C	A	U	Christian-Albrechts-Universität zu Kiel	Technische Fakultät

Deckblatt zu einer Klausur am Institut für Elektrotechnik und Informationstechnik

Modulprüfung	
Modulname	**Regelungstechnik 1**
Datum	**09.10.2015**
Prüfpersonen	
1. Prüfperson	**Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Meurer**
ggf. 2. Prüfperson	
Kandidat/in	
Matrikelnummer	
Name, Vorname	

Erklärung der/des Kandidatin/Kandidaten vor Beginn der Prüfung

Hiermit bestätige ich, dass ich zur Prüfung angemeldet und zugelassen bin und dass ich prüfungsfähig bin.

Ich nehme zur Kenntnis, dass der Termin für die Klausureinsicht vom Prüfungsamt ET&IT bekannt gegeben wird, sobald mein vorläufiges Prüfungsergebnis im QIS-Portal veröffentlicht wurde. Nach dem Einsichtnahmetermin kann ich meine endgültige Note im QIS-Portal abfragen. Bis zum Ende der Widerspruchsfrist des zweiten Prüfungszeitraums der CAU kann ich beim Prüfungsausschuss Widerspruch gegen dieses Prüfungsverfahren einlegen. Danach wird meine Note rechtskräftig.

Unterschrift: ______________________________

Korrektur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Punkte										

Summe der Punkte: ____________ Note: ____________

Einsicht / Rückgabe

Hiermit bestätige ich, dass ich die Korrektur der Klausur eingesehen habe und mit der auf diesem Deckblatt vermerkten Note einverstanden bin. Die Klausurunterlagen verbleiben bei mir. Ein späterer Einspruch gegen die Korrektur und Benotung ist nicht mehr möglich.

Kiel, den ____________ Unterschrift: ______________________________

Regelungstechnik I (SS 15) **Klausur (09.10.2015)**

Prof. Dr.–Ing. habil. Thomas Meurer
Lehrstuhl für Regelungstechnik

Bitte beachten Sie:

a) Diese Klausur enthält 4 Aufgaben auf den Seiten 3-17.

b) Dauer der Klausur: 120 Minuten.

c) Erlaubte Hilfsmittel: **Bereitgestellte Formelsammlung und 1 Seite A4 einseitig handschriftlich beschrieben**. Elektronische Hilfsmittel, das Vorlesungsskript oder andere Literatur werden nicht zugelassen.

d) Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf alle Blätter, die Sie abgeben.

e) Legen Sie bitte Ihren Studierenden- und Ihren Personalausweis bereit.

f) Geben Sie dieses Deckblatt und die Klausuraufgaben mit Ihrer Klausur ab.

Aufgabe 1. Betrachtet wird der in Abb. 1 dargestellte Hubvorgang einer Masse m durch ein Wasserrad (die Masse befindet sich dabei nicht im Wasser, sondern ist neben dem Rad angeordnet). Ziel ist es, die Masse auf eine vorgegebene Höhe $s(t)$ mit Hilfe einer mit dem Wasserrad fest gekoppelten Winde mit Radius r_W zu hieven. Dabei befindet sich das Gewicht zum Zeitpunkt $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ auf der Position $s(t_0) = s_0$. Das Wasserrad wird durch die Geschwindigkeit des anströmenden Wassers $v_W(t) \in [0, v_{W,Fluss}]$, welche durch einen Schieber reguliert werden kann, angetrieben und generiert ein Drehmoment

$$M_R = r_R \underbrace{\frac{1}{2} A_R c_W \rho}_{\beta} \big(v_W(t) - v_R(t)\big)^2 .$$

Dabei bezeichnet r_R den Außenradius des Rades, A_R die Fläche der vom Wasser umströmten Schaufeln, c_W den Reibwert und ρ die Dichte des Wassers. Die Tangential-/Umlaufgeschwindigkeit des Rades ist durch $v_R(t) = r_R \dot{\varphi}(t)$ gegeben, wobei $\frac{d}{dt}\varphi = \dot{\varphi}$ die Winkelgeschwindigkeit des Rades darstellt. Analog kann die Länge eines Kreisbogens über $l(t) = r_i \varphi(t)$ in Abhängigkeit des Kreisradius r_i angegeben werden.

