Christian-Albrechts-Universität zu Kiel | Technische Fakultät

Deckblatt zu einer Klausur am Institut für Elektrotechnik und Informationstechnik

Modulprüfung	
Modulname	**Regelungstechnik 1**
Datum	**13.03.2017**
Prüfpersonen	
1. Prüfperson	**Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Meurer**
ggf. 2. Prüfperson	
Kandidat/in	
Matrikelnummer	
Name, Vorname	

Erklärung der/des Kandidatin/Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.

Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: ______________________________

Korrektur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Punkte										

Summe der Punkte: ______________ Note: ______________

Einsicht / Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Note einverstanden bin. Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den ______________ Unterschrift: ______________________________

Regelungstechnik I (WS 16/17) **Klausur (13.03.2017)**

Prof. Dr.–Ing. habil. Thomas Meurer
Lehrstuhl für Regelungstechnik

Bitte beachten Sie:

a) Diese Klausur enthält 4 Aufgaben auf den Seiten 3-1.

b) Dauer der Klausur: 120 Minuten.

c) Erlaubte Hilfsmittel: **Bereitgestellte Formelsammlung und 1 Seite A4 einseitig handschriftlich beschrieben**. Elektronische Hilfsmittel, das Vorlesungsskript oder andere Literatur werden nicht zugelassen.

d) Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf alle Blätter, die Sie abgeben.

e) Legen Sie bitte Ihren Studierenden- und Ihren Personalausweis bereit.

f) Geben Sie dieses Deckblatt und die Klausuraufgaben mit Ihrer Klausur ab.

Aufgabe 1. Betrachtet wird das in Abbildung 1 schematisch dargestellte Pumpspeicherkraftwerk. Im Folgenden soll ein mathematisches Modell für den Generatorbetrieb (Ablassen des Wassers aus dem Becken) entwickelt werden. Vereinfachend sei dazu angenommen, dass die Turbine mit einem Übersetzungsverhältnis von 1:1 direkt an die als Generator fungierende Gleichstrommaschine gekoppelt ist.

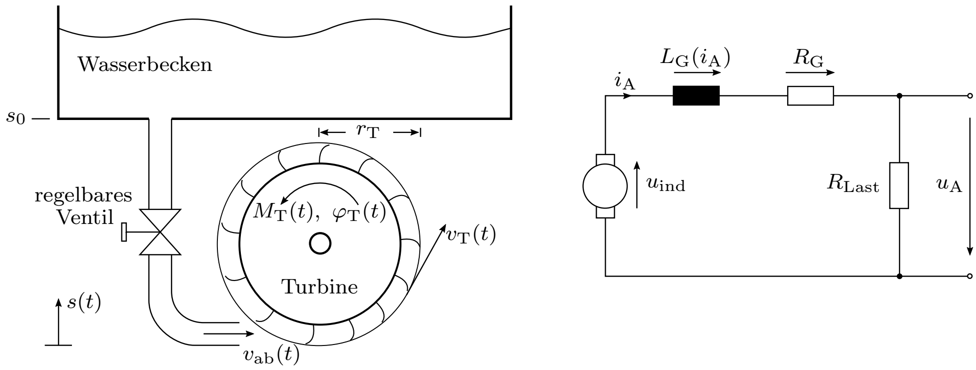


Abb. 1: Schematische Darstellung des Pumpspeicherkraftwerks und elektrisches Schaltbild der Gleichstrommaschine.

Die Wasserturbine wird durch den einstellbaren Volumenabfluss $Q_{ab}(t)$ aus dem Becken angetrieben. Das von der Turbine erzeugte Drehmoment ist abhängig von der Differenzgeschwindigkeit zwischen Ausströmgeschwindigkeit $v_{ab}(t)$ und der Tangentialgeschwindigkeit der Turbine $v_T(t) = r_T\dot{\varphi}_T(t)$, d.h.

$$M_T(t) = r_T \frac{1}{2} A_T c_W \rho \big(v_{ab}(t) - v_T(t)\big)^2 = \beta\big(v_{ab}(t) - v_T(t)\big)^2.$$

Hierbei beschreibt r_T den Außenradius der Turbine, A_T den Flächeninhalt der vom Wasser umströmten Schaufeln, c_W den Reibwert und ρ die Dichte des Wassers. Die Ausflussgeschwindigkeit ergibt sich zu $v_{ab}(t) = \sqrt{2gs(t)}$ mit g der Gravitationsbeschleunigung und $s(t)$ der Fallhöhe. Für das Wasserbecken mit über der Höhe konstanter Querschnittsfläche A_B gilt die Volumenflussbilanz (unter der Annahme $s(t) > s_0$)

$$Q_B(t) = \frac{dV_B}{dt} = Q_{zu}(t) - Q_{ab}(t) \quad \text{mit} \quad Q_{zu}(t) = 0,\ Q_{ab}(t) = a(t)A_V\sqrt{2gs(t)}.$$

Die Variable $a(t) \in [0,1]$ gibt hierbei die veränderbare Stellung des Ventils im Turbinenzulauf an und A_V beschreibt die maximale Öffnungsfläche des Ventils.

Die Gleichstrommaschine ist charakterisiert durch das aufgenommenes Drehmoment $M_G(t) = k_G i_A(t)$, die induzierte Spannung $u_{ind}(t) = k_G\dot{\varphi}_T(t)$ sowie die nichtlinear vom Ankerstrom abhängige Induktivität $L_G(i_A)$. Dabei stellt k_G die sogenannte Motorkonstante dar. Des Weiteren soll die Ankerspannung $u_A(t)$ am belasteten Ausgang des Generators gemessen werden. Das Gesamtmassenträgheitsmoment aller rotierenden Körper wird durch J beschrieben.

Lösen Sie die folgenden voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

a) Die Systemzustände sind $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} s & \varphi_T & \dot{\varphi}_T & i_A \end{bmatrix}^T$. Geben Sie die Stellgröße $u(t)$ und den Ausgang $y(t)$ des Systems an. | 0.5 P

b) Bestimmen Sie das mathematische Modell des Systems in der Form | 5 P

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u)\ ,$$
$$y = h(\boldsymbol{x}, u)\ .$$

c) Gegeben ist das nichtlineare System

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + e^{-x_2} \tan(\omega u) \\ \sqrt[4]{x_1} + \frac{\alpha}{x_2} + \beta \end{bmatrix}, \quad y = 2x_1 + 5x_2 + (\alpha + u)^2, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Bestimmen Sie die Ruhelage (für $u_R = 0$) des Systems. | 1.5 P

(ii) Linearisieren Sie das System um einen allgemeinen Arbeitspunkt $(\boldsymbol{x}_R, u_R)$ und stellen Sie es wie folgt dar: | 3 P

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\boldsymbol{x}} &= A\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\Delta u \ , \\ \Delta y &= \boldsymbol{c}^T\Delta\boldsymbol{x} + d\Delta u \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Betrachtet wird die in Abbildung 2 dargestellte Reihenschaltung zweier Systeme mit den Übertragungsfunktionen $\hat{g}_1(s)$ und $\hat{g}_2(s)$.

