Regelungstechnik I (SS 13) **Klausur (10.10.2013)**

Prof. Dr.–Ing. habil. Thomas Meurer

Lehrstuhl für Regelungstechnik

Name: ______________________ Matrikelnummer: ______________________

Bitte beachten Sie:

a) Diese Klausur enthält 4 Aufgaben auf den Seiten 2-8.

b) Dauer der Klausur: 120 Minuten.

c) Erlaubte Hilfsmittel: Eine handschriftliche Formelsammlung mit 14 Seiten A4 (einfach beschrieben) bzw. 7 Seiten A4 (doppelseitig beschrieben). Elektronische Hilfsmittel, das Vorlesungsskript oder andere Literatur werden nicht zugelassen.
Handys dürfen in die Klausur nicht mitgenommen werden.

d) Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf alle Blätter, die Sie abgeben.

e) Legen Sie bitte Ihren Studierenden- und Ihren Personalausweis bereit.

f) Geben Sie dieses Deckblatt und die Klausuraufgaben mit Ihrer Klausur ab.

	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
Aufgabe 1	10	
Aufgabe 2	10	
Aufgabe 3	10	
Aufgabe 4	10	
$\sum$	40	

Note: ______________

Prof. Dr.–Ing. habil. Thomas Meurer

Aufgabe 1. Abbildung 1 zeigt den Ankerkreis einer fremderregten Gleichstrommaschine mit variabler Ankerspannung u_A. Der Erregerfluss der Maschine $\varPhi_e$ wird als konstant angenommen. Für die an der Maschine induzierte Spannung und das induzierte Moment gilt:

$$u_M = k_1 \varPhi_e \omega \quad , \qquad M_M = k_2 \varPhi_e i_a \qquad .$$

Dabei stellen k_1 und k_2 maschinenspezifische Konstanten dar, i_a ist der Ankerstrom und ω stellt die Winkelgeschwindigkeit dar.
Die Gleichstrommaschine treibt den in Abbildung 2 dargestellten Seilzug an, der eine angehängte Masse m heben soll. Die Geschwindigkeit ($v = r\omega$) des Hubvorgangs kann im Weiteren als Messgröße angesehen werden. Für das an der Maschine herrschende Moment, mit Berücksichtigung des Trägheitsmoments $\varTheta$ des gesamten Systems, gilt:

$$\varTheta \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \sum_i M_i \qquad .$$

Neben der auf die Masse m wirkenden Gewichtskraft wirke der rotatorischen Bewegung das nichtlineare Reibmoment M_R entgegen, das vereinfacht durch

$$M_R = \mu_R \omega^3$$

beschrieben wird. Es wird angenommen, dass das Seil dehnungsfrei ist und seine Dynamik vernachlässigt werden kann.

<u>Hinweis:</u> Im skalaren Fall gilt: Das Drehmoment ist das Produkt aus Kraft und Hebelarm.

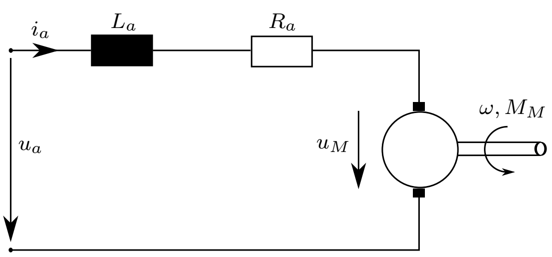


Abb. 1: Gleichstrommotor.

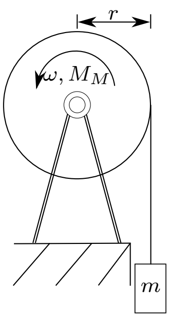


Abb. 2: Seilzug.

a) Benennen Sie die Eingangs- und Ausgangsgröße (u, y) des Systems und begründen Sie Ihre Wahl. | 1 P

b) Wählen Sie geeignete Zustandsgrößen und geben Sie das mathematische Modell in der Form | 5 P

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u) \\ y &= h(\boldsymbol{x}, u) \end{aligned}$$

an.

c) Welche stationäre Eingangsgröße $u = u_R$ ist notwendig, um den stationären Ankerstrom $i_a = i_R$ zu erzeugen? Welche stationäre Winkelgeschwindigkeit $\omega = \omega_R$ stellt sich in diesem Fall ein? | 1 P

d) Linearisieren Sie das System um den Arbeitspunkt aus c) und stellen Sie es wie folgt dar: | 3 P

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\boldsymbol{x}} &= A\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\Delta u \\ \Delta y &= \boldsymbol{c}^T\Delta\boldsymbol{x} + d\Delta u \qquad . \end{aligned}$$

<u>Hinweis:</u> Explizites Einsetzen des Arbeitspunktes ist nicht erforderlich.