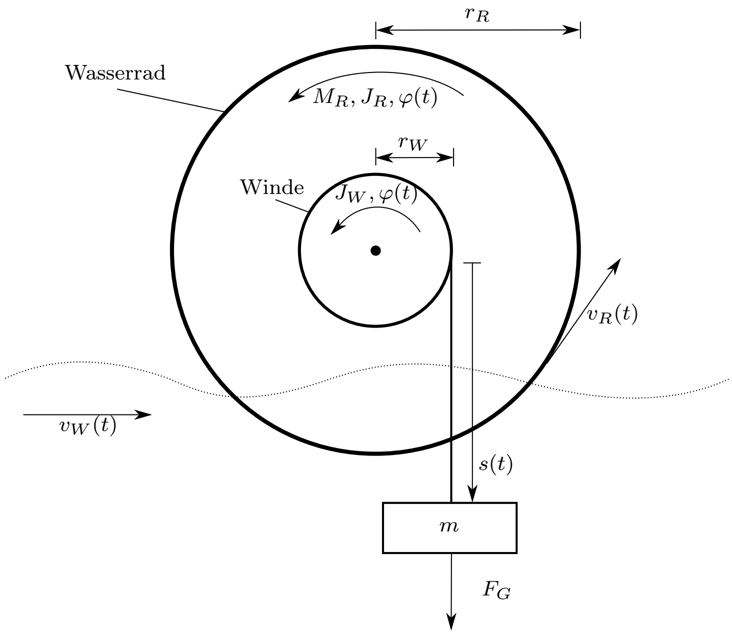


Abb. 1: Schematische Darstellung des Hubvorgangs.

Dem Hubvorgang entgegen wirkt die Gravitationskraft $F_G = mg$. Zusätzlich wirkt ein Reibmoment

$$M_D = c_1 \dot{\varphi}(t) + c_2\big(1 + \sin(\varphi)\big)$$

auf das Wasserrad.

Das Trägheitsmoment des gesamten rotierenden Systems ergibt sich aus der Addition der Trägheitsmomente der einzelnen Teile $J = J_R + J_W$. Die Umrechnung einer Kraft in ein Drehmoment ergibt sich aus dem zugehörigen Hebelarm r_i, so dass gilt $M_i = r_i F_i$.

a) Geben Sie die Zustände $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$, die Stellgröße u und die Regelgröße y des Systems an. | 1 P

b) Bestimmen Sie das mathematische Modell des Systems mithilfe des Drehimpulssatzes in der Form | 4 P

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u) \;,$$
$$y = h(\boldsymbol{x}, u) \;.$$

c) Bestimmen Sie den Arbeitspunkt $(\boldsymbol{x}_R, u_R)$ des Systems für eine beliebige konstante Höhe s_1 der Masse m. | 2 P

d) Linearisieren Sie das System um einen allgemeinen Arbeitspunkt $(\boldsymbol{x}_R, u_R)$ und stellen Sie es wie folgt dar: | 3 P

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}} = A\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\Delta u \ ,$$
$$\Delta y = \boldsymbol{c}^T\Delta\boldsymbol{x} \ .$$

Sollten Sie keine Lösung für Aufgabenteil 1.b) gefunden haben, dann arbeiten Sie in Aufgabenteil 1.d) mit folgendem System weiter:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \cos(x_1) + 3x_2^3 \\ \frac{\delta}{\epsilon}x_2 + (\epsilon+\gamma)^2 x_2 + x_1^2 + u \end{bmatrix} \ ,$$
$$y = x_1 - \sin(\theta x_2) \ .$$

Aufgabe 2. Beide Aufgabenteile A und B sind unabhängig voneinander lösbar.

