Regelungstechnik I (WS 13/14) **Klausur (13.03.2014)**

Prof. Dr.–Ing. habil. Thomas Meurer

Lehrstuhl für Regelungstechnik

Name: ______________________ Matrikelnummer: ______________

Bitte beachten Sie:

a) Diese Klausur enthält 4 Aufgaben auf den Seiten 2-7.

b) Dauer der Klausur: 120 Minuten.

c) Erlaubte Hilfsmittel: Bereitgestellte Formelsammlung und 1 Seite A4 einseitig handschriftlich beschrieben. Elektronische Hilfsmittel, das Vorlesungsskript oder andere Literatur werden nicht zugelassen.
Handys dürfen in die Klausur nicht mitgenommen werden.

d) Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf alle Blätter, die Sie abgeben.

e) Legen Sie bitte Ihren Studierenden- und Ihren Personalausweis bereit.

f) Geben Sie dieses Deckblatt und die Klausuraufgaben mit Ihrer Klausur ab.

	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
Aufgabe 1	10	
Aufgabe 2	10	
Aufgabe 3	10	
Aufgabe 4	10	
$\sum$	40	

Note: ______________

Prof. Dr.–Ing. habil. Thomas Meurer

Aufgabe 1. Betrachtet wird der in Abbildung 1 dargestellte Heißluftballon mit konstantem Volumen V und konstanter Hüllfläche A.

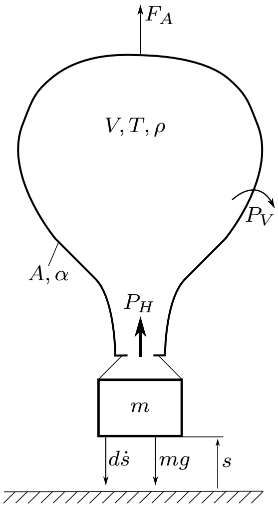


Abb. 1: Schematische Darstellung des Heißluftballons.

Auf den Korb der Masse m wirken die Gewichtskraft F_g, die Reibkraft $F_d = dw$ mit der Geschwindigkeit $w = \dot{s}$ sowie die Auftriebskraft F_A. Die Auftriebskraft kann nach Archimedes wie folgt angegeben werden

$$F_A = (\rho(s, T_0) - \rho(s, T))Vg \ .$$

Die höhen- und temperaturabhängige Funktion $\rho(s, T)$ beschreibt allgemein die Dichte der Luft. Dabei bezeichnet T_0 die als konstant angenommene Temperatur der Umgebungsluft und T die Temperatur der Luft innerhalb der Ballonhülle.

Die Temperatur der Luft in der Ballonhülle kann mittels eines Brenners mit der Heizleistung P_H erhöht werden. Gleichzeitig wird über die Ballonhülle die Verlustleistung P_V abgegeben. Die Verlustleistung entspricht dem Produkt aus Hüllfläche A, dem Wärmeübergangskoeffizienten α und der Temperaturdifferenz zwischen der Umgebungstemperatur T_0 und der Temperatur innerhalb der Hülle T. Für den Heißluftballon ergibt sich somit folgende Energiebilanz

$$\frac{d}{dt}\big(c_V V \rho(s, T) T\big) = P_H - P_V \ ,$$

wobei der konstante Parameter c_V die konstante Wärmekapazität der Luft angibt.

a) Benennen Sie die Eingangsgröße u des Systems und begründen Sie Ihre Wahl. | 0.5 P

b) Wählen Sie geeignete Zustandsgrößen und geben Sie das mathematische Modell in der Form | 5 P

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u), \\ y &= h(\boldsymbol{x}, u) \end{aligned}$$

an. Die Höhe des Ballons s stellt dabei den Systemausgang dar.