Aufgabe 2. Gegeben ist die Übertragungsfunktion eines linearen, zeitinvarianten Systems

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{5}\frac{(s+10)^2}{s(s+200)(s+1)^2} \ .$$

An den geschlossenen Regelkreis werden folgende Anforderungen gestellt:

$$\begin{aligned} t_r &= 6\,\mathrm{s} \ , \\ \ddot{u} &= 20\,\% \ , \\ e_\infty|_{r(t)=t\sigma(t)} &= 0 \ . \end{aligned}$$

a) Zeichnen Sie das Bodediagramm des Systems auf dem beigefügten Hilfsblatt ein. | 3 P

b) Markieren Sie im Bodediagramm die Phasenreserve ϕ an der gewünschten Durchtrittsfrequenz ω_c des offenen Regelkreises. | 0,5 P

c) Stellen Sie die Gleichung zur Berechnung der Phase von $\hat{g}(\mathrm{i}\omega)$ an einer allgemeinen Frequenz ω auf. | 0,5 P

d) Entwerfen Sie einen geeigneten Regler $\hat{g}_r(s)$ so, dass die oben gestellten Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis erfüllt werden. | 4 P

Hinweise: i) Für den Betrag und die Phase von $\hat{g}(s)$ an der gewünschten Durchtrittsfrequenz ω_c des offenen Regelkreises gilt $|\hat{g}(\mathrm{i}\omega_c))| \approx \frac{19}{50}$ und $\arg(\hat{g}(\mathrm{i}\omega_c)) \approx -115^\circ$.

ii) $45^\circ \mathrel{\widehat{=}} \frac{3\pi}{12}$, $60^\circ \mathrel{\widehat{=}} \frac{4\pi}{12}$, $75^\circ \mathrel{\widehat{=}} \frac{5\pi}{12}$.

e) Ordnen Sie den in Abbildung 4 gegebenen Sprungantworten A–B, dem Pol-Nullstellen-Diagramm C und der Übertragungsfunktion D ein Bodediagramm in Abbildung 5 zu und begründen Sie Ihre Zuordnungen. | 2 P