Teil A:

Gegeben ist die Übertragungsfunktion der Regelstrecke

$$\hat{g}(s) = \frac{10(s+1)\big((2-\sqrt{3})s+1\big)}{s(\sqrt{3}s+1)\big((2+\sqrt{3})s+1\big)} \tag{1}$$

a) Zeichnen Sie den Amplituden- und Phasengang von $\hat{g}(s)$ in das beigefügte Bode-Diagramm ein. Verwenden Sie hierzu vereinfachend $(2-\sqrt{3})^{-1} \approx 3.7$, $(2+\sqrt{3})^{-1} \approx 0.3$ und $(\sqrt{3})^{-1} \approx 0.6$. | 3 P

b) Für die Regelstrecke (2) soll ein Regler so ausgelegt werden, dass die Sprungantwort folgende Anforderungen erfüllt: | 0.5 P

Anstiegszeit $t_r = 1.5$ s, Überschwingen $\ddot{u} = 10\,\%$.

Bestimmen Sie die erforderliche Durchtrittsfrequenz ω_s und die Soll-Phasenreserve ϕ_s für die Anwendung des Frequenzkennlinienverfahrens.

c) Entwerfen Sie einen idealen PD-Regler der Form $\hat{g}_r(s) = V_P(1 + T_D s)$ für die Regelstrecke (2) so, dass die oben bestimmte Durchtrittsfrequenz ω_s und Soll-Phasenreserve ϕ_s erreicht werden. | 3.5 P

d) Wie müssten Sie den entworfenen idealen PD-Regler erweitern, damit dieser realisierbar wird und für den relevanten Frequenzbereich die geforderten Eigenschaften beibehält? Begründen Sie ihre Antwort (es ist keine Rechnung notwendig). | 1 P

Teil B:

Im Folgenden soll der Einfluß von Modellunbestimmtheiten auf das Verhalten des geschlossenen Regelkreises untersucht werden. Hierzu betrachte man den in Abbildung 2 dargestellten Regelkreis mit Regelstrecke $\hat{g}(s)$, Regler $\hat{g}_r(s)$ und Modellunbestimmtheit in der Form des Signalanteils $\epsilon\hat{y}(s)$ mit konstantem ϵ.

