwei unterschiedliche Sensoren mit den Messgleichungen $y_1 = \boldsymbol{c}_1^T \boldsymbol{x}$ und $y_2 = \boldsymbol{c}_2^T \boldsymbol{x}$ zur Verfügung. Für welchen Sensor entscheiden Sie sich? Begründen Sie Ihre Antwort durch eine Rechnung.

c) Können Sie anhand der Eigenwerte einer Dynamikmatrix eine Aussage über die Konvergenzgeschwindigkeit eines LTI-Systems treffen? Begründen Sie Ihre Antwort anhand der Differentialgleichung | 1 P

$$\dot{x} = -\lambda x, \quad t > 0, \quad x(0) = x_0 = 5$$

mit dem Parameter $\lambda \in \{1, 2\}$.

d) Betrachten Sie das folgende System in der Zustandsdarstellung

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ d & e & f \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}, \quad t > 0, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0.$$

(i) Leiten Sie anhand des Routh-Hurwitz-Verfahrens Bedingungen für die Werte von $d$, $e$ und $f$ her, so dass die asymptotische Stabilität des Systems gewährleistet ist. | 3.5 P

(ii) Das System wird mit einem Eingang | 1.5 P

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ d & e & f \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad t > 0, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0.$$

erweitert. Berechnen Sie unter Verwendung des Ergebnisses aus (i) die Koeffizienten $k_1, k_2$ und $k_3$ einer Zustandsrückführung $u = -\boldsymbol{k}^T \boldsymbol{x}$, welche das System für $d = e = f = 1$ stabilisiert. Es ist hierbei ausreichend, die notwendigen Bedingungen für die Koeffizienten des Verstärkungsvektors $\boldsymbol{k}^T$ anzugeben.