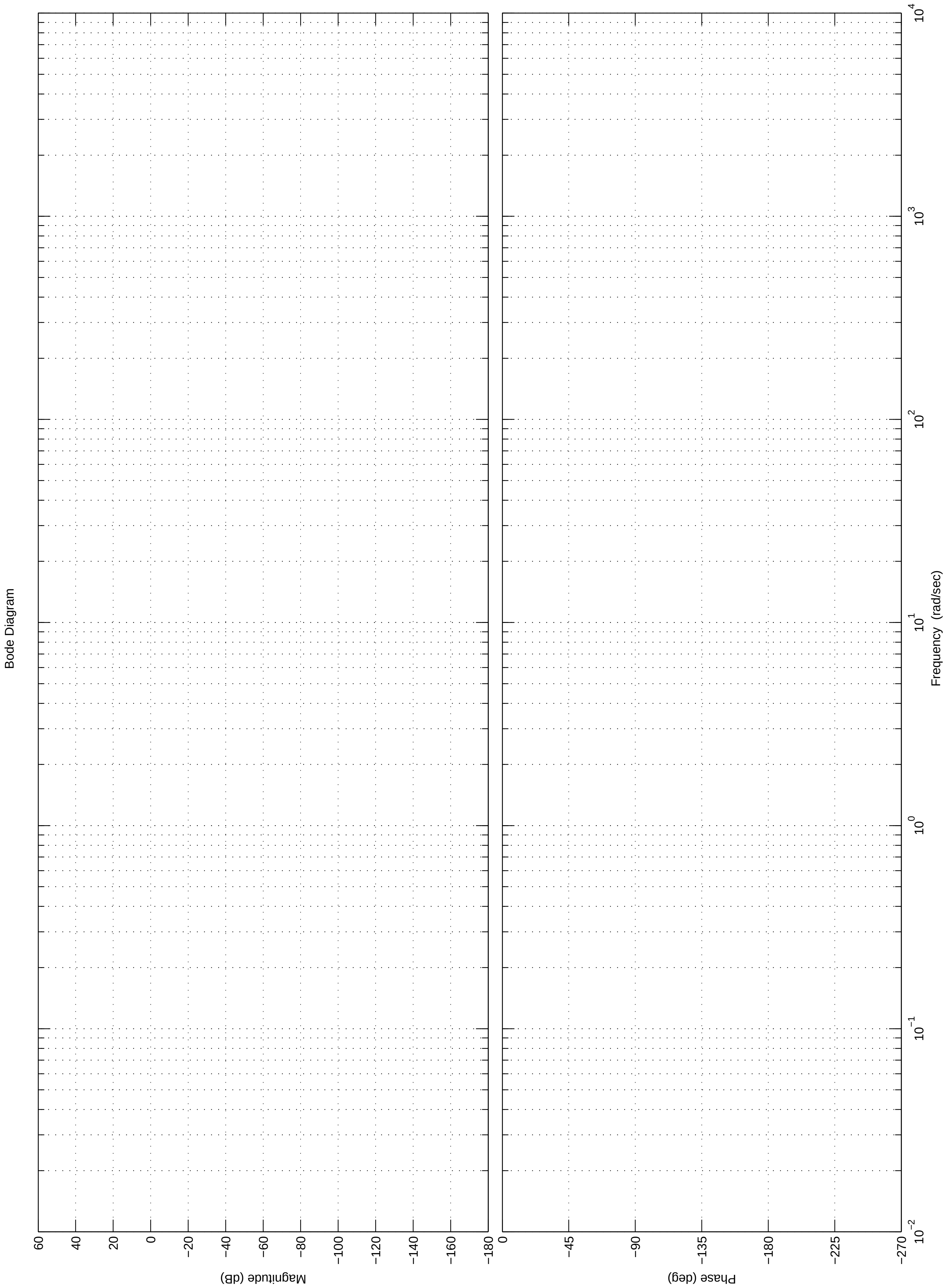
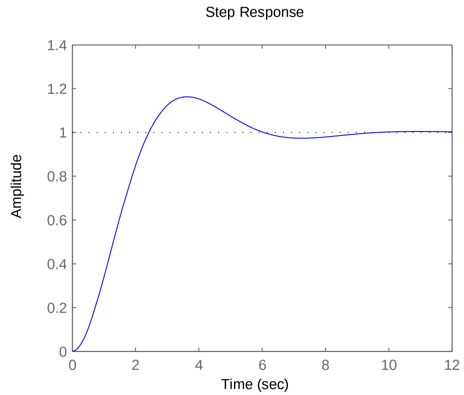
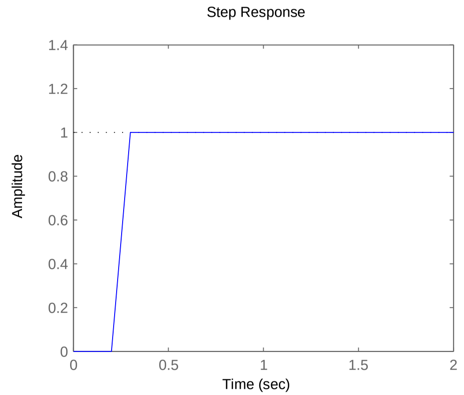


Abb. 3: Bodediagramm zu Aufg. 2.