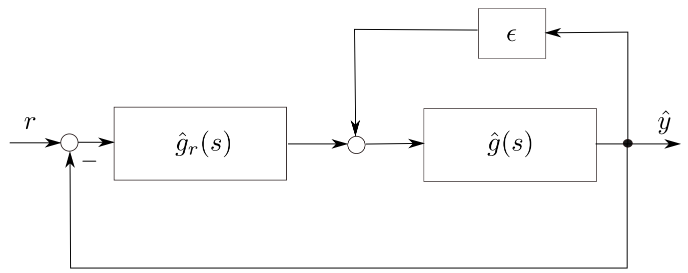
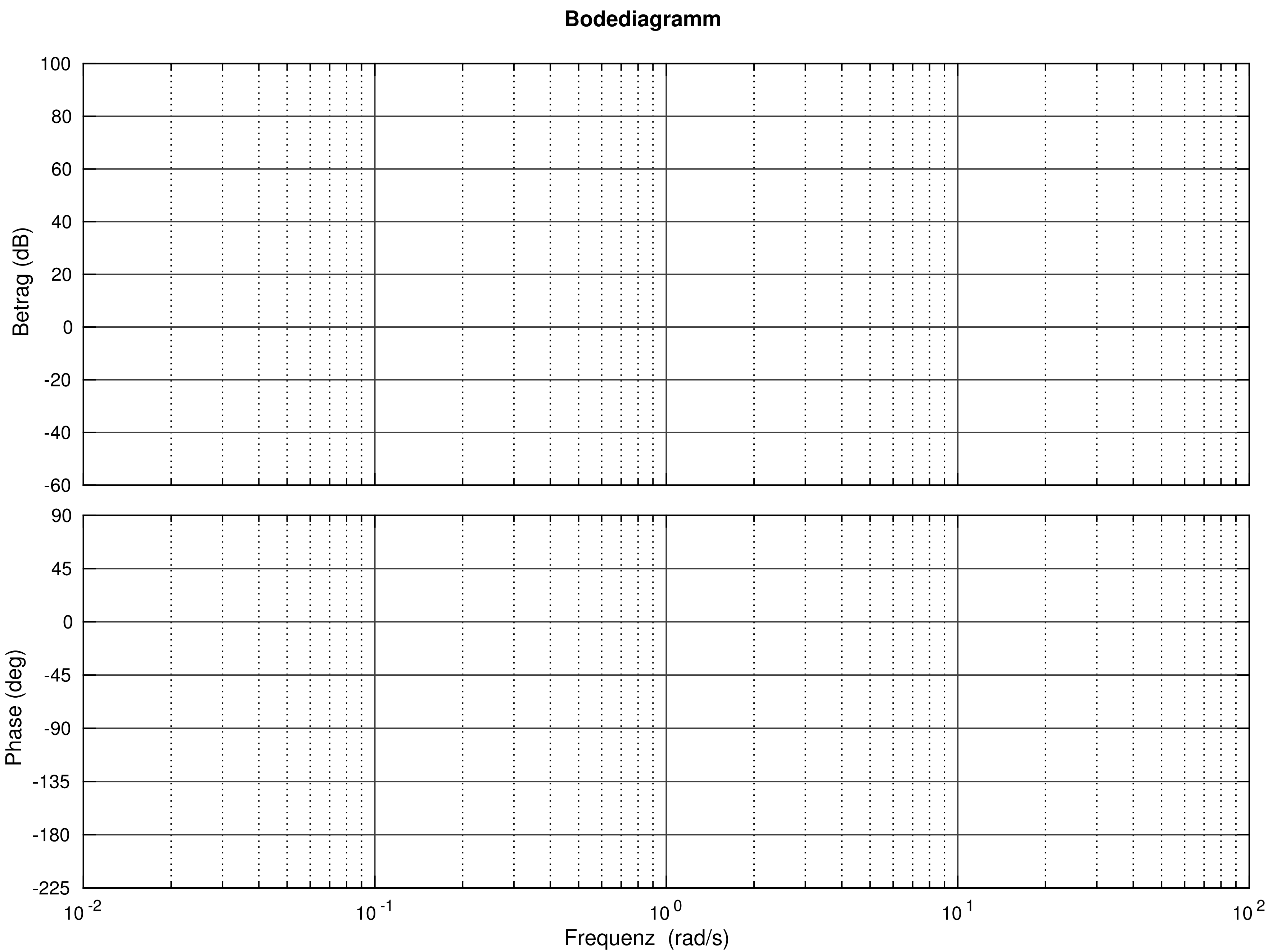


Abb. 2: Geschlossener Regelkreis mit Modellunbestimmtheit.

a) Zeigen Sie allgemein, dass für die Übertragungsfunktion $\hat{t}_{ry}(s)$ des geschlossenen Regelkreises gilt | 1 P