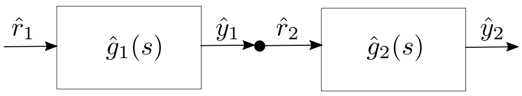


Abb. 2: Reihenschaltung der beiden Teilsysteme mit Übertragungsfunktionen $\hat{g}_1(s)$ bzw. $\hat{g}_2(s)$.

Für die Zustandsdarstellung von Teilsystem $\hat{g}_1(s)$ gilt

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_1 &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} u_1, \quad \boldsymbol{x}_1(0) = \boldsymbol{x}_{10} \\ y_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \end{aligned} \tag{1}$$

während das zweite Teilsystem durch

$$\hat{g}_2(s) = \frac{\hat{y}_2(s)}{\hat{u}_2(s)} = \frac{1}{0.25 + 0.05s + s^2} \tag{2}$$

gegeben ist. Gemäß Abbildung 2 gelten für den ungeregelten Betrieb $u_1 = r_1$ und $u_2 = r_2 = y_1$.

a) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion für das *erste Teilsystem* (1) durch | 1.5 P

$$\hat{g}_1(s) = \frac{\hat{y}_1(s)}{\hat{u}_1(s)} = \frac{\sqrt{3}}{(1+s)\left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right)}$$

gegeben ist und bestimmen Sie die Übertragungsfunktionen $\hat{g}(s)$ des Gesamtsystems, welches aus der Reihenschaltung hervorgeht.

b) Bestimmen Sie die Amplitudenerhöhung des P-T_2 Glieds (2) in der Resonanzfrequenz. | 0.5 P

c) Zeichnen Sie den Amplituden- und Phasenverlauf der Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$ des *Gesamtsystems* in das beiliegende Bodediagram ein. | 3 P

Hinweis: Verwenden Sie folgende Näherungen: $20\log(\sqrt{3}) \approx 4.8$, $20\log(4) \approx 12$.

d) Es soll für das *erste Teilsystem* (1) ein PD-Regler mit Realisierungsterm der Form

$$g_{r,1}(s) = \frac{V_r(1 + T_d s)}{s(1 + T_r s)}$$

entworfen werden, so dass die folgenden Spezifikationen erfüllt sind:

$$t_{r,1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{s}, \quad \ddot{u}_1 = 0\%, \quad e_{\infty,1}|_{r_1=\sigma(t)} = 0.$$

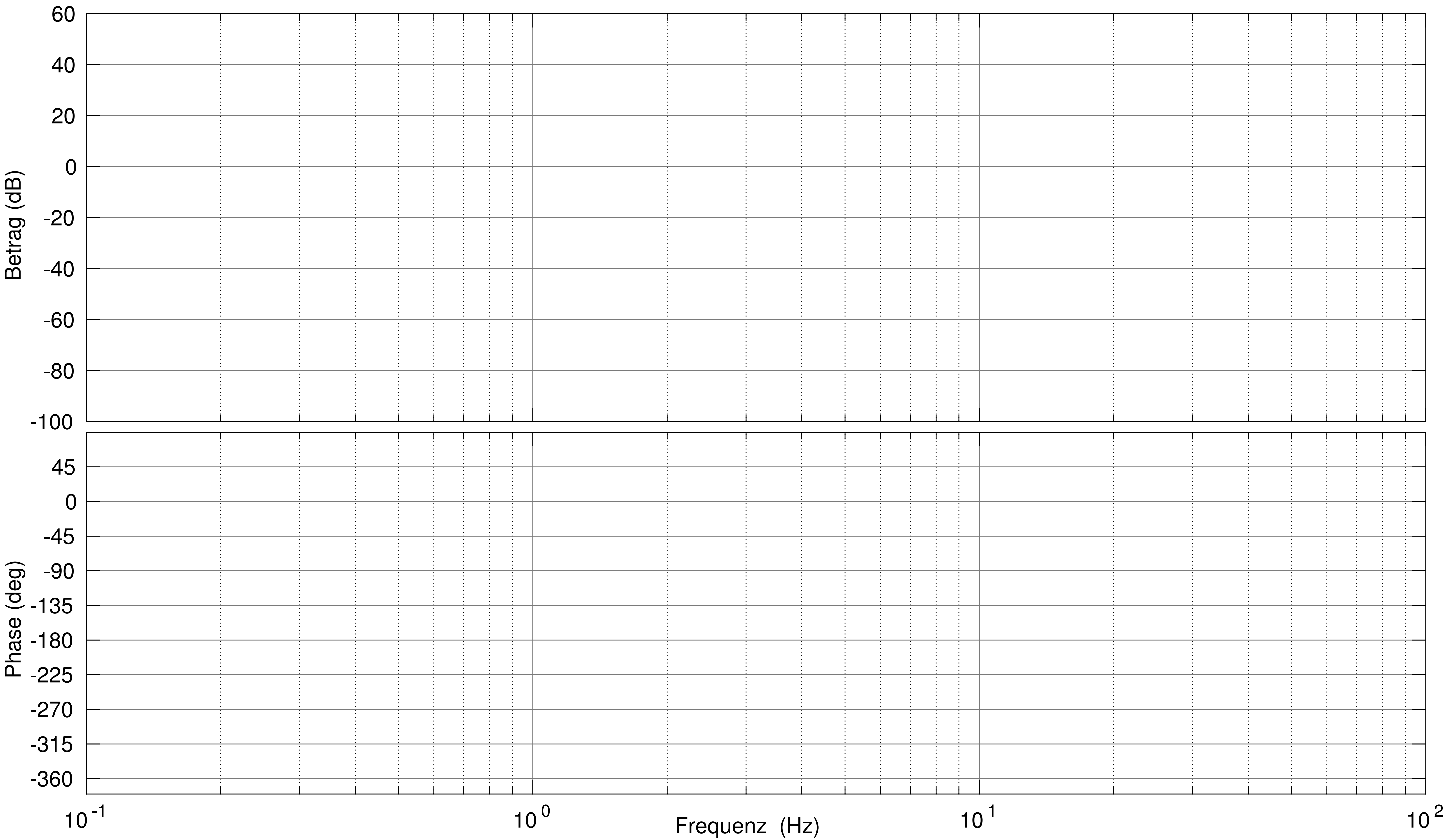
(i) Welchen Zweck erfüllt der Realisierungsterm und wie muss die Zeitkonstante T_r gewählt werden? Begründen Sie ihre Antwort. | 0.5 P