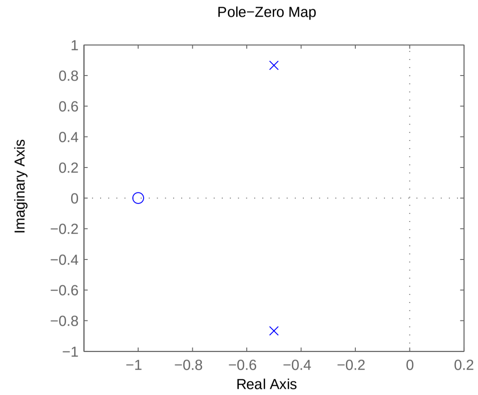
A



B



C

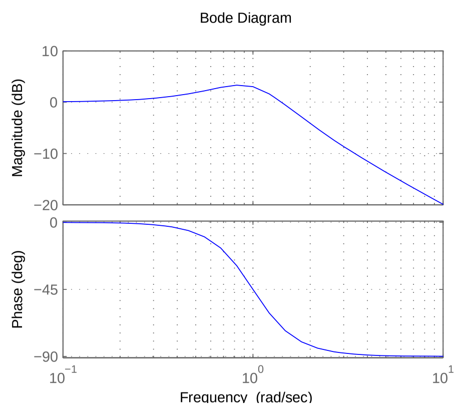


D

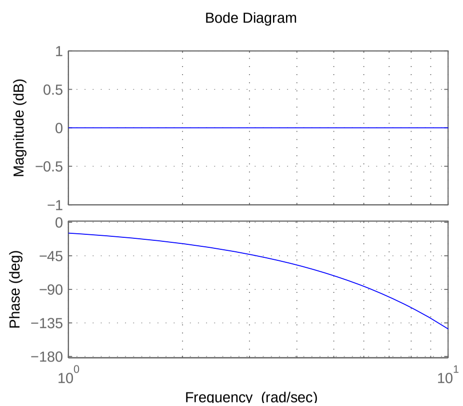
$$\hat{g}(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

Abb. 4: Sprungantworten, Pol-Nullstellen-Diagramm, Übertragungsfunktion.

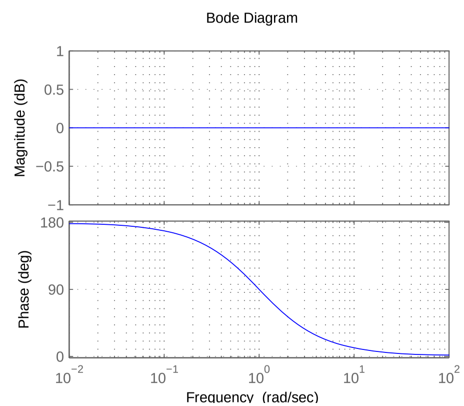
I



II



III



IV

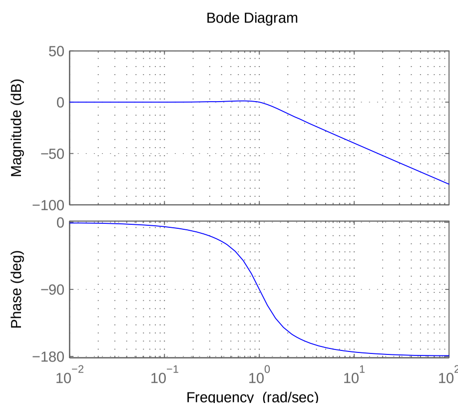


Abb. 5: Bodediagramme.

Aufgabe 3. Gegeben ist die Übertragungsfunktion

$$\hat{g}(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s-2)}$$

eines instabilen, aber vollständig steuerbaren, linearen zeitinvarianten Systems 2. Ordnung, für das ein geeigneter Zustandsregler und ein Zustandsbeobachter bestimmt werden sollen. Weiter ist die Transformationsmatrix V in Regelungsnormalform (RNF) bekannt. Es gilt

$$V = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} .$$

a) Geben Sie die RNF des Systems an. | 0,5 P

b) Zeigen Sie, dass für die Dynamikmatrix A, den Eingangsvektor $\boldsymbol{b}$ und den Ausgangsvektor $\boldsymbol{c}^T$ in den Originalkoordinaten gilt | 2 P

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} , \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \qquad \boldsymbol{c}^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} .$$

c) Zur Stabilisierung des geschlossenen Regelkreises soll ein Zustandsregler verwendet werden, der asymptotische Stabilität gewährleistet. Welcher der beiden Rückführvektoren | 3 P

(i) $\boldsymbol{k}^T = [\,-6 \quad 0\,]$,

(ii) $\boldsymbol{k}^T = [\;\;5 \quad 8\,]$

ist dafür geeignet? Begründen Sie Ihre Antwort. Berechnen Sie für Ihre Wahl die Eigenwerte der Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises.