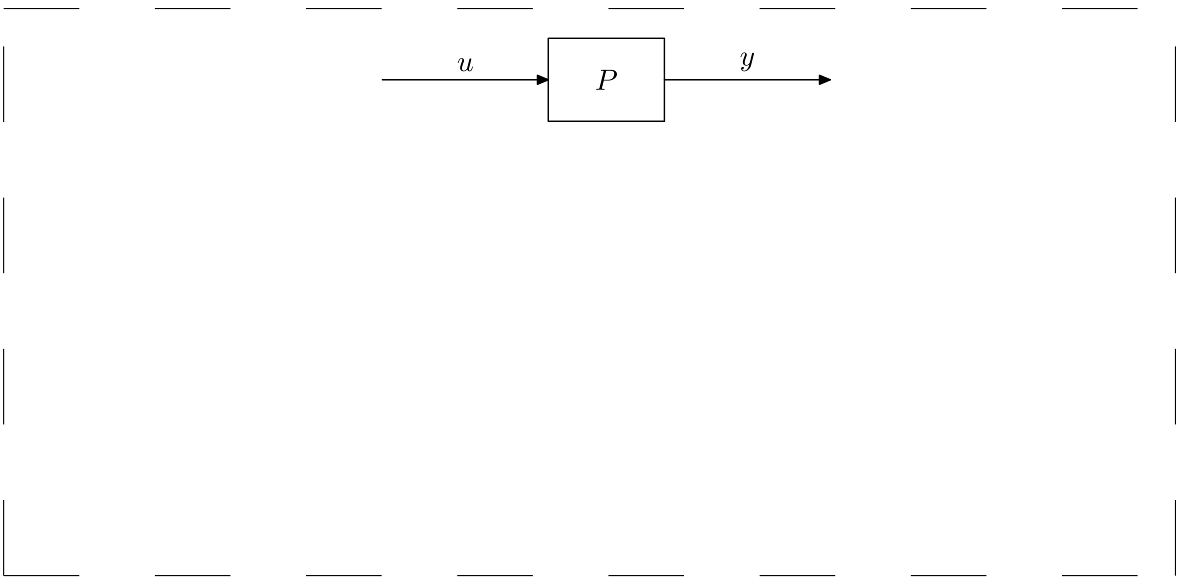
$$\hat{t}_{ry}(s) = \frac{\hat{g}_r(s)\hat{g}(s)}{1 - \epsilon\hat{g}(s) + \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)}.$$

b) Es seien $\hat{g}(s) = \frac{1}{s+1}$, $\hat{g}_r(s) = \frac{1}{s+2}$. Bestimmen Sie den maximalen Wert von ϵ, für welchen der geschlossene Regelkreis in Abbildung 2 noch eingangs-ausgangs-stabil ist. | 1 P


Bodediagramm
Betrag (dB)
100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
Phase (deg)
90
45
0
-45
-90
-135
-180
-225
10 -2
10 -1
10 0
10 1
10 2
Frequenz (rad/s)

Aufgabe 3. Die folgenden Aufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

a) Erweitern Sie das durch P symbolisierte Eingangs–Ausgangs–Verhalten um einen linearen Luenberger-Beobachter. | 2.5 P



b) Ein ungedämpftes, schwingungsfähiges System 2. Ordnung liegt in 1. Standardform vor. Die zugehörige Hankel-Matrix lautet | 2 P

$$\mathcal{H}[1,1] = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4\pi^2 \end{bmatrix}$$

(i) Bestimmen Sie die Systemdarstellung in der Form

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u$$
$$y = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

Geben Sie dazu A, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}^T$ explizit an.

(ii) Wo liegen die Eigenwerte der Dynamikmatrix A?

Beantworten Sie die nachfolgenden Aufgaben durch Ankreuzen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig, d.h. Mehrfachnennungen sind nicht zulässig. Wenn Sie eine Entscheidung wieder rückgängig machen wollen, schwärzen Sie das Kästchen: ■

c) Ist ein Beobachterentwurf für autonome, instabile, lineare, zeitinvariante Systeme möglich? | 0.5 P

☐ Ja. Mit einer stabilen Beobachterfehlerdynamik.
☐ Nein.
☐ Ja. Mit einer instabilen Beobachterfehlerdynamik.

d) Was ist die Funktion des Korrekturvektors $\boldsymbol{l}$ beim Entwurf eines Luenberger-Beobachters? | 0.5 P