(ii) Bestimmen Sie T_d und V_r unter Vernachlässigung des Realisierungsterms. | 2.5 P

e) Entwerfen Sie einen Kompensationsregler für das Teilsystem (2) zur Kompensation des P-T_2-Verhaltens, so dass folgende Spezifikationen erfüllt sind: | 2 P

$$t_{r,2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ \text{s}, \quad \ddot{u}_2 = 10\%, \quad e_{\infty,2}|_{r_2=\sigma(t)} = 0.$$

Hinweis: Nutzen Sie in den Teilaufgaben e) und f) die Referenzwertetabelle aus der Formelsammlung.


Betrag (dB)
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
Phase (deg)
45
0
-45
-90
-135
-180
-225
-270
-315
-360
10^-1
10^0
10^1
10^2
Frequenz (Hz)

Aufgabe 3. Betrachtet wird ein lineares System der Form

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \\ y &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{3}$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Dynamikmatrix des Systems (3). Ist das System (3) asymptotisch stabil? | 0.5 P

b) Berechnen Sie eine reguläre Zustandstransformation $\boldsymbol{x} = V\boldsymbol{z}$, so dass die transformierte Systemmatrix $\tilde{A}$ Diagonalstruktur aufweist. Geben Sie $\tilde{A}$ explizit an. | 2 P

c) Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t)$ des Systems (3). | 1.5 P

d) Berechnen Sie die Sprungantwort $y(t)$ des Systems (3) für die Anfangsbedingung $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$ und ermitteln Sie die Steigung der Sprungantwort zum Zeitpunkt $t = 0$. Skizzieren Sie den Verlauf der Sprungantwort im Zeitintervall $t \in [0, 5]$. | 3 P

e) Entwerfen Sie einen Zustandsregler $u = -\boldsymbol{k}^T\boldsymbol{x}$ so, dass die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises bei $\lambda_1 = \lambda_2 = -5$ liegen. | 3 P

Aufgabe 4. Die folgenden Aufgabenteile a) und b) sind unabhängig voneinander lösbar.

a) Gegeben ist die Transitionsmatrix

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & e^t t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-3t}\cos(\pi t) & e^{-3t}\sin(\pi t) \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-3t}\sin(\pi t) & e^{-3t}\cos(\pi t) \end{bmatrix}.$$

(i) Ermitteln Sie die zur Transitionsmatrix $\Phi(t)$ gehörende Dynamikmatrix A. | 1 P

(ii) Wie viele Eingangsgrößen $\dim \boldsymbol{u} = m$ sind mindestens notwendig, um die vollständige Steuerbarkeit des Systems | 1 P

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$$

mit der soeben ermittelten Dynamikmatrix A zu gewährleisten? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Es ist keine explizite Berechnung erforderlich.

b) Das um eine Ruhelage $\boldsymbol{x}_R$ *linearisierte Modell* eines einfach wirkenden, hydraulischen Zylinder führt auf das Differenzialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \Delta\dot{w} &= \Delta v\,, \\ \Delta\dot{v} &= \frac{1}{m}(Q\Delta p - d\Delta v - k\Delta w), \\ \Delta\dot{p} &= \frac{\beta}{V_R}(\Delta q - Q\Delta v) \end{aligned} \tag{4}$$

mit $\Delta w(0) = \Delta v(0) = \Delta p(0) = 0$. Dabei sind Δw die Position und Δv die Geschwindigkeit des Kolbens mit der Masse m. Der Zustand Δp ist der hydraulische Druck in der Zylinderkammer mit der Querschnittsfläche Q. Die Ruhelage des Systems ist mit $\boldsymbol{x}_R = [w_R,\, v_R,\, p_R] = [w_R,\, 0,\, kw_R/Q]$ für $q_R = 0$ geben. Der Parameter V_R beschreibt das Volumen des Zylinders in der Ruhelage w_R. Der Hydraulikzylinder kann über den Ölvolumenstrom Δq angesteuert werden. Die Kompressibilität des Mediums ist mit β gekennzeichnet, k ist die Steifigkeit der Rückstellfeder und d ist die viskose Reibung zwischen Kolben- und Zylinderoberfläche.

Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben.

(i) Geben Sie die Dynamikmatrix A, den Eingangsvektor $\boldsymbol{b}$ und die Ausgangsmatrix C der Linearisierung (4) an, wenn die Position und die Geschwindigkeit des Kolbens gemessen werden. | 1 P

(ii) Geben Sie die Übertragungsfunktion $\hat{g}_1(s) = \Delta\hat{w}(s)/\Delta\hat{q}(s)$ an. Gehen Sie dabei wie folgt vor: | 2 P

- Transformieren Sie die gegebenen Differenzialgleichungen individuell in den Bildbereich der Laplace-Transformation.
- Bestimmen Sie $\Delta\hat{q}(s)$ in Abhängigkeit von $\Delta\hat{w}(s)$, d.h. $\Delta\hat{q}(s) = f(\Delta\hat{w}(s))$.
- Ermitteln Sie $\hat{g}_1(s)$ mit Hilfe von $\Delta\hat{q}(s) = f(\Delta\hat{w}(s))$.

Es wird empfohlen in den Rechenschritten von der *Abkürzung* $\alpha = Q\beta/(mV_R)$ Gebrauch zu machen.