c) Geben Sie die Bestimmungsgleichungen für einen Arbeitspunkt an. Ermitteln Sie hieraus die Temperatur T_R am Arbeitspunkt in Abhängigkeit der stationären Heizleistung $P_{H,R}$ | 1.5 P

d) Linearisieren Sie das System um einen allgemeinen Arbeitspunkt $(\boldsymbol{x}_R, u_R)$ und stellen Sie es wie folgt dar: | 3 P

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\boldsymbol{x}} &= A\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\Delta u, \\ \Delta y &= \boldsymbol{c}^T\Delta\boldsymbol{x} + d\Delta u \qquad . \end{aligned}$$

Nehmen Sie dabei an, dass für die Dichte $\rho(s,T)$ der von s unabhängige Zusammenhang gilt

$$\rho(s,T) = \frac{\rho_0 T_0}{T} + k \quad \text{mit} \quad \rho_0,\, k > 0 \ .$$

Aufgabe 2. Gegeben ist ein lineares, zeitinvariantes System mit der Übertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{40(s-5)^2}{s(s+1)(s^2+2s+100^2)} \ .$$

An den geschlossenen Regelkreis werden folgende Anforderungen gestellt:

$$\begin{aligned} t_r &= 1.5\,\mathrm{s} \ , \\ \ddot{u} &= 3\,\% \ , \\ e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} &= 0 \ . \end{aligned}$$

a) Zeichnen Sie das Bodediagramm des Systems auf dem beigefügten Hilfsblatt ein. Tragen Sie dazu im ersten Schritt die Asymptoten in das Bodediagramm ein. Bestimmen Sie die durch das schwingungsfähige Verzögerungsglied hervorgerufene Resonanzüberhöhung und berücksichtigen Sie diese in der graphischen Darstellung. | 3,5 P

b) Bestimmen Sie die gewünschte Durchtrittsfrequenz ω_c und die gewünschte Phasenreserve des offenen Regelkreises. | 0,5 P

c) Markieren Sie im Bodediagramm die Phasenreserve ϕ an der Frequenz ω_c. | 0,5 P

d) Stellen Sie die Gleichung zur Berechnung der Phase von $\hat{g}(\mathrm{i}\omega)$ an einer allgemeinen Frequenz ω auf. | 1 P

e) Berechnen Sie die Phasenreserve ϕ des Systems und die gewünschte Phasenänderung $\Delta\varphi$. | 0,5 P

Als Regler wird im Folgenden die Übertragungsfunktion $\hat{g}_r(s) = V\frac{1+Ts}{1+T\eta s}$ mit V, T, $\eta > 0$ gewählt. Nutzen Sie für die weitere Rechnung die Werte $|\hat{g}(\mathrm{i}\omega_c))| \approx 0.07$ und $\arg(\hat{g}(\mathrm{i}\omega_c)) \approx -158°$ für den Betrag und die Phase von $\hat{g}(s)$ an der gewünschten Durchtrittsfrequenz ω_c des offenen Regelkreises.

f) Zeigen Sie, dass für den Betrag von $\hat{g}_r(\mathrm{i}\omega)$ an der Stelle maximaler Phasenänderung $\omega = \omega_{\max}$ gilt $|\hat{g}_r(\mathrm{i}\omega_{\max})| = \frac{V}{\sqrt{\eta}}$. | 1 P

g) Legen Sie den Regler $\hat{g}_r(s)$ so aus, dass die oben gestellten Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis erfüllt werden. | 2 P

h) Sind die folgenden Regler | 1 P

(i) $\hat{g}_1(s) = V\frac{1+Ts}{s}$,

(ii) $\hat{g}_2(s) = V\frac{s^2+2s+100^2}{(1+Ts)^2}$

für die Lösung der Aufgabe geeignet? Begründen Sie Ihre Antwort, berücksichtigen Sie dabei auch Ihre Lösung in e).

Hinweise: $\log(2) \approx 0.3$, $\arctan(-x) = -\arctan(x)$, $\arctan(x) \approx x$ für $|x| \leq 0.2$, $3 - 2\sqrt{2} \approx \frac{14^2}{34^2}$.