☐ Er gewichtet die Differenz zwischen geschätztem und gemessenem Ausgang.
☐ Er korrigiert die Differenz zwischen charakteristischem Eigenvektor des Systems und dem des Beobachters.
☐ Keine der oben genannten Aussagen ist richtig.

e) Welche Größen definieren einen Beobachter für ein LTI-System eindeutig? Hier bezeichnet λ die Eigenwerte der Systemmatrix. | 0.5 P

☐ $(A, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{l})$
☐ $(A, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{\lambda})$
☐ Beide Aussagen sind falsch.

f) Kann die Fehlerdynamik des Beobachters auch *schneller* als die des geschlossenen Regelkreis gewählt werden? | 0.5 P

☐ Nein. Das widerspricht dem Separationsprinzip.
☐ Nein. Das destabilisiert das Gesamtsystem.
☐ Ja. Das ist die gängige Vorgehensweise.

g) Angenommen, Sie haben 2 Messgrößen für ein System mit 4 Zuständen zur Verfügung und verwenden einen PI-Zustandsregler. Von welcher Ordnung muss Ihr Beobachter sein? Begründen Sie Ihre Antwort! | 1 P

☐ 2. Ordnung. ☐ 4. Ordnung ☐ 5. Ordnung ☐ 6. Ordnung ☐ 8. Ordnung.

h) Sie verwenden ein numerisches Tool zum Entwurf eines Beobachters, das Ihnen folgenden Korrekturvektor liefert: $\boldsymbol{l} = [9.65 \times 10^{-4}, -1.84 \times 10^2, 0]^T$. Ist das möglich? | 0.5 P

☐ Nein. Infolge des Nulleintrags geht die Information eines Messwerts verloren.
☐ Ja.
☐ Ja, aber nur wenn die Systemmatrix keinen Eigenwert $\lambda = 0$ besitzt.

i) Sie entwickeln Fluglageregler für Satelliten in der R&D-Abteilung. Ein Kollege hat Probleme mit einem Beobachter-Entwurf, der folgende Elemente umfasst: | 1 P

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c}^T = [1,\ 0], \boldsymbol{l} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Was können Sie ihm dazu sagen?

☐ "Die Fehlerdynamik ist stabil. Du könntest beide Eigenwerte beliebig in der linken komplexen Halbebene platzieren."
☐ "Überprüfe die Wahl deines Sensors."
☐ "Die Dimension deines Korrekturvektors stimmt nicht."

j) Angenommen, Sie modellieren Ihre Strecke als lineares Modell $(A, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}^T)$. Wie bestimmen Sie die Dynamikmatrix $\hat{A}$ des zugehörigen Beobachters? | 0.5 P

☐ $\hat{A} = A - \boldsymbol{l}\boldsymbol{c}^T$
☐ $\hat{A} = \sum_{i=0}^{n-1} p_i A^i$
☐ $\hat{A} = A$

k) Das charakteristische Polynom der Dynamikmatrix eines Beobachterfehlersystems 5. Ordnung laute: $p(\lambda) = \lambda^5 + 4\lambda^4 + 6\lambda^2$. Ist das möglich? | 0.5 P

☐ Nein. Nicht alle Koeffizienten des charakteristischen Polynoms sind ungleich null.
☐ Ja. Aber charakteristische Polynome können nur für die Bestimmung der Eigenwerte von Dynamikmatrizen verwendet werden.
☐ Ja. Aber der Beobachter wird den gewünschten Zweck nicht erfüllen.
☐ Ja. Und die Fehlerdynamikmatrix ist asymptotisch stabil.

Aufgabe 4. Die folgenden Aufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

a) Überprüfen Sie die folgenden Übertragungsfunktionen | 3 P

$$\begin{aligned}\hat{g}_1(s) =& \frac{2s+1}{2s^3+9s^2+12s+4}\\ \hat{g}_2(s) =& \frac{4s-1}{9s^3+12s^2+4s}\\ \hat{g}_3(s) =& \frac{s^2-1}{s^3-3s+2}\end{aligned}$$

(i) jeweils auf Eingangs-Ausgangs-Stabilität und

(ii) falls ein Endwert existiert, geben Sie den Endwert der Sprungantwort $h(t)$ für $t \to \infty$ an.

b) Gegeben ist das System $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$.