(iii) Ist die die Übertragungsfunktion $\hat{g}_1(s)$ eingangs-/ausgangsstabil? | 0.5 P

(iv) Zeigen Sie, dass das System mit dem Eingang $\Delta q(s)$ vollständig steuerbar ist. | 1 P

(v) Ist das System vollständig beobachtbar, wenn nur die Position des Kolbens gemessen werden kann? Begründen Sie ihre Aussage unter Verwendung des Ergebnisses aus (iv). | 1 P

(vi) Unter welcher Voraussetzung ist die Übertragungsfunktion $\hat{g}_2(s) = \Delta\hat{v}(s)/\Delta\hat{q}(s)$ eingangs-/ausgangsstabil? | 1 P

(vii) Welche Rückschlüsse lassen sich mit Hilfe der Systemgleichungen und der Übertragungsfunktion $\hat{g}_2(s)$ für die Beobachtbarkeit im Fall $y(t) = \Delta v(t)$ ziehen? Nutzen Sie das Ergebnis aus (iv). | 0.5 P

(viii) Kennzeichnen Sie die asymptotische Stabilität des Gesamtsystems (4) auf der Basis der vorangegangenen Ergebnisse zur Eingangs-/Ausgangsstabilität von $\hat{g}_1(s)$ bzw. $\hat{g}_2(s)$. | 0.5 P

(ix) Sei $f_{\text{ext}}(t)$ eine am Kolben angreifende externe Kraft. Erweitern Sie die Systemgleichungen (4) um die Störgröße $f_{\text{ext}}(t)$. | 0.5 P

Lösung (Aufgabe 1).

a) i) Eingang des Systems ist $u(t) = a(t)$, da über die Einstellung des Ventils die Ausströmgeschwindigkeit direkt vorgegeben werden kann, die das Gesamtsystem antreibt 0.25 Pkt.. Ausgang des Systems ist $y(t) = u_\mathrm{A}$, da laut Aufgabe die Ankerspannung gemessen wird. 0.25 Pkt.

ii) Aus der Bilanz der Volumenflüsse ergibt sich:

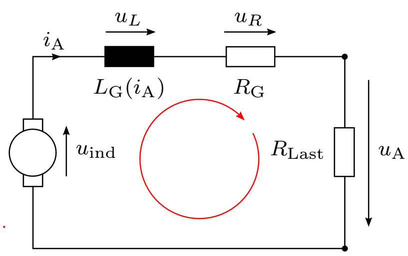
$$Q_\mathrm{B}(t) = \frac{dV_\mathrm{B}}{dt} = A_\mathrm{B}\dot{s}(t) = a(t)A_\mathrm{V}\sqrt{2gs(t)} \text{ 0.5 Pkt.}$$
$$\Rightarrow \quad \dot{s}(t) = a(t)\frac{A_\mathrm{V}}{A_\mathrm{B}}\sqrt{2gs(t)} \text{ 0.5 Pkt.}$$

Für das mechanische System gilt nach Drehimpulssatz:

$$J\ddot{\varphi}_\mathrm{T}(t) = M_\mathrm{T}(t) - M_\mathrm{G}(t) \text{ 0.5 Pkt.} = \beta\left(\sqrt{2gs(t)} - r_\mathrm{T}\dot{\varphi}_\mathrm{T}(t)\right)^2 - k_\mathrm{G}i_\mathrm{A}$$
$$\Rightarrow \quad \ddot{\varphi}_\mathrm{T}(t) = \frac{\beta}{J}\left(\sqrt{2gs(t)} - r_\mathrm{T}\dot{\varphi}_\mathrm{T}(t)\right)^2 - \frac{k_\mathrm{G}}{J}i_\mathrm{A} \text{ 0.5 Pkt.}$$

Aus der Maschengleichung folgt:

$$0 = u_\mathrm{ind} + u_L + u_R + u_\mathrm{A} \text{ 0.5 Pkt.}$$



Aus den Bauteilgleichungen folgt:

$$u_R = R_\mathrm{G}i_\mathrm{A}, \text{ 0.25 Pkt.} \quad u_\mathrm{A} = R_\mathrm{Last}i_\mathrm{A} \text{ 0.25 Pkt.},$$
$$u_L = \frac{d}{dt}\Big(L_\mathrm{G}(i_\mathrm{A}(t))i_\mathrm{A}(t)\Big) = \left(\frac{\partial L_\mathrm{G}(i_\mathrm{A})}{\partial i_\mathrm{A}}i_\mathrm{A} + L_\mathrm{G}(i_\mathrm{A})\right)\frac{di_\mathrm{A}}{dt} \text{ 0.5 Pkt.}$$

Daraus folgt:

$$0 = \overbrace{k_\mathrm{G}\dot{\varphi}_\mathrm{T}}^{0.25\text{ Pkt.}} + \left(\frac{\partial L_\mathrm{G}(i_\mathrm{A})}{\partial i_\mathrm{A}}i_\mathrm{A} + L_\mathrm{G}(i_\mathrm{A})\right)\frac{di_\mathrm{A}}{dt} + R_\mathrm{G}i_\mathrm{A} + R_\mathrm{Last}i_\mathrm{A}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{di_\mathrm{A}}{dt} = \frac{-k_\mathrm{G}\dot{\varphi}_\mathrm{T}(t)}{\frac{\partial L_\mathrm{G}(i_\mathrm{A})}{\partial i_\mathrm{A}}i_\mathrm{A} + L_\mathrm{G}(i_\mathrm{A})} - \frac{(R_\mathrm{G} + R_\mathrm{Last})i_\mathrm{A}}{\frac{\partial L_\mathrm{G}(i_\mathrm{A})}{\partial i_\mathrm{A}}i_\mathrm{A} + L_\mathrm{G}(i_\mathrm{A})} \text{ 0.5 Pkt.}$$

Damit gilt:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} u\frac{A_\mathrm{V}}{A_\mathrm{B}}\sqrt{2gx_1} \\ x_3 \text{ 0.25 Pkt.} \\ \frac{\beta}{J}\left(\sqrt{2gx_1} - r_\mathrm{T}x_3\right)^2 - \frac{k_\mathrm{G}}{J}x_4 \\ \frac{-k_\mathrm{G}x_3}{\frac{\partial L_\mathrm{G}(x_4)}{\partial x_4}x_4 + L_\mathrm{G}(x_4)} - \frac{(R_\mathrm{G}+R_\mathrm{Last})x_4}{\frac{\partial L_\mathrm{G}(x_4)}{\partial x_4}x_4 + L_\mathrm{G}(x_4)} \end{bmatrix} \text{ 0.25 Pkt.}, \quad y = R_\mathrm{Last}x_4 \text{ 0.25 Pkt.}$$

b) i) Für die Ruhelage gilt $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), u(t), t) = \boldsymbol{0}$ 0.5 Pkt., daraus folgt

$$0 = x_{1,R}^2 + e^{-x_{2,R}}\tan(u_R) \overset{u_R=0}{\overbrace{=}} x_{1,R}^2 \quad \Rightarrow \quad x_{1,R} = 0 \text{ 0.5 Pkt.}$$
$$0 = \sqrt[4]{x_{1,R}} + \frac{\alpha}{x_{2,R}} + \beta \quad \Rightarrow \quad x_{2,R} = -\frac{\alpha}{\beta} \text{ 0.5 Pkt.}$$

ii) Linearisierung um einen allgemeinen Arbeitspunkt $(\boldsymbol{x}_R, u_R)$.