Für die Realisierung der Zustandsregelung mit Rückführvektor $\boldsymbol{k}^T$ aus c) soll nun ein Luenberger-Beobachter entworfen werden.

d) Weisen Sie die vollständige Beobachtbarkeit des Systems nach. | 0,5 P

e) Bestimmen Sie einen Beobachterkorrekturvektor $\boldsymbol{l}$ so, dass für das gewünschte charakteristische Polynom der Fehlerdynamikmatrix gilt | 3 P

$$\hat{p}^*(\lambda) = (\lambda + 4)(\lambda + 6) .$$

f) Wie lautet das charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreis mit Beobachter? Begründen Sie Ihre Antwort. | 1 P

Aufgabe 4. Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

a) Gegeben ist die Zustandsdarstellung eines linearen zeitinvarianten Systems | 4,5 P

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ -8 \\ -2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + u \qquad .$$

i) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $\hat{g}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}$ des Systems.

ii) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom der Dynamikmatrix ein Hurwitz-Polynom ist.

iii) Das System wird in der Ruhelage ($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$) mit einem Einheitssprung angeregt. Geben Sie den Anfangswert und den Endwert der Sprungantwort an.

b) Abbildung 6 zeigt die Ortskurve eines offenen Regelkreises mit der Übertragungsfunktion | 1,5 P

$$\hat{l}(s) = \frac{(s-0.1)(s-1)}{(s+0.2)^2(s+0.5)} \qquad .$$

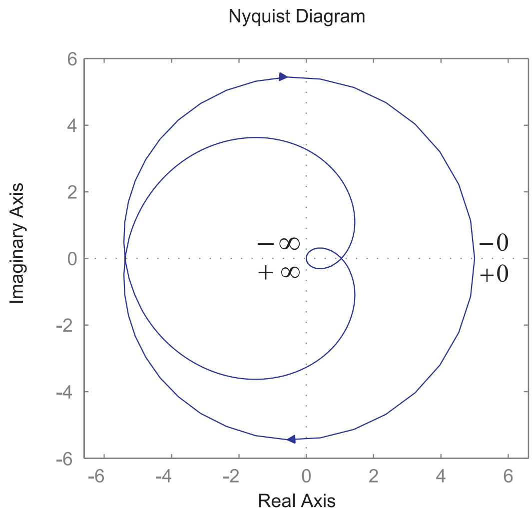
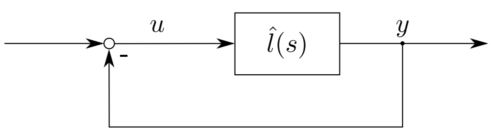


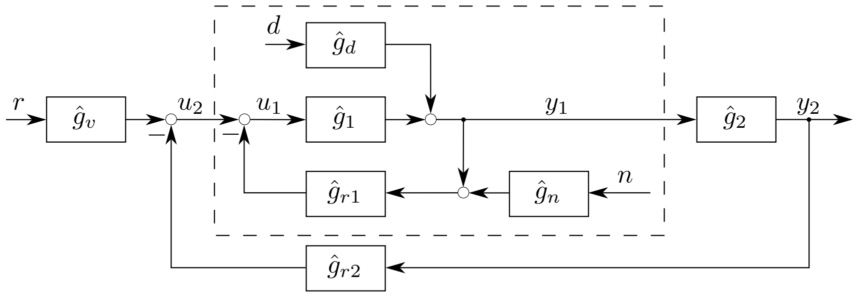
Abb. 6: Ortskurve von $\hat{l}(\mathrm{i}\omega)$.

Überprüfen Sie mit Hilfe des Nyquistkriteriums, ob der geschlossene Regelkreis



eingangs-ausgangs-stabil ist.

c) Gegeben ist das Blockschaltbild | 4 P



Betrachten Sie zunächst nur den inneren Regelkreis (eingerahmter Bereich).

i) Stellen Sie das Signal y_1 als Funktion der Störung d, des Rauschens n und des Eingangs u_2 dar.

ii) Bilden Sie die Übertragungsfunktionen $\hat{t}_{u_2,y_1}$ und $\hat{t}_{n,y_1}$.