(i) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ der Dynamikmatrix | 0.5 P

$$A = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{3} & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & c & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(ii) Für das System ist eine Ähnlichkeitstransformation in die neuen Zustände $\boldsymbol{z} = V\boldsymbol{x}$ durch | 1 P

$$V = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte der transformierten Dynamikmatrix $\tilde{A}$ denen der Originalmatrix A entsprechen. *Hinweis:* Für A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

c) Die Modellierung eines mechanischen Systems führt auf die Differenzialgleichung $\ddot{x} = \frac{1}{m}(-dv - ks)$. Dabei ist s die Position einer Masse m, v deren Geschwindigkeit und $\ddot{x} = a$ deren Beschleunigung. Für die Parameter gilt d, $k \in \mathbb{R}$.

(i) Geben Sie die Zustandsdarstellung dieses autonomen Systems an. | 0.5 P

(ii) Für welche Wertebereiche von d und k ist das System asymptotisch stabil? Setzen Sie hierzu vereinfachend $m = 1$ kg. | 1 P

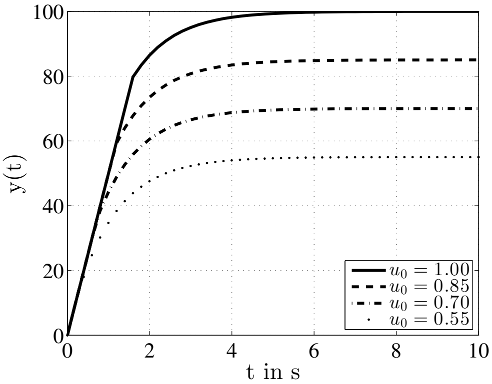
(iii) Durch die geeignete Wahl eines Aktuators soll die vollständige Steuerbarkeit sichergestellt werden. Welche Bedingung müssen die Einträge b_i des Eingangsvektors $\boldsymbol{b}$ dazu erfüllen? Geben Sie einen entsprechenden Eingangsvektor $\boldsymbol{b}$ an. | 0.5 P

(iv) Das gegebene System ist mit einem Positionssensor vollständig beobachtbar. Geben Sie einen entsprechenden Ausgangsvektor $\boldsymbol{c}^T$ an und verifizieren Sie diese Aussage für den Fall $m = \frac{1}{2}$ kg, $k = \frac{1}{2}$ kg/s^2, $d = 2$ kg/s mittels des PBH-Eigenvektortests. | 1.5 P

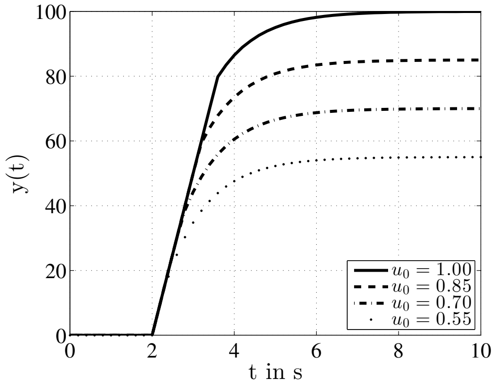
(v) Geben Sie die Ausgangsgleichung bei Verwendung eines Beschleunigungssensors für das System an. Berücksichtigen Sie dabei Ihre Wahl des Aktuators aus (iii). | 0.5 P

d) Gegeben sind Sprungantworten von drei dynamischen Systemen. Die vier Sprungantworten wurden für die Anregungssignale $u_1(t) = u_0\sigma(t)$ (linke Abbildung) und $u_2(t) = u_0\sigma(t-2s)$ (rechte Abbildung) aufgenommen, wobei $u_0 \in \{1.00, 0.85, 0.70, 0.55\}$ gewählt wurde. Geben Sie jeweils an, ob es sich um (i) ein lineares oder ein nichtlineares sowie (ii) um ein zeitvariantes oder zeitinvariantes System handelt. **Begründen** Sie jeweils Ihre Antwort.