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}} = A\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\Delta u \;,$$
$$\Delta y = \boldsymbol{c}^T\Delta\boldsymbol{x} + d\Delta u \;.$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} 2x_{1,R} \;\; {\scriptstyle 0.25\text{ Pkt.}} & -\tan(\omega u_R)e^{-x_{2,R}} \;\; {\scriptstyle 0.25\text{ Pkt.}} \\ \frac{1}{4x_{1,R}^{3/4}} \;\; {\scriptstyle 0.25\text{ Pkt.}} & -\frac{\alpha}{x_{2,R}} \;\; {\scriptstyle 0.25\text{ Pkt.}} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \omega\sec(\omega u_R)^2 e^{-x_{2,R}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega(1+\tan(\omega u_R))e^{-x_{2,R}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega\frac{\cos(\omega u_R)+\sin(\omega u_R)}{\cos(\omega u_R)}e^{-x_{2,R}} \\ 0 \end{bmatrix} \;\; {\scriptstyle 1\text{ Pkt.}},$$

$$\boldsymbol{c}^T = \begin{bmatrix} 2 \;\; {\scriptstyle 0.25\text{ Pkt.}} & 5 \;\; {\scriptstyle 0.25\text{ Pkt.}} \end{bmatrix}, \quad d = 2(u_R + \alpha) \;\; {\scriptstyle 0.5\text{ Pkt.}}$$

Lösung (Aufgabe 2).

a) Es gilt, dass

$$\hat{g}_1(s) \overset{0.5\text{ Pkt.}}{=} [1\ 0]\begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 0 & s+\sqrt{3} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \end{bmatrix} = [1\ 0]\,\frac{1}{(s+1)(s+\sqrt{3})}\begin{bmatrix} s+\sqrt{3} & 2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \hat{g}_1(s) \overset{0.5\text{ Pkt.}}{=} \frac{\sqrt{3}}{(1+s)\left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)}$$

Unter Berücksichtigung von $\hat{g}(s) = \hat{g}_1(s)\hat{g}_2(s)$ folgt

$$\hat{g}(s) \overset{0.5\text{ Pkt.}}{=} \frac{V_1V_2}{\left(1+\frac{s}{\omega_1}\right)\left(1+\frac{s}{\omega_2}\right)\left(1+2\xi\frac{s}{\omega_3}+\left(\frac{s}{\omega_3}\right)^2\right)} \tag{5}$$

mit

$$V_1 = \sqrt{3}, \quad V_2 = 4, \quad \omega_1 = 1, \quad \omega_2 = \sqrt{3}, \quad \omega_3 = 0.5, \quad \xi = 0.05.$$

b) Die Resonanzerhöhung beträgt

$$a_r \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} 20\log\left(\frac{1}{2\xi}\right) = 20\log\left(\frac{1}{0.1}\right) = 20\log(10) \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} 20.$$

c) Gemäß der Darstellung von $\hat{g}(s)$ in (5) sind die Knickfrequenzen ω_i gegeben.

Die Teilübertragungsfunktionen zeigen folgendes Verhalten im Bodediagramm:

0.5 Pkt. Die konstante Verstärkung beträgt $V_1 = \sqrt{3} \triangleq 4.77$ dB.

0.5 Pkt. In $\omega_1 = 1$ fällt die Amplitudensteigung von 0 auf -20 dB/dec ab, die Phase senkt sich um 45° und strebt asymptotisch gegen $-90°$.

0.5 Pkt. In ω_2 fällt die Amplitudensteigung von 0 auf -20 dB/dec ab, die Phase senkt sich um 45° an und strebt asymptotisch gegen $-90°$.

0.5 Pkt. Die konstante Verstärkung von $\hat{g}_2(s)$ beträgt $V_2 = 4 \triangleq 12$ dB.

0.5 Pkt. In ω_3 sinkt die Amplitudensteigung von 0 auf 40 dB/dec ab, die Phase senkt sich um 90° und strebt asymptotisch gegen $-180°$.

Zusammengefügt ergibt dies das Verhalten wie in Abbildung 3 dargestellt 0.5 Pkt..

d) Die Antworten zu den Unterfragen können wie folgt beantwortet werden:

(i) Der Realisierungsterm dient dazu den Nennergrad zu erhöhen um die Eigenschaft $\deg(\hat{n}_r(s)) \geq \deg(\hat{z}_r(s))$ abzusichern, wobei $\hat{g}_r(s) = \frac{z_r(s)}{\hat{n}_r(s)}$ gilt. 0.25 Pkt. Unter der Vorraussetzung, dass die Zeitkonstante T_r des Realisierungsterms groß genug ist, genauer $T_r^{-1} \gg \omega_{c1} = \sqrt{3}$, 0.25 Pkt. kann dieser Term beim Entwurf zunächst vernachlässigt werden. Hierzu kann beispielsweise

$$T_r = 10^{-4}\text{s}$$

gewählt werden.

(ii) Mit $\hat{g}_{r1}(s) = \frac{V_{r1}(1+T_{d1}s)}{s(1+T_rs)}s$ gilt

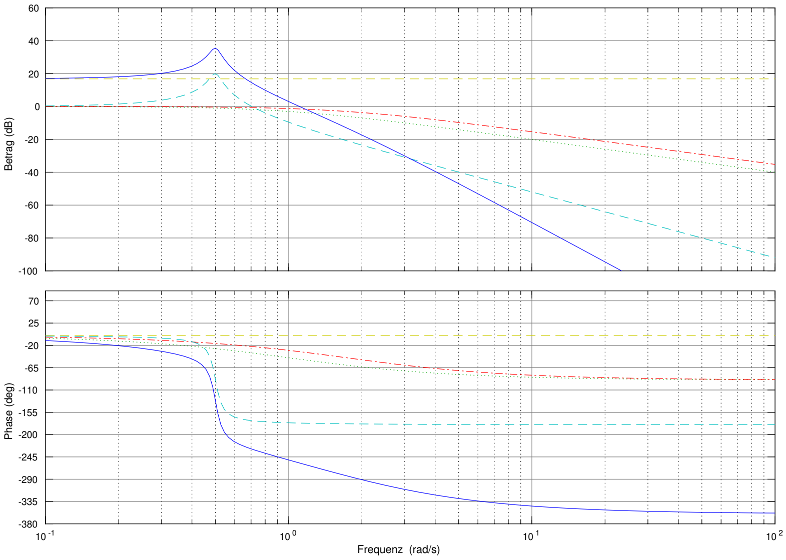


Abb. 3: Bodediagram der Übertragungsfunktion$\hat{g}(s)$ und ihrer Komponenten.