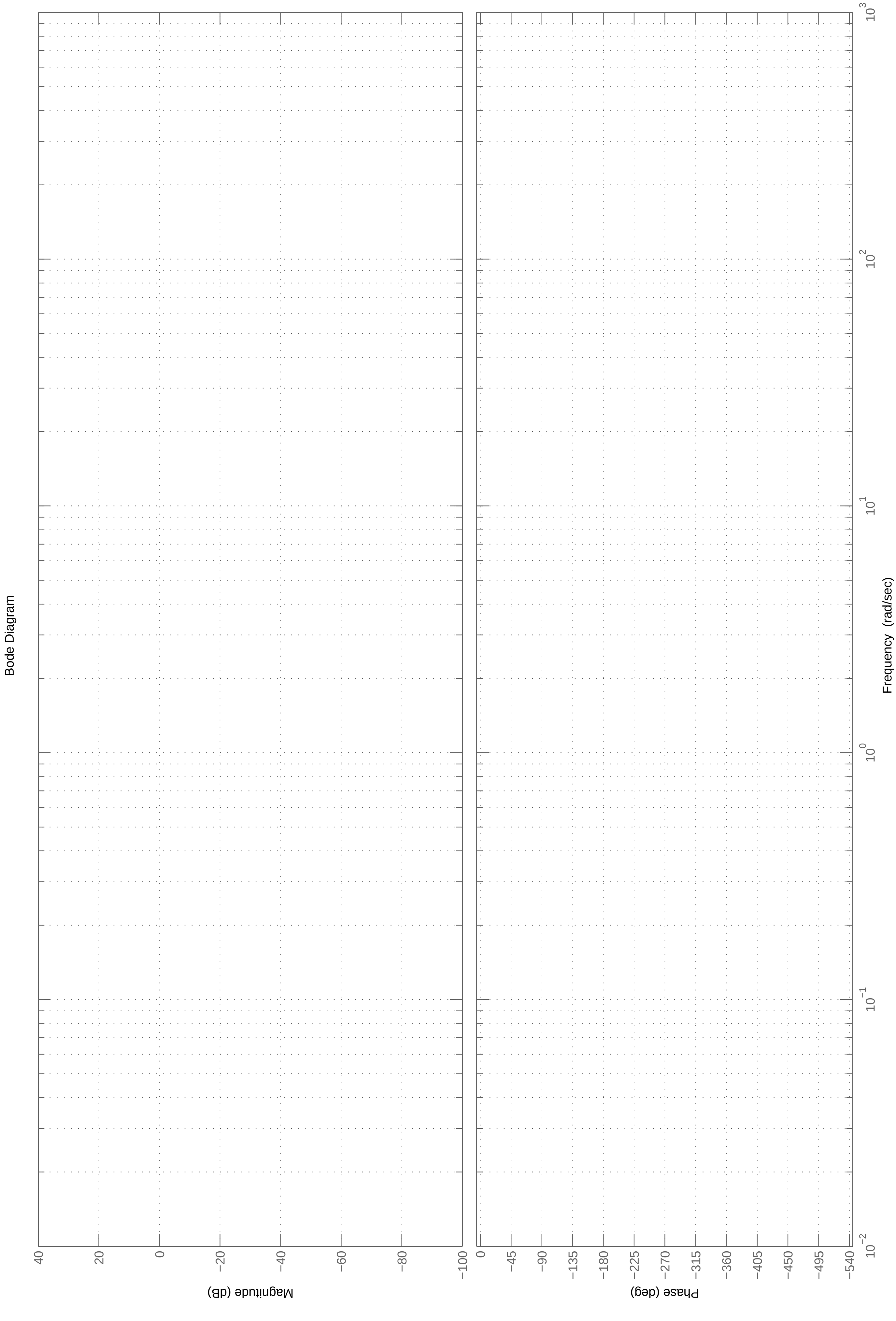


Abb. 2: Bodediagramm zu Aufg. 2.