System 1: ☐ linear ☐ nichtlinear; ☐ zeitinvariant ☐ zeitvariant | 0.5 P
Begründung:

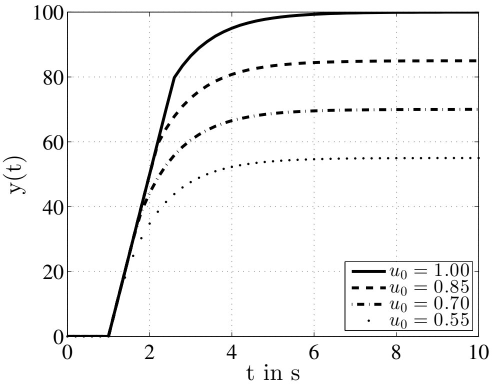


(a) Sprungantworten mit $u_1(t) = u_0\sigma(t)$.

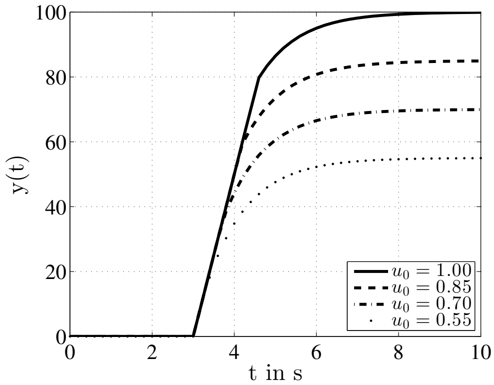


(b) Sprungantworten mit $u_2(t) = u_0\sigma(t-2s)$.

System 2: ☐ linear ☐ nichtlinear; ☐ zeitinvariant ☐ zeitvariant | 0.5 P
Begründung:

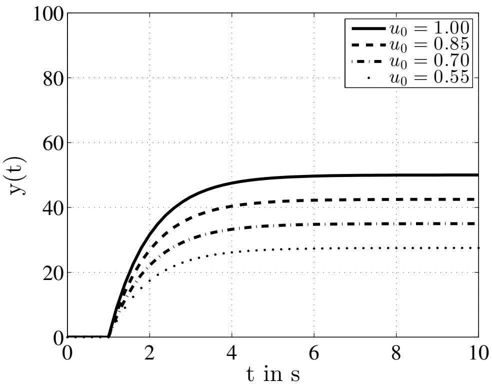


(c) Sprungantworten mit $u_1(t) = u_0\sigma(t)$.

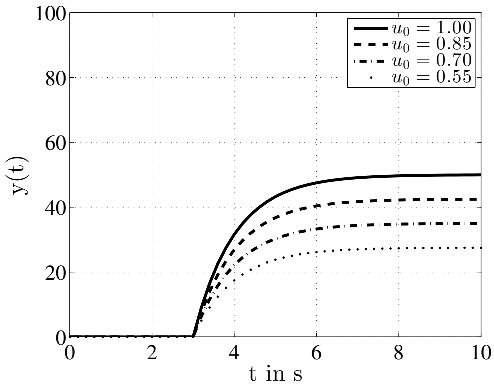


(d) Sprungantworten mit $u_2(t) = u_0\sigma(t-2s)$.

System 3: ☐ linear ☐ nichtlinear; ☐ zeitinvariant ☐ zeitvariant | 0.5 P
Begründung:



(e) Sprungantworten mit $u_1(t) = u_0\sigma(t)$.



(f) Sprungantworten mit $u_2(t) = u_0\sigma(t-2s)$.