$$\hat{l}_1(s) \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} \hat{g}_{r1}(s)\hat{g}_1(s) = \frac{V_{r1}(1+T_{d1}s)V_1}{s(1+T_r s)\left(1+\frac{s}{\omega_1}\right)\left(1+\frac{s}{\omega_2}\right)}. \tag{6}$$

Nach dem Frequenzkennlinienverfahren übersetzen sich die Spezifikationen zu

$$t_{r1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_{c1} = \frac{1.5}{t_{r1}} \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} \sqrt{3}$$

$$\ddot{u}_1 = 0\% \quad \Rightarrow \quad \phi_1 = 70^\circ - \ddot{u}_1 = 70^\circ \quad \leftrightarrow \quad \arg(\hat{l}_1(j\omega_{c1})) \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} -110^\circ \equiv -\frac{11\pi}{18}$$

$$e_{\infty,1}|_{r=\sigma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_1 \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} 1.$$

Weiterführend wird zunächst die Zeikonstante T_{d1} bestimmt. Es gilt, dass

$$\arg\left(\hat{l}_1(j\omega_{c1})\right) \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega_{c1}}{\omega_1}\right) - \arctan\left(\frac{\omega_{c1}}{\omega_2}\right) + \arctan\left(T_{d1}\omega_{c1}\right).$$

Einsetzen von $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \sqrt{3}$ und $\omega_{c1} = \sqrt{3}$ und Nachschlagen in der Referenzwertetabelle der Formelsammlung ergibt sich

$$\begin{aligned}\arg\left(\hat{l}_1(j\omega_{c1})\right) &= -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\sqrt{3}\right) - \arctan(1) + \arctan\left(\sqrt{3}T_{d1}\right)\\ &= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + \arctan\left(\sqrt{3}T_{d1}\right)\\ &= \underbrace{-\frac{13\pi}{12}}_{0.25\text{ Pkt.}} + \arctan\left(\sqrt{3}T_{d1}\right)\end{aligned}$$

Somit folgt aus der Anforderung, dass $\arg\left(\hat{l}_1(j\omega_{c1})\right) \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} -\frac{11\pi}{18}$, dass

$$\arctan\left(T_{d1}\omega_{c1}\right) = \frac{17\pi}{36} \quad \Leftrightarrow \quad T_{d1} \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} \frac{\tan\left(\frac{17\pi}{36}\right)}{\sqrt{3}} \approx 6.599.$$

Aus der Anforderung $|\hat{l}_1(j\omega_{c1})| = 1$ folgt unter Berücksichtigung von (6) und Vernachlässigung des Realisierungsterms

$$V_{r1} \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} \frac{|j\omega_{c1}|\left|1+\frac{j\omega_{c1}}{\omega_1}\right|\left|1+\frac{j\omega_{c1}}{\omega_2}\right|}{V_1|1+T_{d1}j\omega_{c1}|} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{4}\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{1+\frac{\tan(17/36\pi)^2}{3}}} \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{\tan(17/36\pi)^2}{3}}} \approx 0.2465$$

e) Entsprechend den Spezifikationen muss gelten:

$$t_{r2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_{c2} \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} \frac{1.5}{t_{r1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\ddot{u}_2 = 10\% \quad \Rightarrow \quad \phi_1 = 70^\circ - \ddot{u}_2 = 60^\circ \quad \leftrightarrow \quad \arg(\hat{l}_2(j\omega_{c2})) \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} -120^\circ \equiv -\frac{2\pi}{3}$$

$$e_{\infty,2}|_{r=\sigma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_2 \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} 1.$$

Ein Kompensationsregler $\hat{g}_{r2}(s)$ kann hierzu in der Form

$$\hat{g}_{r2}(s) \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} \frac{V_{r2}\left(1+2\xi\frac{s}{\omega_3}+\left(\frac{s}{\omega_3}\right)^2\right)}{s(1+T_2 s)} \tag{7}$$

angesetzt werden, sodass gilt

$$\hat{l}_2(s) = \hat{g}_{r2}(s)\hat{g}_2(s) = \frac{V_{r2}V_2}{s(1+T_2 s)}.$$

Somit gilt die Anforderung

$$\arg\left(\hat{l}_2(j\omega_{c2})\right) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{T_2}{\sqrt{3}}\right) \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} -\frac{2\pi}{3}$$

woraus mittels Nachschlagen in der Referenzwertetabelle der Formelsammlung folgt, dass

$$T_2 = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\sqrt{3} \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} 1.$$

Der Verstärkungsfaktor V_{r2} ergibt sich zu

$$V_{r2} \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} \frac{|j\omega_{c2}|\,|1+jT_2\omega_{c2}|}{V_2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{4}{3}}}{4} \overset{0.25\text{ Pkt.}}{=} \frac{1}{3\sqrt{4}}$$

Abbildung 4 zeigt den Vergleich der offenen und der geregelten Strecke für einen Einheitssprung $r_1(t) = \sigma(t)$.