Betrachten Sie nun den vollständigen Regelkreis.

iii) Zeichnen Sie das Blockschaltbild des gesamten Regelkreises, indem Sie den inneren Regelkreis mit einer geeigneten Übertragungsfunktion $\hat{t}_{\text{int}}$ darstellen und geben Sie diese an. Nehmen Sie dabei an, dass das Stör- und Rauschsignal entfallen ($d = 0$ und $n = 0$).

iv) Stellen Sie die Führungsübertragungsfunktion des gesamten Kreises in Abhängigkeit des inneren Regelkreises auf $\hat{t}_{r,y_2}(s, \hat{t}_{\text{int}})$.

Appendix

Eigenschaften und Rechenregeln der Laplace–Transformation

Laplace–Integral	$\mathcal{L}(f(t)) = \hat{f}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$	$(\Re\{s\} = \sigma > \gamma)$
Umkehr–Integral	$\mathcal{L}^{-1}(\hat{f}(s)) = f(t)\vert_{t>0} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{r-\mathrm{i}\infty}^{r+\mathrm{i}\infty} \hat{f}(s)e^{st}\mathrm{d}s$	$(r > \gamma)$
Linearität	$\mathcal{L}(k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)) = k_1\mathcal{L}(f_1(t)) + k_2\mathcal{L}(f_2(t))$, $\mathcal{L}^{-1}\left(k_1\hat{f}_1(s) + k_2\hat{f}_2(s)\right) = k_1\mathcal{L}^{-1}\left(\hat{f}_1(s)\right) + k_2\mathcal{L}^{-1}\left(\hat{f}_2(s)\right)$	($k_{1,2}$ beliebig)
Maßstabsänderung	$\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$	$(a \in \mathbb{R}^+)$
Zeitverschiebung	$\mathcal{L}(\sigma(t-b)f(t-b)) = e^{-bs}\hat{f}(s)$	$(b \in \mathbb{R}^+)$
Frequenzverschiebung	$\mathcal{L}^{-1}\left(\hat{f}(s \pm c)\right) = e^{\mp ct}f(t)$	$(c \in \mathbb{C})$
Integration	$\mathcal{L}\left(\int_0^t \dots \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau^n\right) = \frac{1}{s^n}\hat{f}(s)$	
Gewöhnliche Differentiation[1]	$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right) = s^n\hat{f}(s) - s^{n-1}f(0+) - \ldots - f^{(n-1)}(0+)$	
Differentiation der Bildfunktion	$\mathcal{L}^{-1}\left(\hat{f}^{(n)}(s)\right) = (-1)^n t^n f(t)$	
Faltungsintegral	$\mathcal{L}^{-1}\left(\hat{f}_1(s)\hat{f}_2(s)\right) = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\mathrm{d}\tau = f_1(t) \star f_2(t)$	
Grenzwertsätze	• Anfangswert–Satz[1] $\lim_{\sigma\to\infty} s\hat{f}(s) = \lim_{t\to 0+} f(t)$ • Endwert-Satz, Voraussetzung: $\exists\, f(t \to \infty)$ $\lim_{s\to 0} s\hat{f}(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)$	

Korrespondenzen der Laplace–Transformation

Nr.	$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{r-\mathrm{i}\infty}^{r+\mathrm{i}\infty} \hat{f}(s)e^{st}\mathrm{d}s,\ t > 0,\ r \geq \gamma$	$\hat{f}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t,\ \Re\{s\} = \sigma > \gamma$
1	$\delta(t)$	1
2	$\sigma(t)$ und 1	$\frac{1}{s}$
3	$t^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
5	$\cos\omega_0 t$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$
6	$\sin\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$
7	$e^{-at}\cos\omega_0 t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
8	$e^{-at}\sin\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$
9	$t\cos\omega_0 t$	$\frac{s^2-\omega_0^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
10	$t\sin\omega_0 t$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2+\omega_0^2)^2}$
11	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
12	$e^{-at} + at - 1$	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$

Einige trigonometrische Beziehungen

$\sin(0) = 0$	$\cos(0) = 1$	$\tan(0) = 0$
$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$	$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$	$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$
$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$
$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$	$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$	$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 + \sqrt{3}$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty$