Regelungstechnik I (WS 14/15) **Klausur (17.03.2015)**

Prof. Dr.–Ing. habil. Thomas Meurer

Lehrstuhl für Regelungstechnik

Name: ______________________ Matrikelnummer: ______________________

Bitte beachten Sie:

a) Diese Klausur enthält 4 Aufgaben auf den Seiten 2-6.

b) Dauer der Klausur: 120 Minuten.

c) Erlaubte Hilfsmittel: Bereitgestellte Formelsammlung und **1 Seite A4 einseitig handschriftlich beschrieben**. Elektronische Hilfsmittel, das Vorlesungsskript oder andere Literatur werden **nicht** zugelassen. **Handys dürfen in die Klausur nicht mitgenommen werden.**

d) Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf alle Blätter, die Sie abgeben.

e) Legen Sie bitte Ihren Studierenden- und Ihren Personalausweis bereit.

f) Geben Sie dieses Deckblatt und die Klausuraufgaben mit Ihrer Klausur ab.

	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl
Aufgabe 1	10	
Aufgabe 2	10	
Aufgabe 3	10	
Aufgabe 4	10	
$\sum$	40	

Note: ______________ Prof. Dr.–Ing. habil. Thomas Meurer

Aufgabe 1. Betrachtet wird der in Abbildung 1 dargestellte Schleppvorgang einer nicht aktuierten Arbeitsplattform und eines Schleppschiffes in einem Kanal, in dem eine Strömung mit einer positionsabhängigen Fließgeschwindigkeit $v_{st}(r)$ vorherrscht. Ziel ist es die Plattform auf eine bestimmte Position zu schleppen und dort zu halten. Die Position des Schwerpunktes des Schleppers und der Plattform sind mit $r_S(t)$ bzw. $r_P(t)$ und die jeweiligen Masse mit m_S bzw. m_P angegeben. Der Schlepper verfügt über eine Antriebskraft $F_a(t)$.

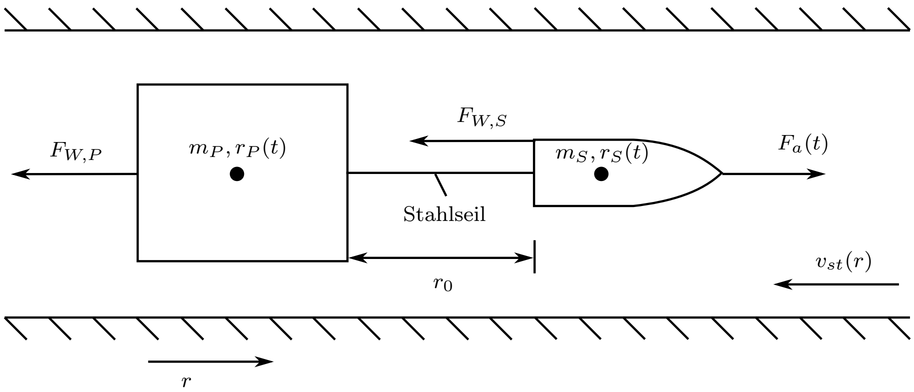


Abb. 1: Schematische Darstellung des Schleppvorgangs.

Schiff und Plattform sind durch ein Stahlseil verbunden, welches als Feder-Dämpfer-System beschrieben werden kann, mit

$$F_{Seil}(t) = k(r_S(t) - r_P(t) - r_0) + c(\dot{r}_S(t) - \dot{r}_P(t)),$$

wobei k die Federkonstante, r_0 die Auslenkung der entspannten Feder und c den Dämpfungsparameter darstellen. Der Bewegung entgegen wirken die Reibkräfte des Wassers

$$F_{W,S}(t) = \frac{1}{2}\alpha_S\big(v_{W,S}(t)\big)^2, \quad F_{W,P} = \frac{1}{2}\alpha_P\big(v_{W,P}(t)\big)^2,$$

wobei $v_{W,S}(t),\ v_{W,P}(t)$ die Umströmungsgeschwindigkeiten des Schleppers und der Plattform darstellen. Die Parameter α_S und α_P stellen spezifische Reibungskonstanten dar. Für die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers im Kanal gilt zunächst allgemein $v_{st} = v_{st}(r)$.

a) Geben Sie die Zustände $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ und die Stellgröße u des Systems an. | 1 P

b) Bestimmen Sie die Umströmungsgeschwindigkeiten $v_{W,S}$ und $v_{W,P}$ des Schleppers und der Plattform. | 0.5 P

c) Bestimmen Sie das mathematische Modell des Systems in der Form | 3 P

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u)\ ,\\ y &= h(\boldsymbol{x}, u)\ .\end{aligned}$$

Beachten Sie, dass die Kraft des Seils Auswirkung auf Schlepper und Plattform hat.

d) Bestimmen Sie die stationäre Stellgröße, die notwendig ist, eine beliebige Ruhelage von Schlepper und Plattform zu erzielen. | 2 P

e) Für diesen Aufgabenteil gilt für die Strömungsgeschwindigkeit $v_{st}(r) = v_0(1 + \sin(r))$. Linearisieren Sie das System um einen allgemeinen Arbeitspunkt $(\boldsymbol{x}_R, u_R)$ und stellen Sie es wie folgt dar: | 3.5 P

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\boldsymbol{x}} &= A\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\Delta u\ ,\\ \Delta y &= \boldsymbol{c}^T\Delta\boldsymbol{x}\ .\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Gegeben ist die Übertragungsfunktion der Regelstrecke

$$\hat{g}(s) = \frac{s+\sqrt{3}}{(s+1)(s^2+0.1s+1)} \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie die Polstellen der Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$. Ist das System asymptotisch stabil? | 0.5 P

b) Bestimmen Sie die Amplitudenerhöhung (in dB) des PT_2-Anteils der Übertragungsfunktion $\hat{g}(s)$ in dessen Knickfrequenz. | 1 P

c) Zeichnen Sie den Amplituden- und Phasengang von $\hat{g}(s)$ in das beigefügte Bode-Diagram ein. Verwenden Sie hierzu vereinfachend $\sqrt{3} \approx 1.7 \approx 5$ dB. | 3 P

d) Für die Strecke (1) soll ein Kompensationsregler entworfen werden so, dass der geschlossene Regelkreis folgende Kriterien erfüllt:

- Anstiegszeit $t_r = \frac{1.5}{\sqrt{3}}$
- Überschwingen $= 0\%$
- Bleibende Regelabweichung der Sprungantwort $e_\infty|_{r(t)=\sigma(t)} = 0$.

Bestimmen Sie hierzu:

(i) Die charakteristischen Kenngrößen für den Reglerentwurf mittels Frequenzkennlinienverfahren. | 0.5 P

(ii) Eine geeignete, realisierbare Reglerübertragungsfunktion $\hat{g}_r(s)$. | 1.5 P

(iii) Die von Ihnen eingeführten Konstanten des Reglers $\hat{g}_r(s)$. | 2 P

e) Die Ortskurve eines offenen Regelkreises $\hat{l}(s) = \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)$ zeigt Abbildung 2. Ist der zugehörige geschlossene Regelkreis mit einem Freiheitsgrad asymptotisch stabil? Begründen Sie ihre Antwort. | 1.5 P

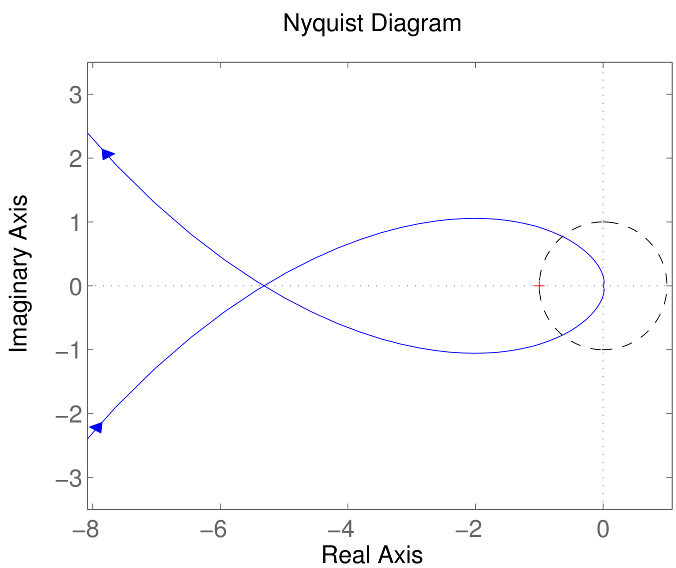
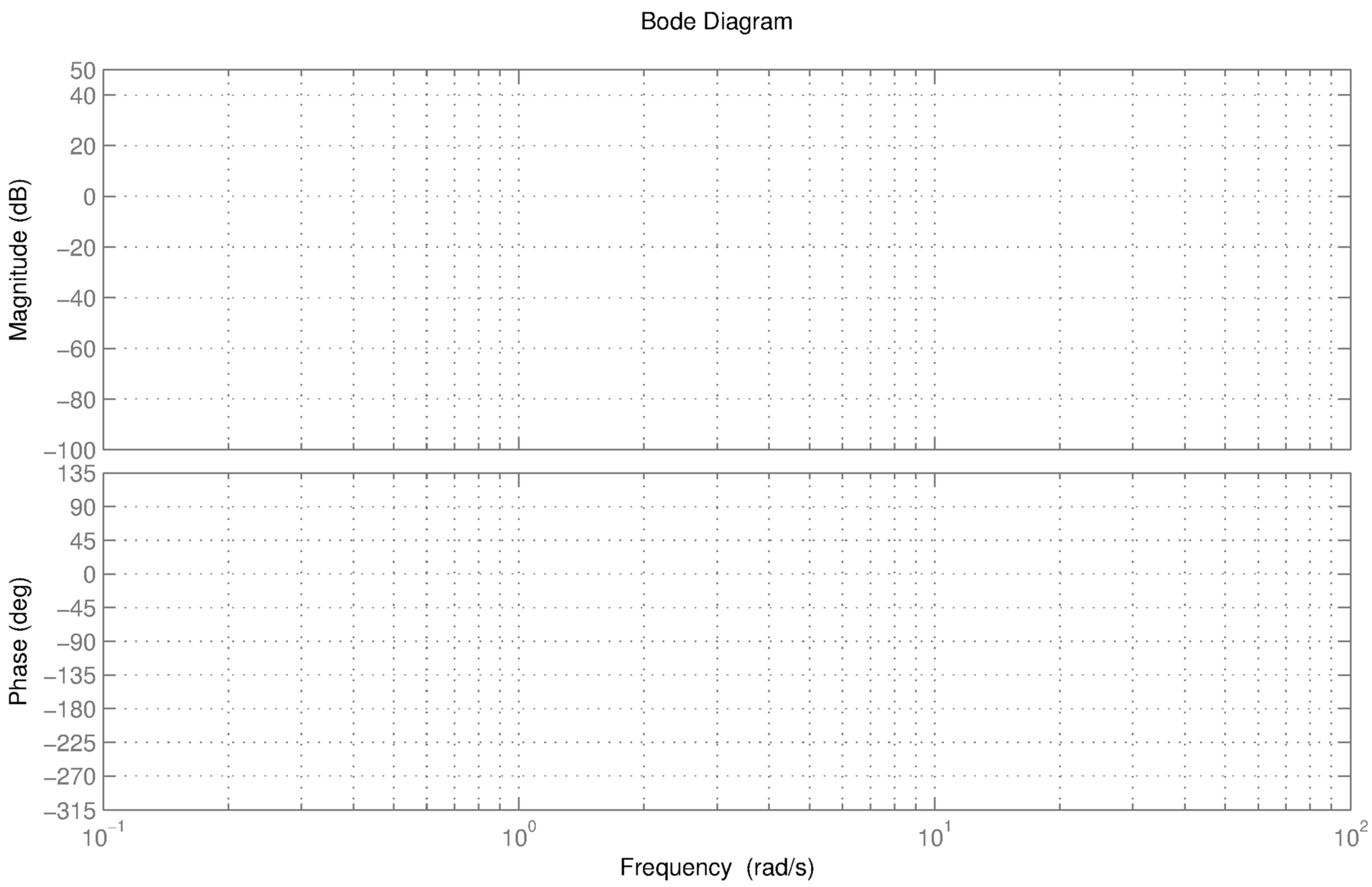


Abb. 2: Ortskurve des offenen Regelkreises $\hat{l}(s) = \hat{g}_r(s)\hat{g}(s)$ aus Aufgabenteil e).


Bode Diagram
Magnitude (dB)
50
40
20
0
−20
−40
−60
−80
−100
Phase (deg)
135
90
45
0
−45
−90
−135
−180
−225
−270
−315
10^−1
10^0
10^1
10^2
Frequency (rad/s)

Aufgabe 3. Gegeben ist das zeitinvariante, lineare, instabile System Σ in Zustandsdarstellung

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -\frac{53}{2} & -6 & 0 \\ 8 & 13 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{74}{3} \\ 0 \\ \frac{1029}{13} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}} u, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0,$$

wobei alle Zustände messbar sind und der Eingang nicht unmittelbar auf den Ausgang wirkt.

a) Geben Sie die Ausgangsmatrix C und die Durchgriffsmatrix D an. | 1 P

b) Die Gleichung

$$\det(\lambda E - [\boldsymbol{b}, A\boldsymbol{b}, A^2\boldsymbol{b}]) = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

hat folgende Lösungen: $\lambda_1 = -6448, \lambda_2 = -54 + 84\mathrm{i}, \lambda_3 = -54 - 84\mathrm{i}$.

Begründen Sie, warum das System Σ in 1. Standardform bzw. Regelungsnormalform (RNF) überführbar ist. | 3 P

c) Geben Sie die Systemmatrix A_c und den Eingangsvektor $\boldsymbol{b}_c$ der Regelungsnormalform an. Erklären Sie, warum diese Systemrepräsentation günstig für die Auslegung eines Zustandsreglers ist. | 3 P

d) Die inverse Steuerbarkeitsmatrix S^{-1} der Strecke Σ ist gegeben zu

$$S^{-1}(A, \boldsymbol{b}) = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} -1.2092 & 1.5795 & 1.6402 \\ -0.6478 & 0.0791 & 0.2019 \\ -0.081 & 0.029 & 0.0252 \end{bmatrix},$$

die Eigenwerte des zustandsrückgeführten Regelkreis sollen bei $\lambda_j^* = -4$, $j = 1, 2, 3$ liegen. Der Algorithmus zur Bestimmung des Zustandsrückführvektors nach Ackermann lautet:

$$\boldsymbol{k}^T = [w_1, w_2, w_3](p_0 E + p_1 A + p_2 A^2 + p_3 A^3)$$

Bestimmen Sie die Parameter w_1, w_2, w_3 und p_i, $i = 0...3$ und zeichnen Sie die Zustandsrückführung in das Blockdiagramm der Strecke Σ gemäß Abbildung 3 ein. | 2 P

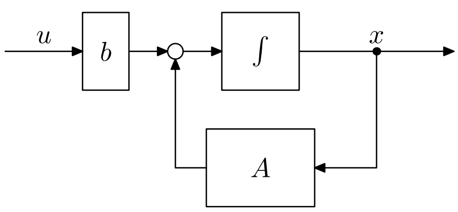


Abb. 3: Blockdiagramm der Strecke Σ

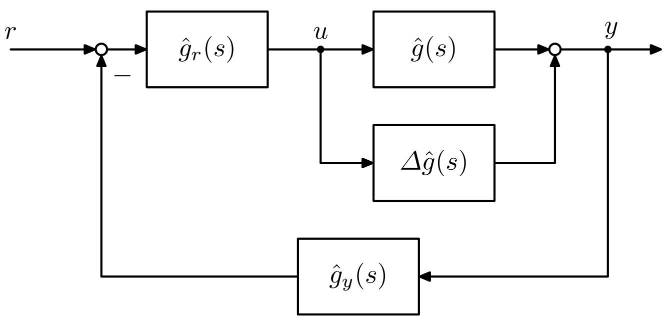
e) Sei $V \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine reelle, quadratische Matrix, sodass gilt

$$VA_c = AV,$$

wobei A_c wieder die Dynamikmatrix in RNF darstellt. Welcher Zusammenhang gilt dann zwischen dem Zustandsrückführvektor $\boldsymbol{k}_c^T$ gemäß RNF und dem Entwurf $\boldsymbol{k}^T$ nach Ackermann? | 1 P

Aufgabe 4. Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

a) Gegeben ist der nachfolgend dargestellte Regelkreis.



(i) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktionen $\hat{t}_{r,y}(s)$, $\hat{t}_{u,y}(s)$ und $\hat{t}_{r,u}(s)$. | 1.5 P

(ii) Ohne Parameterschwankungen bzw. ohne Modellfehler, d.h. für $\Delta\hat{g}(s) = 0$, sei der Regelkreis intern stabil. Welche Bedingungen sind an $\Delta\hat{g}(s)$ zu stellen, um die Eigenschaft der internen Stabilität auch im Fall von Modellfehlern zu erhalten? | 0.5 P

b) Gegeben ist die Übertragungsfunktion | 2 P

$$\hat{g}(s) = -\frac{\sqrt{2}}{(s+1)(1+2\xi s+s^2)} = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}.$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit des Dämpfungsgrads $\xi > 0$ die Lösung $y(t)$ im eingeschwungenen Zustand zur Eingangsfunktion

$$u(t) = \sin(t) + t^2 e^{-t}.$$

Welcher Grenzwert ergibt sich für $\xi = 0$? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Die Matrix | 4 P

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ist in die reelle Jordansche Normalform zu überführen. Geben Sie die hierzu notwendige Transformationsmatrix V an. *Ordnen* Sie die Einträge in V beginnend mit dem Eigenvektor zum reellen Eigenwert der Matrix A.

Bestimmen Sie damit die Lösung des Systems von Differenzialgleichungen

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad t > 0$$
$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

in transformierten Koordinaten $\boldsymbol{x} = V\boldsymbol{z}$. Beachten Sie, dass eine explizite Bestimmung der inversen Matrix V^{-1} zur Lösungsermittlung nicht notwendig ist.

d) Überprüfen Sie das System | 2 P

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} u$$
$$y = x_2$$

auf Beobachtbarkeit. Verwenden Sie hierzu den PBH-Rangtest.