(a)

(b)

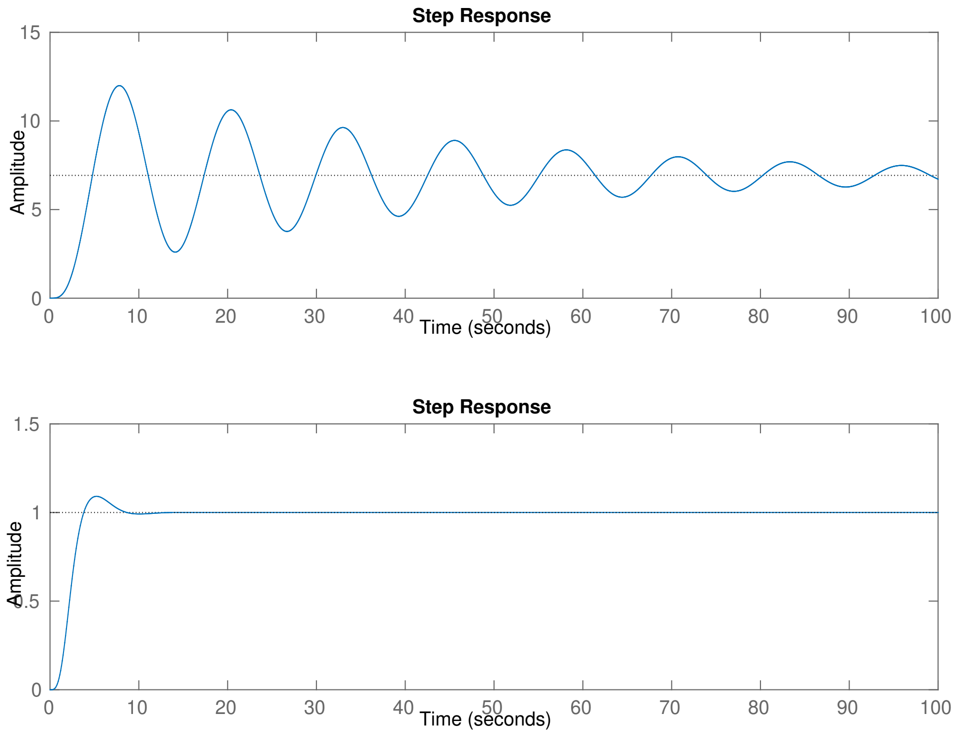


Abb. 4: Vergleich des ungeregelten (a) und des geregelten (b) Systems.

Lösung (Aufgabe 3).

a) Die Eigenwerte des Systems ergeben sich zu $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -1$ 0.25 Pkt.. Damit ist das System asymptotisch stabil, da $Re\{\lambda_{1,2}\} < 0$ 0.25 Pkt.. late

b) Mit den Eigenvektoren des Systems erhält man die reguläre Zustandstransformationsmatrix

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 1 Pkt.}.$$

Damit folgt

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ 1 Pkt.}.$$

c) Die Transitionsmatrix kann durch Rücktransformation von $\tilde{\Phi}(t) = \exp(\tilde{A}t)$

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \exp(-2t) & 0 \\ 0 & \exp(-t) \end{bmatrix} \text{ 0.5 Pkt.}$$

mit Hilfe von V berechnet werden. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= V\tilde{\Phi}V^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-2t) & 0 \\ 0 & \exp(-t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \exp(-2t) & \exp(-t) - \exp(-2t) \\ 0 & \exp(-t) \end{bmatrix} \text{ 1 Pkt.}. \end{aligned}$$

d) Die Sprungantwort berechnet sich aus

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= \Phi(t)\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)\boldsymbol{b}u \, \mathrm{d}\tau \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} - \frac{\exp(-2t)(2\exp(t)-1)}{2}\right) \\ (1 - \exp(-t)) \end{bmatrix} u \text{ 0.5 Pkt.} \end{aligned}$$

und der Gleichung für den Ausgang

$$\begin{aligned} y(t) &= c^T \boldsymbol{x}(t) \\ &= \frac{u}{2} - \frac{1}{2}\exp(-2t)u \text{ 0.5 Pkt.} \end{aligned}$$

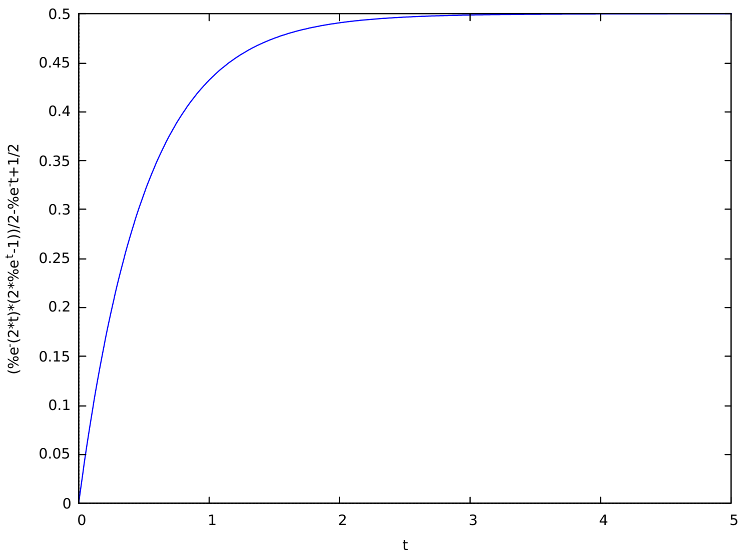
Die Steigung folgt aus

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(t)}{\partial t}|_{t=0} &= \exp(-2t) \\ &= 1. \text{ 1.0 Pkt.} \end{aligned}$$

Aus diesen Informationen lässt sich die Sprungantwort zeichnen 1 Pkt..

e) Mit Hilfe der Ackermann-Formel wird wie folgt ein Zustandsregler entworfen. Überprüfen der Steuerbarkeitsmatrix auf vollständige Steuerbarkeit.

$$\begin{aligned} S &= [b \ Ab] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



Damit ist $rang(S) = 2$ und damit vollständig steuerbar 0.5 Pkt.. Der weitere Verlauf erfolgt nach Skript. Berechnung der Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises

$$\begin{aligned} A_g &= A - \boldsymbol{b}\left[k_1\ k_2.\right] \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -k_1 & -k_2 - 1 \end{bmatrix} \text{ 0.5 Pkt.}. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich die Koeffizient des charakteristischen Polynoms

$$s^2 + k_2 s + 3s + 2k_2 + k_1 + 2.$$

Nach Aufgabenstellung sollen die Eigenwerte bei $\lambda_{1,2} = -5$ liegen, welches durch das folgende Polynom erfüllt wird.

$$p(s) = (s + 5)(s + 5) = s^2 + 10s + 25.$$

Die Koeffizienten ergeben sich also zu $p_0 = 25$ und $p_1 = 10$ 1 Pkt.. Mit

$$\boldsymbol{w}^T = \left[0\ 1\right] S^{-1}$$

und dem damit folgendem Rückführvektor

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}^T &= \boldsymbol{w}^T \left(25 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 10A + A^2 \right) \\ &= \left[9\ 7\right] \text{ 1 Pkt.} \end{aligned}$$

erhält man alle nötigen Komponenten für das Stellgesetz.