Aufgabe 3. Gegeben ist ein lineares, zeitinvariantes System ohne Störung in der Zustandsdarstellung

$$\dot{x} = 2x - 3u \ ,$$
$$y = -4x \ .$$

Für dieses System soll ein PI-Zustandsregler so entworfen werden, dass alle Eigenwerte des geregelten Systems bei $\lambda = -2$ liegen.

a) Beurteilen Sie die Stabilität und Steuerbarkeit des Systems. Begründen Sie Ihre Antwort. | 1 P

b) Zeichnen Sie das Blockschaltbild des Systems mit einer PI-Zustandsregelung und markieren Sie im Blockschaltbild den Systemzustand x und den Zustand x_I des PI-Anteils des Reglers. | 1,5 P

c) Geben Sie die Zustandsdarstellung für das erweiterte System mit Zustandsvektor $\boldsymbol{x}_{\text{ext}} = [x \ x_I]^T$ an und weisen Sie vollständige Steuerbarkeit des erweiterten Systems nach. | 2 P

d) Geben Sie auf Basis der Darstellung in b) die allgemeine Gleichung des PI-Zustandsreglers | 1,5 P

$$u = -\boldsymbol{k}_{\text{ext}}^T \boldsymbol{x}_{\text{ext}} + hr$$

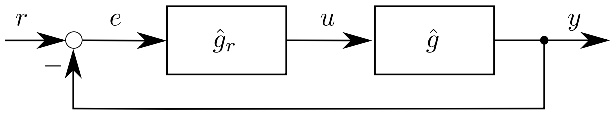
in Abhängigkeit von den Parametern V_I und V_P des PI-Anteils und k der Zustandsrückführung an.

e) Bestimmen Sie den Rückführvektor $\boldsymbol{k}_{\text{ext}}^T$ so, dass die Eigenwerte des erweiterten Systems an die gewünschten Stellen verschoben werden. Wie lauten die Parameter V_I und V_P des PI-Anteils des Reglers und die Rückführung k für den Zustand x? | 3,5 P

f) Was kann durch den Parameter V_P im Allgemeinen beeinflusst werden? | 0,5 P

Aufgabe 4. Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

a) Gegeben ist das folgende Blockschaltbild | 2.5 P



mit den Übertragungsfunktionen

$$\hat{g}(s) = \frac{-s+1}{s+1}\ , \quad \hat{g}_r(s) = \frac{1}{-s+1}$$

i) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktionen $\hat{t}_{r,y}(s)$, $\hat{t}_{r,e}(s)$ und $\hat{t}_{r,u}(s)$.

ii) Ist der Regelkreises intern stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Gegeben ist das lineare zeitinvariante System | 3.5 P

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

i) Geben Sie die Eigenwerte des Systems an.

ii) Ist das System asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

iii) Bestimmen Sie die Transitionsmatrix des Systems und geben Sie die Lösung des Differenzialgleichungssystems für die Anregung $u(t) = 1$ zu einem allgemeinen Zeitpunkt $T > 0$ an.

c) Sei | 2 P

$$g(t) = e^{-\alpha t} + \sin(\beta t)$$

die Impulsantwort eines linearen zeitinvarianten Systems.

i) Geben Sie die Wertebereiche der Parameter α und β an, für die das System eingangs-ausgangsstabil ist und begründen Sie ihre Antwort.

ii) Unter welchen Bedingungen folgt für lineare zeitinvariante Systeme aus der Eingangs-Ausgangs-Stabilität die asymptotische Stabilität.

d) Bestimmen Sie den Wertebereich von α so, dass | 2 P

$$p(s) = 2s^4 + 10s^3 + 24s^2 + 20s + \alpha$$

ein Hurwitz-Polynom ist.