Lösung (Aufgabe 4).

a) Bestimmung der Dynamikmatrix A.

(i) Für die gegebene Transitionsmatrix kann man 3 Jordanblöcke identifizieren. Daher ergibt sich die Dynamikmatrix zu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & -\pi & -3 \end{bmatrix}. \quad \text{1 Pkt.} \tag{8}$$

(ii) Aufgrund der 3 Jordanblöcke muss dim $\boldsymbol{u} = 3$ um vollständige Steuerbarkeit gewährleisten zu können. 1 Pkt.

b) Linearisiertes Modell ein einfachwirkenden hydraulischen Zylinders

(i) Identifikation von A, $\boldsymbol{b}$ und C^T.

- Dynamikmatrix:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} & \frac{Q}{m} \\ 0 & -\frac{Q\beta}{V_R} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{0.5 Pkt.} \tag{9}$$

- Eingangsvektor:

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\beta}{V_R} \end{bmatrix} \quad \text{0.25 Pkt.} \tag{10}$$

- Ausgangsmatrix:

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{0.25 Pkt.} \tag{11}$$

(ii) Bestimmung der Übertragungsfunktion $\hat{g}_1(s) = \Delta\hat{w}(s)/\Delta\hat{q}(s)$ an.

- Laplace-Transformation der gegebenen Differentialgleichungen: 0.5 Pkt.

$$\begin{aligned} s\Delta\hat{w}(s) &= \Delta\hat{v}(s)\,, \\ s\Delta\hat{v}(s) &= \frac{1}{m}(Q\Delta\hat{p}(s) - d\Delta\hat{v}(s) - k\Delta\hat{w}(s)), \\ s\Delta\hat{p}(s) &= \frac{\beta}{V_R}(\Delta\hat{q}(s) - Q\Delta\hat{v}(s)) \end{aligned} \tag{12}$$

- $\Delta\hat{q}(s)$ als Funktion von $\Delta\hat{w}(s)$ anschreiben. D.h. mit

$$\Delta\hat{q}(s) = s\left(\frac{V_R}{\beta}\Delta\hat{p}(s) + Q\Delta\hat{w}(s)\right) \tag{13}$$

und

$$\Delta\hat{p}(s) = \frac{s^2m + sd + k}{Q}\Delta\hat{w}(s) \tag{14}$$

folgt direkt

$$\Delta\hat{q}(s) = s\left(V_R\frac{s^2m + sd + k}{Q\beta} + Q\right)\Delta\hat{w}(s) \text{ 1 Pkt.} \tag{15}$$

- Somit kann $\hat{g}_1(s) = \Delta\hat{w}(s)/\Delta\hat{q}(s)$ ganz einfach als

$$\hat{g}_1(s) = \frac{\alpha}{s\left(s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{k}{m} + \alpha Q\right)} \text{ 0.5 Pkt.} \tag{16}$$

mit $\alpha = \frac{Q\beta}{V_R m}$ angegeben werden.

(iii) Die Übertragungsfunktion $\hat{g}_1(s)$ ist nicht eingangs-/ausgangsstabil, da sie einen Integralteil $(1/s)$ beinhaltet. 0.5 Pkt.

(iv) Der Rang der Steuerbarkeitsmatrix des Systems mit Eingang Δq ergibt sich zu

$$\operatorname{rank} C(A, \boldsymbol{b}) = \operatorname{rank}\left[\boldsymbol{b}\ A\boldsymbol{b}\ A^2\boldsymbol{b}\right] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & X \\ \frac{\beta}{V_R} & 0 & X \end{bmatrix} = 3 \text{ 0.5 Pkt.} \tag{17}$$

wobei die Einträge, die mit X gekennzeichnet sind, nichts mehr zum Rang beitragen und daher nicht berechnet werden müssen. Das System ist daher vollständig steuerbar, da die Dimension des Systems ebenso 3 ist. 0.5 Pkt.

(v) Die Beobachtbarkeitsmatrix hat vollen Rang $= 3$,

$$\operatorname{rank} O(A, \boldsymbol{c}^T) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^T \\ \boldsymbol{c}^T A \\ \boldsymbol{c}^T A^2 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ X & X & Q/m \end{bmatrix} = 3 \text{ 0.5 Pkt.} \tag{18}$$

Das System ist daher auch vollständig beobachtbar. Argumentation äquivalent zu (iv). 0.5 Pkt.

(vi) Die Übertragungsfunktion $\hat{g}_2(s)$ kann mit

$$\hat{g}_2(s) = s\hat{g}_1(s) = \frac{\alpha}{s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{k}{m} + \alpha Q} \text{ 0.25 Pkt.} \tag{19}$$

direkt angeschrieben werden. D.h. die Polstellen ergeben sich zu

$$s_{1,2} = -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4m} - \frac{k}{m} - \alpha Q}. \text{ 0.5 Pkt.} \tag{20}$$

Mit positiver Masse m folgt die Bedingung $d > 0$. Dies bedeutet die logische Konsequenz, dass (viskose) Reibung dieses System (eingangs-/ausgangs)stabilisiert. 0.25 Pkt.

(vii) Aufgrund der Pol-/Nullstellenkürzung bei der Übertragungsfunktion $\hat{g}_2(s)$ kann das System mit $y(t) = \Delta v(t)$ nicht gleichzeitig vollständige steuerbar und beobachtbar sein. Da das System aber mit $u(t) = \Delta q(t)$ vollständig steuerbar ist, kann es mit dem Ausgang $\Delta v(t)$ nicht vollständig beobachtbar sein. 0.5 Pkt.

(viii) Bei der Übertragungsfunktion $\hat{g}_2(s)$ erfolgt eine Pol-/Nullstellenkürzung, daher kann mit $\hat{g}_2(s)$ keine Aussage zu asymptotischer Stabilität gemacht werden, jedoch mit $\hat{g}_1(s)$. Das System ist nicht asymptotisch stabil, da die Ordnung von $\hat{g}_1(s)$ gleich der Systemordnung $n = 3$ ist (keine Pol-/Nullstellenkürung), und diese nicht eingangs-/ausgangsstabil ist. 0.5 Pkt.

(ix) Die Störgröße $f_{\text{ext}}(t)$ ist eine Kraft, daher folgt die Abänderung nur in der zweiten Differentialgleichung zu $\varDelta\dot{v} = (Q\varDelta p - d\varDelta v - k\varDelta w \underline{-f_{\text{ext}}})/m$. 0.5 Pkt.